

УДК 539.375

© 1993 г. О.П. Алексеенко, А.М. Вайсман

## РОСТ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ НАГНЕТАНИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается осесимметричная задача о росте круговой трещины гидроразрыва с нестандартным заполнителем полости трещины – пластическим текучим материалом. Анализируются случаи полного и неполного проникания. Обсуждаются допредельные состояния трещины фиксированного размера.

В задачах гидроразрыва, начиная с классических [1], в качестве заполнителя обычно рассматривается жидкость. Но иногда, особенно в случае исследовательского гидроразрыва, проводимого для анализа свойств и состояния породного массива, интересны заполнители со свойствами, близкими к идеальной пластичности, например ряд пластичных смазок [2]. Благодаря практическому отсутствию утечек и независимости сопротивления от скорости течения открывается возможность перед измерениями зафиксировать любое состояние трещины. Кроме того, исключаются заметные искажения контура кромки<sup>1</sup>, что ранее [3] было обнаружено в опытах с пластилином.

Несмотря на очевидные физические различия, довольно близкой по структуре уравнений к рассматриваемой оказывается задача о пластическом слое в наковальных Бриджмена [4]. Однако специфика уравнений гидроразрыва [5, 6] приводит к необходимости их модификации из-за расходимости итерационной схемы.

1. Пусть в упругом пространстве развивается плоская круговая трещина, имеющая к данному моменту радиус  $L$ . Развитие происходит под воздействием заполнителя с пластическими свойствами, нагнетаемого в полость трещины из точечного источника в ее центре. Предполагается, что текучий материал не теряет контакта со стенками трещины, давление  $P(X)$  обращается в нуль на границе  $X = \Gamma$  зоны заполнения ( $X$  – радиальная координата цилиндрической системы координат с началом в центре трещины).

При медленном течении идеально пластического материала в узком канале распределение давления удовлетворяет уравнению [7]

$$dP/dX = -T_0/W \quad (1.1)$$

Применительно к трещине  $W$  – ее полураскрытие на радиусе  $X$ ,  $T_0$  – напряжения трения на стенке. Заметим, что условие идеальной пластичности может не выполняться, но если реология текучего материала и его взаимодействие со стенками полости таковы, что на каждом радиусе, начиная с некоторого, малого по сравнению с  $L$ , сдвиговые напряжения в заполнителе меньше или порядка значения  $T_0(X)$ , то в приближении пограничного слоя уравнение (1.1) непосредственно вытекает из общих уравнений равновесия в напряжениях. При справедливости (1.1) для замкнутости формулируемой далее системы уравнений достаточно задания закона скольжения заполнителя вдоль стенок, в частности, в

<sup>1</sup>Алексеенко О.П. Точные решения некоторых задач механики управляемого разрыва горных пород идеально пластическим флюидом: Автореферат дис. к.ф.-м.н.: 22.05.89. Новосибирск, 1989. 14 с.

используемом ниже виде  $T_0 = \text{const}$ , без детализации пластических свойств текучего материала внутри полости трещины.

Из уравнения вытекает оценочное соотношение

$$P_* \Gamma \approx T_0 / W_* \quad (1.2)$$

для характерных значений  $P_*$ ,  $W_*$  давления и раскрытия соответственно. Согласно этой оценке, в случае, когда заполнитель проникает в трещину на расстояние, соизмеримое с ее радиусом  $L$ , отношение касательных и нормальных напряжений имеет порядок характерной деформации  $W_*/L$ . Это означает, что достаточно рассматривать только трещины нормального разрыва, т.е. пренебречь касательными напряжениями в формулах, определяющих смещения берегов трещины через приложенные к ним граничные силы. В противном случае это было бы эквивалентно учету квадратичных по деформациям поправок в рамках линейной теории упругости.

Раскрытие трещины нормального разрыва выражается через давление на ее берегах формулой Снеддона [8]. В задачах гидроразрыва удобнее пользоваться ее элементарным видоизменением

$$W(X) = -\frac{2}{\pi D} \int_0^\Gamma P'(X_1) \left\{ (L^2 - X^2)^{1/2} - \int_{\max(X, X_1)}^L dX_2 \left( \frac{X_2^2 - X_1^2}{X_2^2 - X^2} \right)^{1/2} \right\} dX_1 \quad (1.3)$$

Здесь  $P'(X)$  – радиальный градиент давления,  $\max(X, X_1)$  – большее из двух чисел в скобках,  $D = \frac{1}{2} E(1 - \nu^2)^{-1}$  – комбинация стандартных упругих констант.

Влияние горного давления  $P_g$  на раскрытие трещины, лежащей в горизонтальной плоскости, учитывается, как обычно [8], путем вычитания из правой части (1.3) величину

$$W_g = 2(\pi D)^{-1} (L^2 - X^2)^{1/2} P_g \quad (1.4)$$

Связь асимптотики раскрытия у края трещины со значением коэффициента интенсивности напряжений  $K$  дается соотношением [8]

$$\lim_{X \rightarrow L} W(X)(L - X)^{-1/2} = (2/\pi)^{1/2} K / D \quad (1.5)$$

Росту трещины соответствует критическое значение  $K = K_0$ , которое считается постоянным.

Замыкает систему уравнений интегральный закон сохранения массы несжимаемого текучего материала

$$\Omega = 4\pi \int_0^\Gamma X W dX \quad (1.6)$$

Здесь  $\Omega$  – объем заполнителя, закачанного в трещину.

2. Сформулированную систему уравнений удобно анализировать в безразмерном виде. Для координат  $X$ ,  $\Gamma$  перейдем от линейных единиц измерения к угловым по формулам  $X = L \sin \varphi$ ,  $\Gamma = L \sin \gamma$ . Для основных параметров трещин введем масштабные множители, обозначив их теми же буквами со звездочками,

$$P_* = (\frac{1}{2} \pi D T_0)^{1/2}, \quad W_* = L \dot{i}_0 / P_*, \quad \Omega_* = 4\pi L^2 W_*, \quad (2.1)$$

$$L_* = \pi (K_0 / (2P_*))^2$$

Формулы перехода к безразмерному виду запишем в форме

$$P = P_* p, \quad P_g = P_* p_g, \quad L = L_* l, \quad \tilde{\Omega} = \Omega_* \omega \quad (2.2)$$

$$W = W_* v \cos \varphi, \quad W_g = W_* v_g \cos \varphi$$

Строчными буквами обозначены безразмерные переменные.

На основании (1.4), (2.1) и (2.2) получим

$$p_g = v_g = (\frac{1}{2} \pi D T_0)^{-\frac{1}{2}} P_g \quad (2.3)$$

Перейдем к формулированию системы уравнений в новых переменных. При помощи (1.1) исключим  $P'$  из уравнения (1.3) и учтем вклад  $W_g$  горного давления  $P_g$  в раскрытие трещины. После перехода к безразмерным величинам и несложных выкладок получим

$$v(\varphi) = -v_g + \int_0^\gamma \frac{A(\varphi, \psi)}{v(\psi)} d\psi, \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad \psi \in [0, \gamma] \quad (2.4)$$

$$A(\varphi, \psi) = 1 - \frac{1}{\cos \varphi} \int_{\max(\varphi, \psi)}^{\pi/2} \left( \frac{\sin^2 \eta - \sin^2 \psi}{\sin^2 \eta - \sin^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \eta d\eta \quad (2.5)$$

Заметим, что аргументы  $\varphi$  и  $\psi$  имеют разные области значений, но если  $\varphi > \gamma$ , то соответствующая часть функции  $v(\varphi)$  просто определяется своими значениями из интервала  $[0, \gamma]$  при помощи формулы (2.4). В частности, при  $\varphi = \pi/2$  имеем

$$v_l = v(\pi/2) = -v_g + \int_0^\gamma \frac{1 - \cos \psi}{v(\psi)} d\psi \quad (2.6)$$

На интервале  $\varphi \in [0, \gamma]$  соотношение (2.4) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно  $v(\varphi)$ , которое собственно и нужно решать. Все остальные параметры трещины выражаются через  $v$ . Действительно, переходя к безразмерным величинам при помощи формул (2.1), (2.2) в соотношениях (1.1), (1.5), (1.6), получим

$$p(\varphi) = \int_\varphi^\gamma \frac{d\psi}{v(\psi)} \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma; \quad l = v_l^{-2}; \quad \omega = \int_0^\gamma v(\psi) \sin \psi \cos^2 \psi d\psi \quad (2.7)$$

Поскольку  $A(\varphi, \psi) > 0$ , можно заметить, что росту трещины соответствует уменьшение  $\gamma$ , причем минимально допустимое значение  $\gamma_g$  степени заполнения достигается в пределе  $l \rightarrow \infty$ , когда  $v_l \rightarrow 0$ . Согласно (2.6), при этом

$$v_g = \int_0^{\gamma_g} \frac{1 - \cos \psi}{v(\psi)} d\psi \quad (2.8)$$

и уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$v(\varphi) = \int_0^{\gamma_g} \frac{A_g(\varphi, \psi)}{v(\psi)} d\psi, \quad A_g(\varphi, \psi) = A(\varphi, \psi) - (1 - \cos \psi) \quad (2.9)$$

3. Перейдем к решению уравнения (2.4). Как отмечалось, трудность связана с расходимостью стандартной итерационной схемы

$$v_{n+1}(\varphi) = -v_g + \int_0^\gamma \frac{A(\varphi, \psi)}{v_n(\psi)} d\psi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

В качестве иллюстрации приведем численный пример для невесомой среды, поскольку в этом случае приближения ограничены. Положим  $v_g = 0$  и выберем для определенности  $\gamma = 1,5$ ,  $v_0 = 1$ . После нескольких первых итераций четные и нечетные приближения практически перестают изменяться, но ложатся на разные кривые,

которые показаны штриховыми линиями на фиг. 1. Точное решение (сплошная линия) лежит между ними.

Для устранения расходимости оказался эффективен следующий прием. Умножим обе части равенства (2.4) на  $v(\varphi)$  и введем обозначение

$$A_0 = v(\varphi) \int_0^{\gamma} \frac{A(\varphi, \psi)}{v(\psi)} d\psi$$

В этих терминах эквивалентное (2.4) уравнение выглядит как квадратное алгебраическое. Его положительный корень равен

$$v = \frac{1}{2}(-v_g + \sqrt{v_g^2 + 4A_0}) \quad (3.1)$$

Как показали расчеты, для (3.1) схема последовательных приближений сходится. В пределе  $l \rightarrow \infty$  эквивалентная форма уравнения (2.9) имеет вид

$$v = G_0^{1/2}, \quad G_0 = v(\varphi) \int_0^{\gamma_g} \frac{A_g(\varphi, \psi)}{v(\psi)} d\psi \quad (3.2)$$

На фиг. 2–4 представлены рассчитанные зависимости от степени заполнения  $\gamma$  безразмерных давления  $p_0$  и раскрытия  $v_0$  в центре, радиуса  $l$  трещины и объема  $\omega$  текучего материала. Кривые 1–4 соответствуют значениям  $v_g = 0$  (случай невесомой среды),  $v_g = 0,2463$ ;  $v_g = 0,4424$ ;  $v_g = 1,023$ . Штрихпунктирная линия огибает область существования решения. Видно, что с ростом параметра  $v_g$  минимально допустимое значение степени заполнения  $\gamma$  увеличивается, стремясь в пределе к  $\pi/2$ . Это означает, что при большой величине внешней нагрузки  $P_g$  наиболее типична ситуация полного проникания заполнителя в трещину ( $\gamma = \pi/2$ ). Как видно из фиг. 2, давление в центре трещины при ее неограниченном росте не убывает до нуля, как в плоском случае [5], а стремится к конечному пределу, который тем больше, чем выше величина внешней нагрузки.

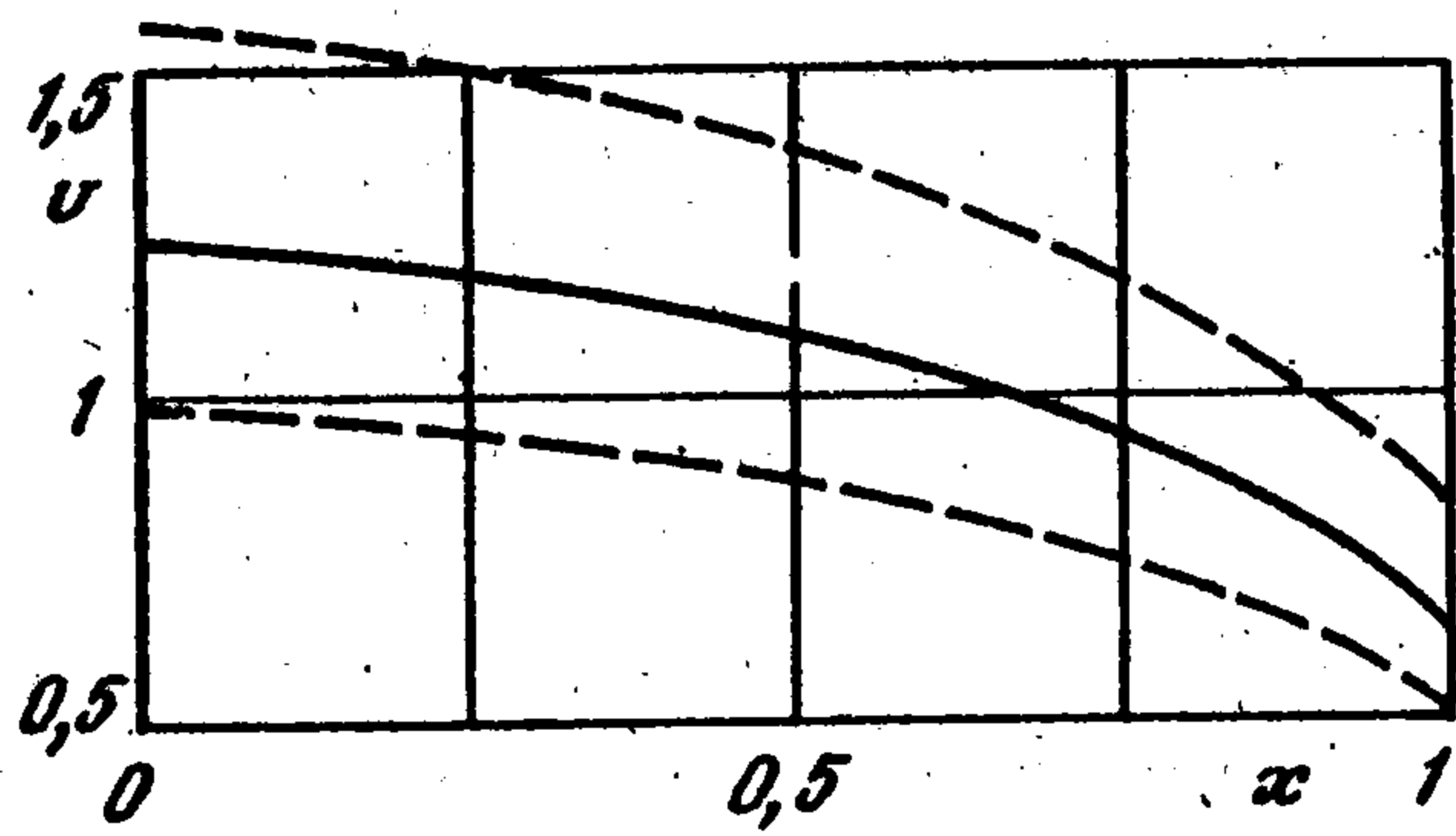
На фиг. 5 изображены профили давления  $p$  и раскрытия  $v \cos \varphi$  трещины при  $v_g = 0,4424$  и разных значениях  $\gamma$ . Зависимости давления  $p_0$  в центре от радиуса  $l$  трещины представлены на фиг. 6. Кривые 1–4 соответствуют тем же значениям  $v_g$ , что и на фиг. 2–4. Штрихпунктиром проведена кривая  $p_0 = p_0(\gamma, v_g)$  при  $\gamma = \pi/2$ . Видно, что с момента начала отставания заполнителя от кромки при дальнейшем росте трещины давление в ней мало меняется, и это изменение тем меньше, чем больше величина внешней нагрузки.

Состояние трещины в каждый момент определяется парой параметров  $(\gamma, v_g)$ . На практике удобнее задавать внешние параметры типа  $P_g$  и  $\Omega$ . Переход от  $(\gamma, v_g)$  к  $(P_g, \Omega)$  задается формулой (2.3) и выражением

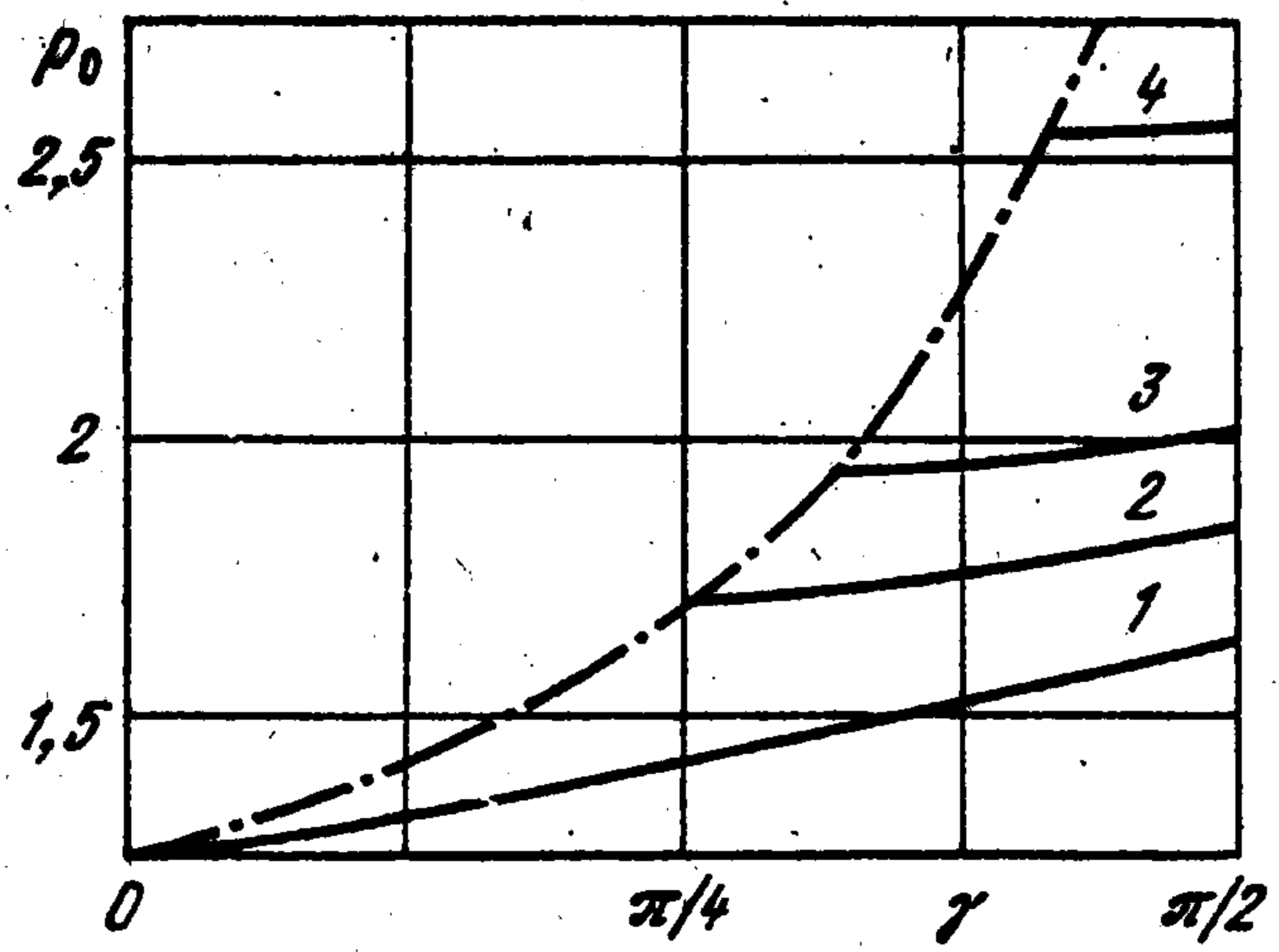
$$\omega l^3 = \Omega P_* / (4\pi L_*^3 T_0) \quad (3.3)$$

полученным при помощи (2.1), (2.2). Правые части формул (2.3), (3.3) зависят только от  $P_g$ ,  $\Omega$  и констант задачи, а левые – только от параметров  $\gamma$  и  $v_g$ . Соответствующие значения  $v$ ,  $p$ ,  $l$  находятся после определения  $\gamma$  и  $v_g$  из (2.3) и (3.3), а затем по (2.1), (2.2) определяются размерные параметры и переменные.

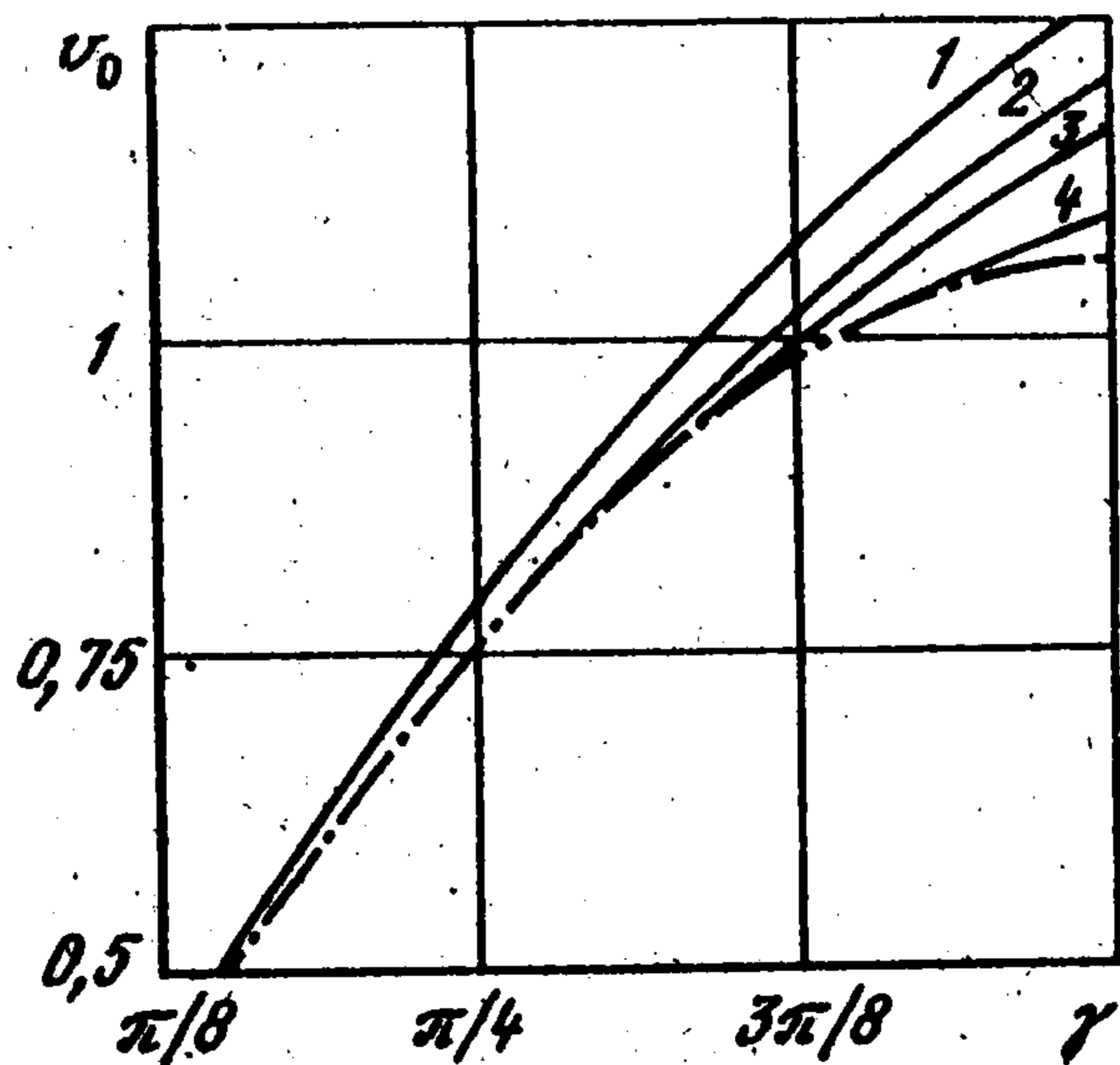
4. Полученные результаты обобщаются на случай полного проникания заполнителя в трещину и на задачу о трещине с фиксированным радиусом. Заметим, что в первом случае на кромке трещины устанавливается, вообще говоря, конечное давление  $P(L)$ , которое соответствует заданной нагрузке  $P_g$  на бесконечности и объему  $\Omega$  заполнителя в трещине. Вместо  $\Omega$  при решении задачи в качестве формального определяющего параметра удобнее выбрать  $P(L)$ . Строго говоря, под  $P(L)$  понимается не истинная величина давления на кромке, а то значение, которое получается при решении, основанном на приближении (1.1). В



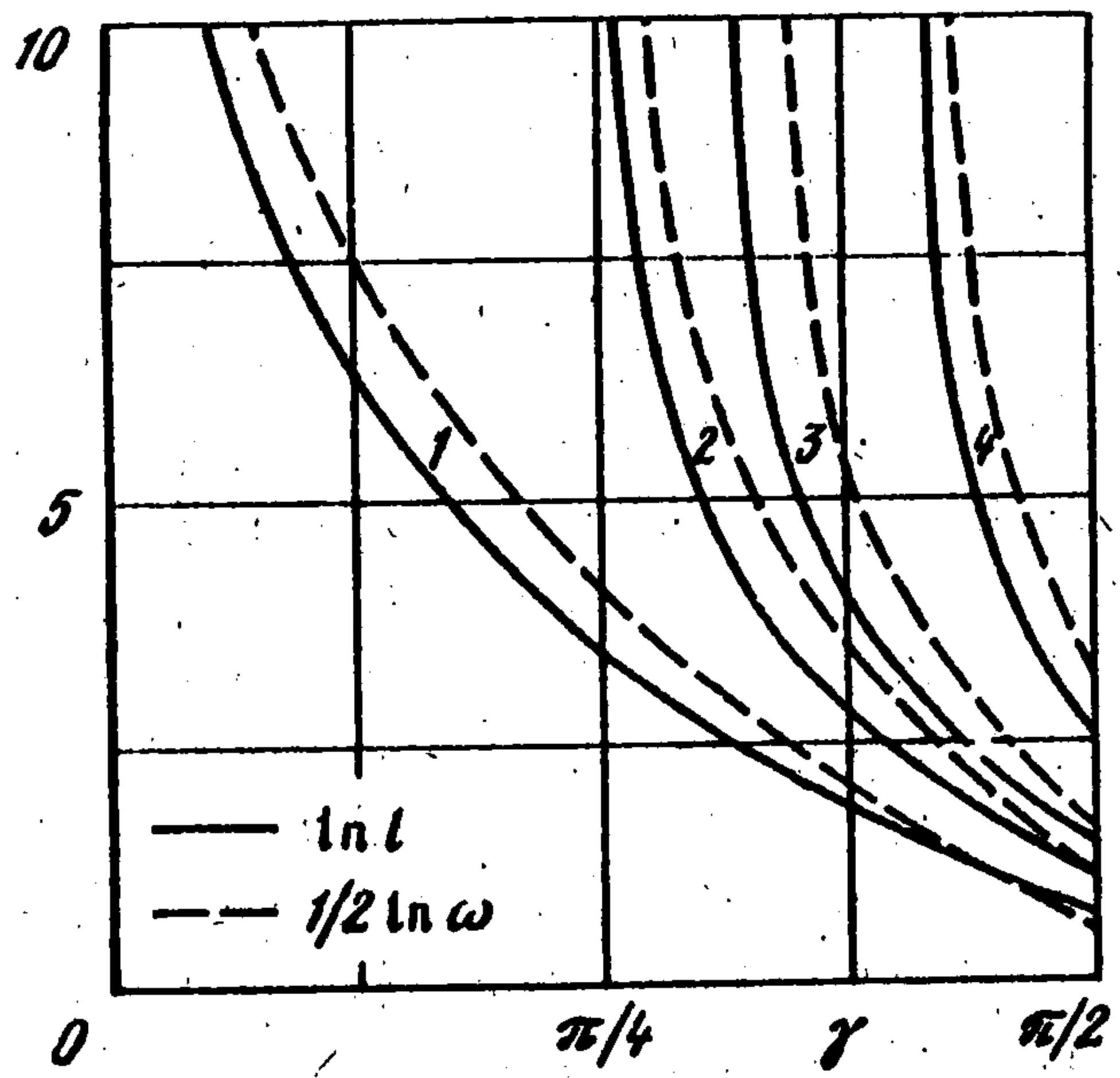
Фиг. 1



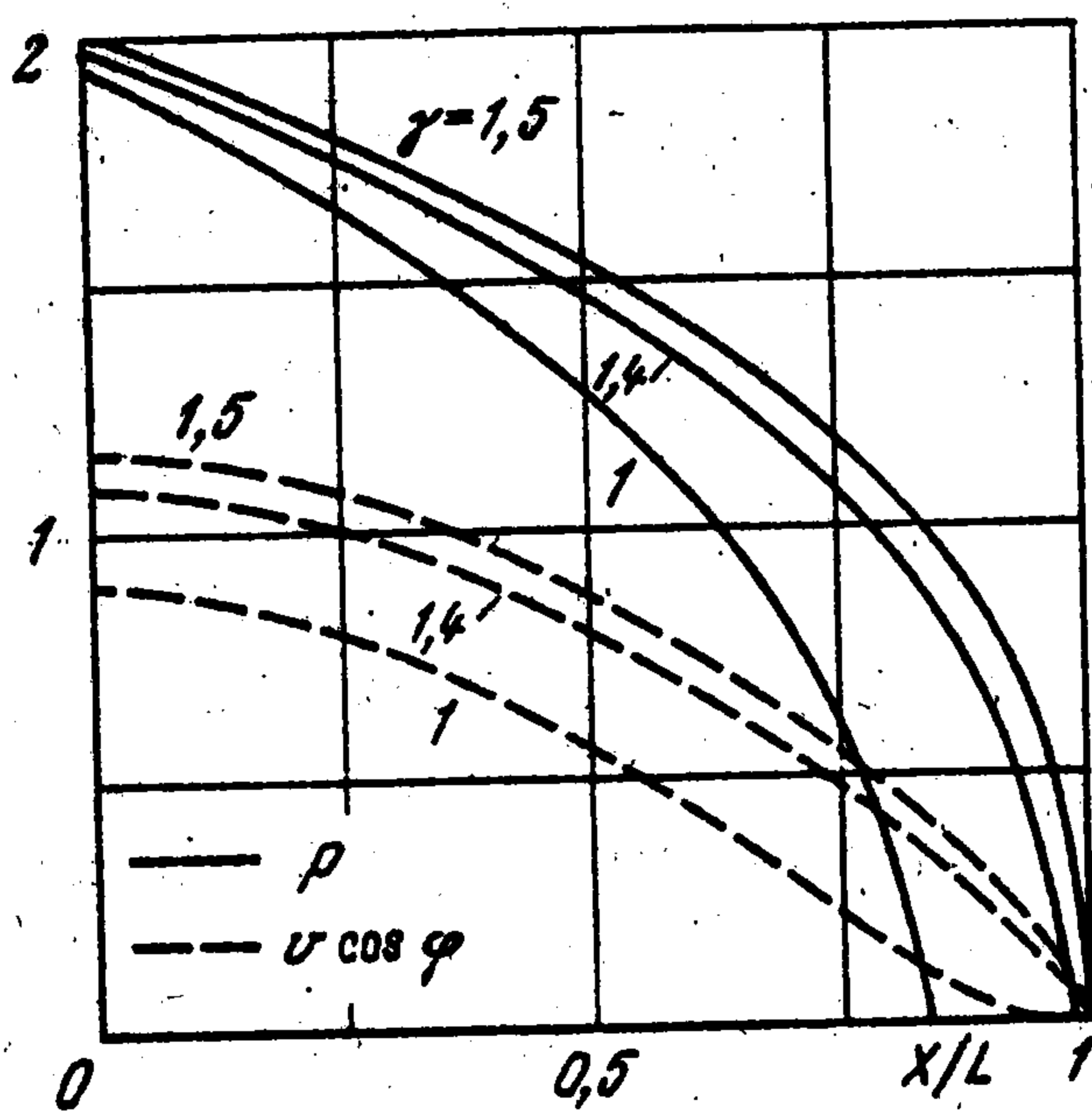
Фиг. 2



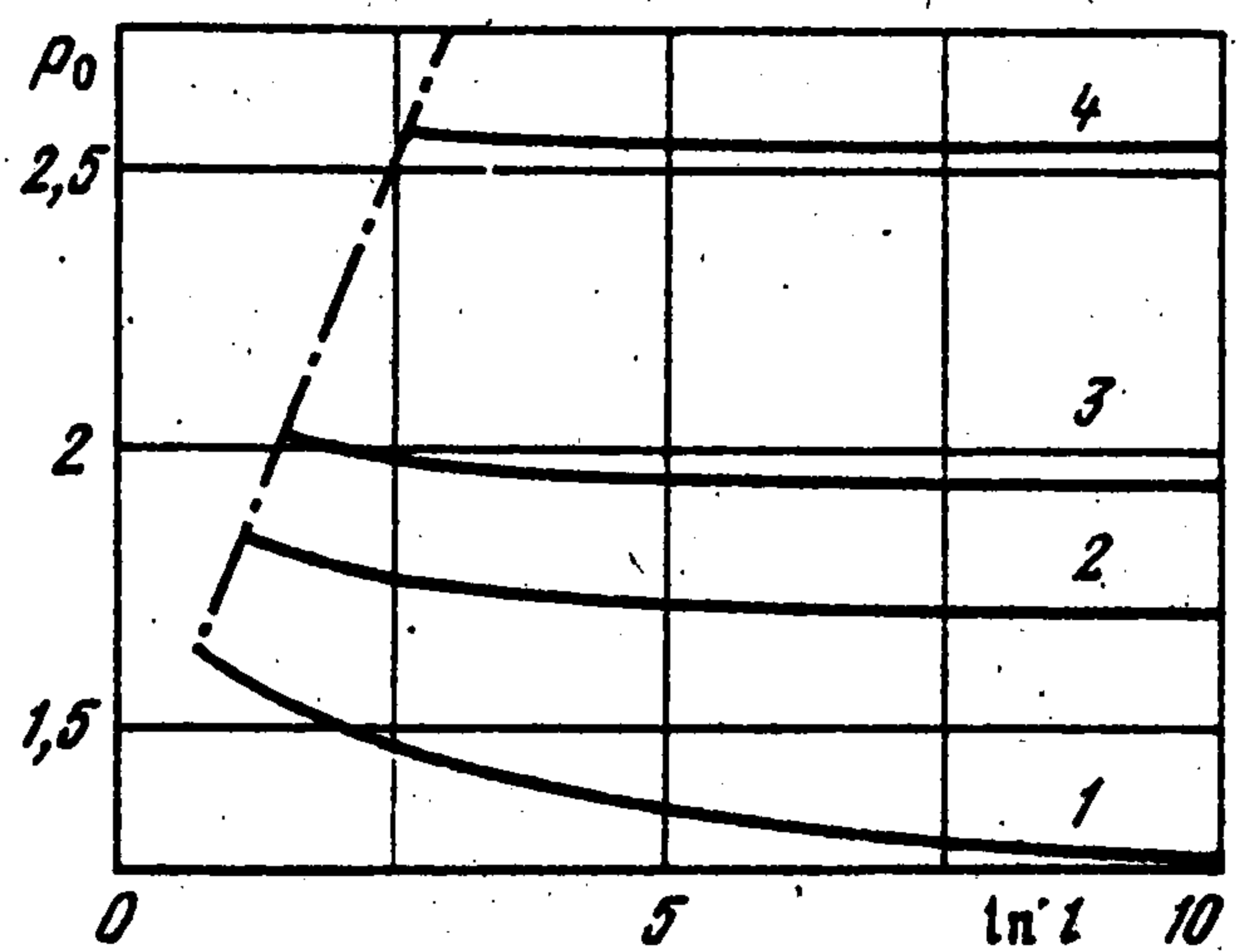
Фиг. 3



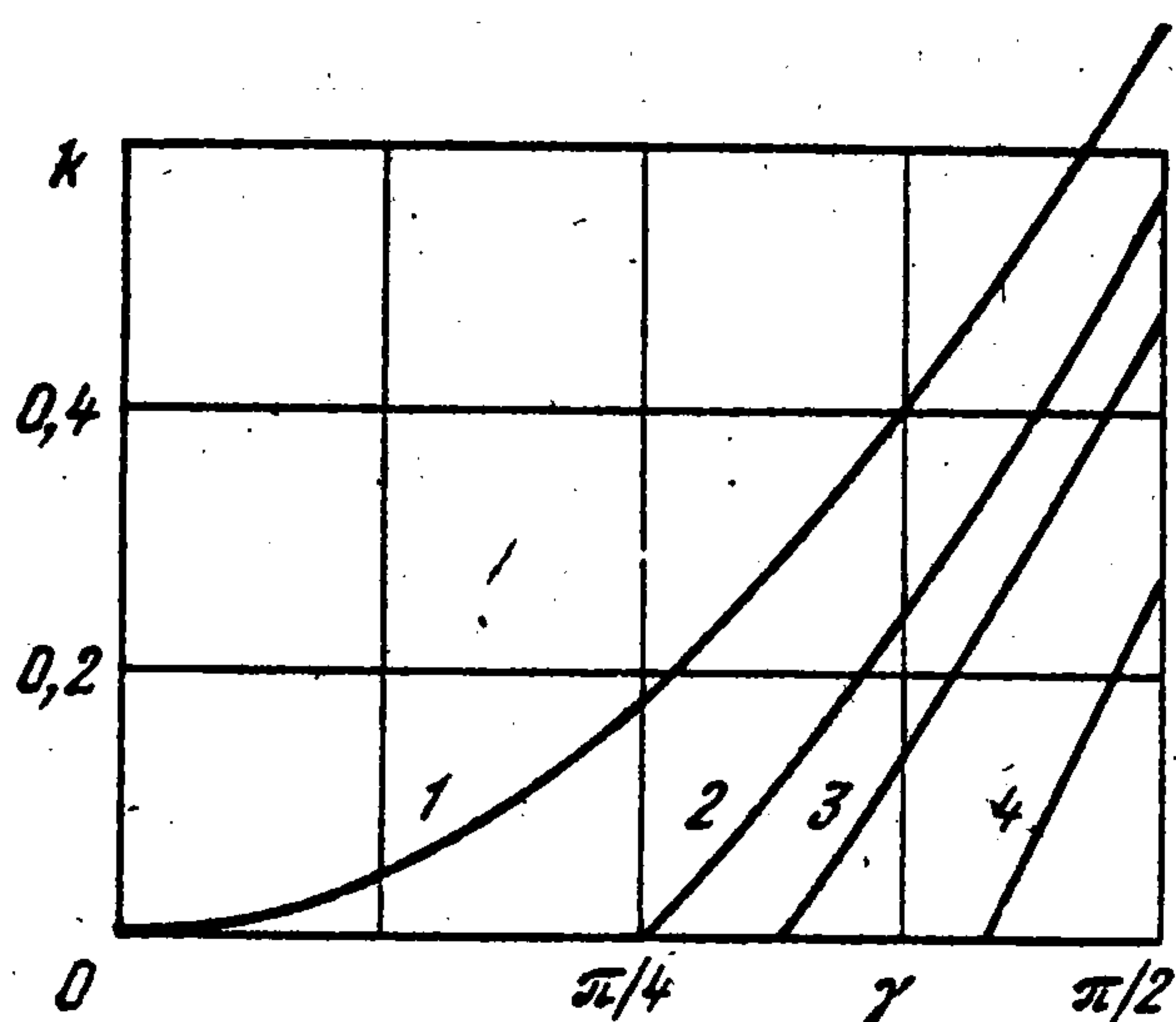
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

данной задаче такой подход, казалось бы, нуждается в уточнении, при котором может существенно измениться давление в малой окрестности, примыкающей к кромке, где (1.1) не выполняется. Но само по себе давление на кромке особого интереса не представляет. В соответствии с формулой Снеддона раскрытие трещины определяется интегрально, т.е. всей кривой давления. Можно показать, что в долях радиуса трещины размер рассматриваемой области у кромки порядка квадрата характерных деформаций в упругой среде. Поэтому оставаясь в рамках линейной теории упругости не имеет смысла уточнять изменения в давлении на столь малых масштабах, так что

ниже эти поправки не учитываются.

Рассмотрение задачи сводится к предыдущему случаю при помощи следующего приема. Представим себе, что исследуемое деформированное состояние упругой среды получено в два этапа. На первом этапе заполнение трещины проведено при уменьшенной вертикальной нагрузке на бесконечности, равной  $P_g - P(L)$ . В таком случае нагрузка на берегах трещины стремится к нулю при приближении к кромке и можно применять формулы разд. 2, положив  $\gamma = \pi/2$ . На втором этапе на бесконечности и на берегах трещины добавляется нормальная отрицательная нагрузка величины  $P(L)$ , так что деформации на втором этапе однородны, и не вызывают смещений на разрезе. Это существенно в силу нелинейности интегрального уравнения, определяющего раскрытие. Полученное таким образом результирующее состояние среды и трещины будет соответствовать заданным значениям определяющих параметров  $P_g$  и  $P(L)$ .

Перейдем обычным образом к безразмерному давлению на кромке и обозначим его  $p_l = p(\pi/2)$ . Можно показать, что при  $p_l > 0$  интегральное уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$v(\varphi) = -(p_g - p_l) + \int_0^{\pi/2} \frac{A(\varphi, \psi)}{v(\psi)} d\psi$$

т.е. сводится к частному случаю (2.4), когда  $\gamma = \pi/2$ ,  $v_g \rightarrow p_g - p_l$ , и зависит только от одного параметра  $p_g - p_l$ . В то же время распределение  $p(\varphi)$  полного давления на трещине определяется, как и должно быть, двумя параметрами, например,  $p_g$  и  $p_l$ . Это распределение и, в частности, значение  $p_0$  давления в центре рассчитывается по формуле, обобщающей первое соотношение (2.7):

$$p(\varphi) = p_l + \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{d\psi}{v(\psi)}$$

Все изложение выше велось в предположении  $K_0 = \text{const}$ . Однако основное безразмерное уравнение (2.4) не содержит информации ни о размере  $L$  трещины, ни о величине коэффициента интенсивности напряжений  $K$ . Это позволяет применять уравнение и в случае, когда, например,  $K_0$  зависит от скорости движения кромки [9]. Действительно, задача решается в любой момент при любом заданном значении  $K_0$ . В частности, определяется в каждый момент размер трещины, а значит, и скорость кромки. Согласование же значения  $K_0$  и скорости кромки сводится к чисто алгебраической задаче.

Уравнение (2.4) применимо и в случае, когда трещина находится в докритическом состоянии с фиксированным радиусом. Разница заключается лишь в

том, что при переходе к размерным величинам в соответствующих формулах переменной величиной будет не  $L$ , а  $K$ . Вместо  $L_*$  и  $l$  вводятся величины  $K_*$  и  $k$  по формулам

$$K = K_* k, \quad K_* = \sqrt{2LDT_0}$$

При помощи (1.5) и формул перехода к безразмерным величинам получим, что  $k = v_l$ . На фиг. 7 представлена зависимость параметра  $k$ , характеризующего концентрацию напряжений у края трещины, от степени ее заполнения  $\gamma$ . Кривые 1–4 соответствуют тем же значениям  $v_g$ , что и на фиг. 2–6. Пересечение каждой из кривых с осью абсцисс свидетельствует, что для меньших значений  $\gamma$  трещина раскрыта не полностью, т.е. имеет место плавное смыкание берегов на радиусе, меньшем размера трещины.

Авторы благодарят Т.С. Хришкову за помощь в расчетах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
2. Фройштетер Г.Б., Трилюский К.К., Ищук Ю.Л., Ступак П.М. Реологические и теплофизические свойства пластичных смазок. М.: Химия, 1980, 175 с.
3. Кю Н.Г., Чернов О.И., Черемных Г.В., Шабалин И.В., Шепелев Л.Н. Способ контроля размеров трещины в образце: А.с. № 1298537 // БИ. 1987. № 11. С. 169.
4. Перлин П.И. К определению градуировочной кривой в наковальнях Бриджмена // ПМТФ. 1972. № 3. С. 188–192.
5. Алексеенко О.П. К расчету характеристик флюидоразрыва труднообрушаемой кровли пластическим материалом // Вопросы горного давления. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1987. Вып. 45. С. 72–79.
6. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Флюидоразрыв пластины при нагнетании пластического материала // Физико-техн. пробл. разработки полез. ископаемых. 1988. № 5. С. 117–122.
7. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
8. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
9. Кобаяси Т., Дэлли Д. Зависимость между скоростью трещины и коэффициентом интенсивности напряжений в полимерах с двойным лучепреломлением // Механика разрушения. Быстрое разрушение, остановка трещин. М.: Мир, 1981. С. 101–119.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
8.IX.1992