УДК 539.375

© 1993 г. П.В. Мартыненко, А.И. Соловьев

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ И ВНЕШНЕЙ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

На основании соотношений между базисными решениями уравнения Лапласа в тороидальных и сферических координатах метод Фурье применен к решению задачи о равновесии упругого пространства, ослабленного двумя сферическими полостями и внешней круговой трещиной. Реализация предлагаемого подхода приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами. Разложением по малому параметру получена асимптотическая формула для коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

1. Пусть α, β, φ; α, σ, φ; r, θ, φ; $r_1, \theta_1, \varphi_1, \rho, z, \varphi$; ρ_1, z_1, φ_1 – тороидальные, сфе-рические и цилиндрические координаты, определяемые формулами [1–3]

$$x = ah_\beta^{-2}\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi,\quad y = ah_\beta^{-2}\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi,\quad z = ah_\beta^{-2}\sin\beta$$

$$x = ah_\sigma^{-2}\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi,\quad y = ah_\sigma^{-2}\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi,\quad z = ah_\sigma^{-2}\sin\sigma$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta$$

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z$$

$$x_1 = x,\quad y_1 = y,\quad z_1 = z - h$$

$$\rho_1 = \rho,\quad z_1 = z - h;\quad \rho_1 = r_1\sin\theta_1,\quad z_1 = r_1\cos\theta_1$$

$$(a > 0,\ h \geqslant 0;\ 0 \leqslant \alpha, \rho, \rho_1, r, r_1 < \infty;\ -\infty < z, z_1 < \infty,\ -\pi \leqslant \beta, \sigma \leqslant \pi,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant \theta, \theta_1 \leqslant \pi,$$

$$h_\beta = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta},\quad h_\sigma = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \cos\sigma}$$

Уравнения равновесия в случае однородного изотропного упругого тела приводятся к векторному уравнению Ламе

$$\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор упругих перемещений, ν – коэффициент Пуассона.

Соотношения между базисными решениями уравнения (1.1) в сферических и тороидальных координатах можно получить из следующих равенств, связывающих базисные решения уравнения Лапласа в этих координатах (множитель $e^{im\varphi}$ в обеих частях каждого равенства опущен):

$$\left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta_1) = h_\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_n^{(m)}(\tau) e^{\tau\sigma} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \tag{1.2}$$

$$\left(-\pi-2\operatorname{arctg}\frac{h}{a}<\sigma<\pi-2\operatorname{arctg}\frac{h}{a}\right)$$

$$h_\beta e^{-\tau\beta}P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(m)}(\tau)\left(\frac{r_1}{a}\right)^{n+m}P^m_{n+m}(\cos\theta_1) \tag{1.3}$$

$$(r_1<\sqrt{a^2+h^2})$$

$$\left(\frac{r_1}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta_1)=h_\beta\int_{-\infty}^{\infty}a_n^{(m)}(\tau)e^{\tau\beta}P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)d\tau(|\beta|<\pi) \tag{1.4}$$

$$h_\sigma e^{-\tau\sigma}P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{(m)}(\tau)\left(\frac{a}{r_1}\right)^{n+m+1}P^m_{n+m}(\cos\theta_1) \tag{1.5}$$

$$(r_1>\sqrt{a^2+h^2})$$

Здесь

$$a_n^{(m)}(\tau)=(-i)^{n-m}\frac{2^{m-1/2}(n+m)!}{(2m)!(n-m)!}(1-i\varepsilon)^{n-m}\frac{F(m-n,1/2-i\tau+m;2m+1;\gamma)}{\operatorname{ch}\pi\tau}$$

$$b_n^{(m)}(\tau)=\frac{a_n^{(m)}(\tau)}{(1+\varepsilon^2)^{n+1/2}}e^{2\tau\operatorname{arctg}\varepsilon},\quad c_n^{(m)}(\tau)=\frac{d_n^{(m)}(\tau)}{(1+\varepsilon^2)^{n+m+1/2}}e^{-2\tau\operatorname{arctg}\varepsilon},$$

$$d_n^{(m)}(\tau)=\frac{(-1)^m(-i)^n2^{m+1/2}}{(2m)!}\frac{\Gamma(1/2+i\tau+m)}{\Gamma(1/2+i\tau-m)}(1-i\varepsilon)^nF(-n,1/2+i\tau+m;2m+1;\gamma)$$

$$F(-n,a;c;z)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(a)_m(-n)_m}{(c)_m m!}z^m,\quad \varepsilon=\frac{h}{a},$$

$$(\alpha)_m=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1),\quad \gamma=\frac{2}{1-i\varepsilon}$$

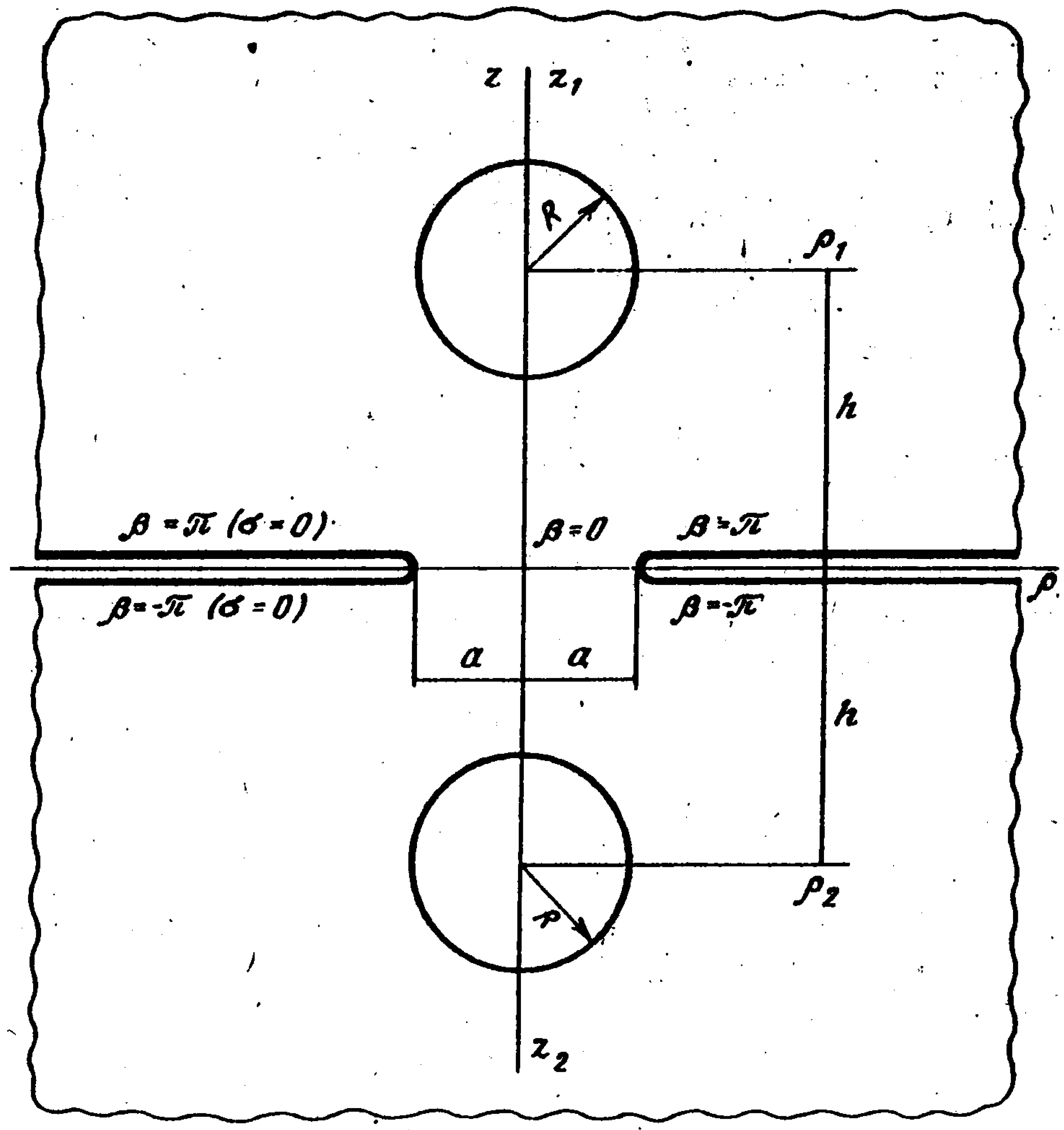
$P_n^m(x)$ – присоединенные многочлены Лежандра, $P_\nu^m(z)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $F(-n, a; c; z)$ – гипергеометрический многочлен относительно z, $(\alpha)_m$ – символ Похгаммера [3, 4].

Методика получения разложений типа (1.2)–(1.5) и их применения к решению скалярных и векторных краевых задач теории упругости известна [5–7]. Сами разложения (1.2)–(1.5) при $m = 1$ позволяют исследовать ряд задач о кручении: а) тела $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$, ослабленного шаровой полостью $0 \leqslant r_1 \leqslant R$ или несколькими непересекающимися шаровыми полостями с центрами на оси z; б) шара $0 \leqslant r_1 \leqslant R$ с полостью $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$.

2. Пусть $\rho_2, z_2, \varphi_2; r_2, \theta_2, \varphi_2$ – цилиндрические и сферические координаты, определяемые равенствами

$$\rho_2=r_2\sin\theta_2,\quad z_2=r_2\cos\theta_2;\quad \rho_2=\rho_1,\quad z_2=-z_1-2h=-z-h$$

Рассмотрим задачу о равновесии упругого пространства, ослабленного двумя симметричными относительно плоскости $z = 0$ сферическими полостями $0 \leqslant r_1 \leqslant R$, $0 \leqslant r_2 \leqslant R$ и внешней круговой трещиной (разрезом) $\beta = \pm\pi$ (фигура). Ограничимся случаем, когда берега трещины свободны от внешних усилий и не контактируют друг с другом, а поверхности полостей находятся под воздействием гидростатического давления интенсивности $\sigma_0 > 0$.



Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\sigma_{r1}\big|_{r_1=R} = \sigma_{r2}\big|_{r_2=R} = -\sigma_0 \tag{2.1}$$

$$\tau_{r\theta 1}\big|_{r_1=R} = \tau_{r\theta 2}\big|_{r_2=R} = 0; \quad \sigma_z\big|_{\beta=\pm\pi} = 0, \quad \tau_{\rho z}\big|_{\beta=\pm\pi} = 0 \tag{2.2}$$

(σ_{rj}, $\tau_{r\theta j}$, σ_z, $\tau_{\rho z}$ – компоненты тензора напряжений в сферических и цилиндрических координатах).

Общее решение векторного уравнения (1.1) представим в форме

$$\mathbf{u} = (\kappa \mathbf{e}_z - z\,\mathrm{grad})\Phi + (\kappa \mathbf{e}_{z1} - z_1\,\mathrm{grad})F_1 + (\kappa \mathbf{e}_{z2} - z_2\,\mathrm{grad})F_2 - \mathrm{grad}(\varphi + f + \psi) \tag{2.3}$$

$$\Phi = h_\beta \int_0^\infty A(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{sh}\,\tau\beta\,\mathrm{d}\tau, \qquad \frac{\partial\varphi}{fz} = (1-2\nu)\Phi$$

$$F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)B_n^{(1)} r_1^{-n} P_{n-1}(\cos\theta_1), \quad F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)B_n^{(1)} r_2^{-n} P_{n-1}(\cos\theta_2)$$

$$f = -\sum_{n=1}^{\infty} (n+3-4\nu)B_n^{(1)} [r_1^{-(n-1)} P_{n-2}(\cos\theta_1) + r_2^{-(n-1)} P_{n-2}(\cos\theta_2)]$$

$$\psi = -\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)} [r_1^{-n-1} P_n(\cos\theta_1) + r_2^{-n-1} P_n(\cos\theta_2)]$$

($z_1 = z - h$, $z_2 = -z - h$; $\kappa = 3 - 4\nu$, $\mathbf{e}_{z1}$, $\mathbf{e}_{z2}$, $\mathbf{e}_z$ – орты соответствующих координатных систем), обеспечивающей тождественное выполнение условия (2.2).

Удовлетворяя граничным условиям (2.1) при помощи формул разложения

$$r_1^{-n} P_{n-1}(\cos\theta_1) = a^{-n} h_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} b_{n-1}^{(0)}(\tau) e^{\tau\sigma} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha) d\tau$$

$$h_\beta P_{-\frac12+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\tau\beta=-\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n(\tau)\,a^n\,r_1^{-n}P_n(\cos\theta_1)$$

$$r_2^{-n-1}P_n(\cos\theta_2)=(2h)^{-n-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{(n+k)!}{n!k!}(2h)^{-k}r_1^kP_k(\cos\theta_1)\ (r_1<2h)$$

$$\bar{c}_n(\tau)=\tfrac12[c_n^{(0)}(\tau)-c_n^{(0)}(-\tau)]$$

вытекающих из соотношений (1.2), (1.3), и равенства [8]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{k!}t^kP_k(x)=w^{-a/2}F\left(a,1-a;1;\tfrac12-\frac{1-tx}{2\sqrt{w}}\right)\quad(w=1-2tx+t^2)$$

при $a=n+1,\ t=-r_1/(2h),\ x=\cos\theta_1$, после ряда преобразований находим следующую систему связей между плотностью интегралов $A(\tau)$ и коэффициентами $B_n^{(1)},\ B_n^{(2)}$:

$$B_1^{(1)}=0$$

$$A(\tau)=-\sum_{n=2}^{\infty}B_n^{(1)}a^{-n}(n^2-2n-1+2\nu)\frac{\bar{b}_{n-1}(\tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau}-\sum_{n=2}^{\infty}n(2n-1)B_n^{(1)}ha^{-n-1}\frac{\bar{b}_n(\tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)B_n^{(2)}a^{-n-2}\frac{\bar{b}_{n+1}(\tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau}$$

$$B_0^{(2)}R^{-3}=\frac{1+\nu}{3}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(2n-1)(2h)^{-n-1}B_n^{(1)}+\frac{1+\nu}{3}a^{-1}q_1-\frac{\sigma_0}{4G}$$

$$-B_k^{(1)}R^{-k}k(k^2+3k-2\nu)+B_k^{(2)}R^{-k-2}(k+1)(k+2)=$$
$$=-\sum_{n=2}^{\infty}B_n^{(1)}(-1)^{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\frac{2n-1}{2k+3}(k^2-k-2-2\nu)\frac{R^{k-1}}{(2h)^{r+k-1}}-$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}B_n^{(1)}(-1)^{n+k-1}\frac{(n+k-1)!(k-1)}{(n-1)!(k-1)!}\frac{2nk-n-k+4-4\nu}{2k-1}\frac{R^{k+1}}{(2h)^{n+k+1}}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(2)}(-1)^{n+k}\frac{(n+k)!(k-1)}{n!(k-1)!}\frac{R^{k-1}}{(2h)^{n+k+1}}-k(k-1)\frac{h}{a}\left(\frac{R}{a}\right)^{k-1}q_k-$$
$$-\frac{k+1}{2k+3}(k^2-k-2-2\nu)\left(\frac{R}{a}\right)^{k+1}q_{k+1}-\frac{k-1}{2k-1}(k^2-2k-1+2\nu)\left(\frac{R}{a}\right)^{k-1}q_{k-1}\ ,$$

$$B_k^{(1)}R^{-k}k(k^2-2+2\nu)-B_k^{(2)}R^{-k-2}k(k+2)=$$
$$=-\sum_{n=2}^{\infty}B_n^{(1)}(-1)^{n+k}\frac{(n+k)!k}{(n-1)!(k+1)!}\frac{2n-1}{2k+3}(k^2+2k-1+2\nu)\frac{R^{k+1}}{(2h)^{n+k+1}}-$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}B_n^{(1)}(-1)^{n+k-1}\frac{(n+k-1)!(k-1)}{(n-1)!(k-1)!}\frac{2nk-n-k+4-4\nu}{2k-1}\frac{R^{k-1}}{(2h)^{n+k-1}}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(2)}(-1)^{n+k}\frac{(n+k)!(k-1)}{n!(k-1)!}\frac{R^{k-1}}{(2h)^{n+k+1}}-k(k-1)\frac{h}{a}\left(\frac{R}{a}\right)^{k-1}q_k-$$
$$-\frac{k}{2k+3}(k^2+2k-1+2\nu)\left(\frac{R}{a}\right)^{k+1}q_{k+1}-\frac{k-1}{2k-1}(k^2-2k-1+2\nu)\left(\frac{R}{a}\right)^{k-1}q_{k-1}$$

$(k=1,2,\ldots)$

$$q_s = \int_0^\infty A(\tau)\bar{c}_s(\tau)d\tau, \quad \bar{b}_s(\tau) = 2[b_s^{(0)}(\tau) - b_s^{(0)}(-\tau)]$$

Исключая теперь функцию $A(\tau)$ и полагая

$$\frac{\sigma_0}{4G}\frac{1}{k}R^{k+1}b_k^{(1)} = B_k^{(1)} \quad (k=2,3\ldots), \qquad \frac{\sigma_0}{4G}\frac{2k-1}{2k+1}R^{k+3}b_k^{(2)} = B_k^{(2)} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$\omega_k = \frac{2(k^2+2k\nu+k+1+\nu)}{(k+2)(2k-1)(2k+3)}, \qquad \beta_{nk}^{(0)} = \frac{(-1)^{n+k+1}(n+k)!(2n-1)}{2^{n+k+1}n!(k+1)!}$$

$$\Delta_k = k^2 - 2k\nu + k + 1 - \nu, \quad \alpha_{nk}^{(0)} = \frac{(-1)^{n+k}(n+k)!}{2^{n+k+2}\Delta_k n!(k-1)!}, \quad \alpha_k^{(1)} = \frac{k(k^2-1)}{2\Delta_k}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \frac{k(k-1)(2k+1)}{2\Delta_k}, \quad \alpha_k^{(3)} = \frac{(k-1)(2k+1)}{2\Delta_k(2k-1)}(k^2-2k-1+2\nu)$$

$$\beta_{nk}^{(1)} = (2n-1)(k-1), \quad \beta_{nk}^{(2)} = \frac{2n-1}{2n+1}(2k+1)(k-1)$$

$$\gamma_{nk}^{(1)} = \frac{4(2k+1)(k-1)}{(n+k)(2k-1)}(2nk-n-k+4-4\nu), \quad \gamma_n = \frac{n^2-2n-1+2\nu}{n}$$

$$\delta_n = \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+1}, \quad \lambda = \frac{R}{h}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $b_k^{(1)}$ и $b_k^{(2)}$

$$b_k^{(1)} = \sum_{n=2}^\infty D_{kn}^{(11)}b_n^{(1)} + \sum_{n=0}^\infty D_{kn}^{(12)}b_n^{(2)} \quad (k=2,3,\ldots) \tag{2.4}$$

$$b_k^{(2)} = \sum_{n=2}^\infty D_{kn}^{(21)}b_n^{(1)} + \sum_{n=0}^\infty D_{kn}^{(22)}b_n^{(2)} + f_k^{(2)} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$f_0^{(2)} = 1, \quad f_k^{(2)} = 0 \quad (k=1,2,\ldots)$$

$$D_{0n}^{(21)} = \frac{1+\nu}{3}[(-1)^{n+1}(2n-1)2^{-n-1} + \gamma_n\varepsilon^{n+1}J_{n-11} + (2n-1)\varepsilon^{n+2}J_{n1}]\lambda^{n+1} \tag{2.5}$$

$$D_{0n}^{(22)} = \frac{1+\nu}{3}\delta_n\varepsilon^{n+3}J_{n+11}\lambda^{n+3}$$

$$D_{kn}^{(11)} = \{\alpha_{nk}^{(0)}\beta_{nk}^{(1)} - \alpha_k^{(1)}\varepsilon^{n+k+1}[\gamma_n J_{n-1k+1} + (2n-1)\varepsilon J_{nk+1}]\}\lambda^{n+k+1} -$$
$$-\{\alpha_{nk}^{(0)}\gamma_{nk}^{(1)} + \alpha_k^{(2)}\varepsilon^{n+k}[\gamma_n J_{n-1k} + (2n-1)\varepsilon J_{nk}] +$$
$$+\alpha_k^{(3)}\varepsilon^{n+k-1}[\gamma_k J_{n-1k-1} + (2n-1)\varepsilon J_{nk-1}]\}\lambda^{n+k-1}$$

$$D_{kn}^{(12)} = (\alpha_{nk}^{(0)}\beta_{nk}^{(2)} - \alpha_k^{(2)}\varepsilon^{n+k+2}\delta_n J_{n+1k} - \alpha_k^{(3)}\varepsilon^{n+k+1}\delta_n J_{n+1k-1})\lambda^{n+k+1} -$$
$$-\alpha_k^{(1)}\varepsilon^{n+k+3}\delta_n J_{n+1k+1}\lambda^{n+k+3}$$

$$D_{kn}^{(21)} = D_{kn}^{(11)} - [\beta_{nk}^{(0)} + \gamma_n\varepsilon^{n+k+1}J_{n-1k+1} + (2n-1)\varepsilon^{n+k+2}J_{nk+1}]\omega_k\lambda^{n+k+1}$$

$$D_{kn}^{(22)} = D_{kn}^{(12)} - \omega_k\delta_n\varepsilon^{n+k+3}J_{n+1k+1}\lambda^{n+k+3}$$

$$J_{mk} = \int_0^\infty \frac{\bar{b}_m(\tau)\bar{c}_k(\tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau}d\tau = \tfrac{1}{2}J_{mk}^{(1)} - \tfrac{1}{2}J_{mk}^{(2)}$$

$$J_{mk}^{(1)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_m^{(0)}(-\tau)c_k^{(0)}(\tau)}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}d\tau,\qquad J_{mk}^{(2)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c_m^{(0)}(\tau)c_k^{(0)}(\tau)}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}d\tau$$

Учитывая, что [4, 9]

$$F(-n;\tfrac{1}{2}-i\tau;1;\gamma)=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-n)_s\Gamma(\tfrac{1}{2}-i\tau+s)}{(s!)^2\Gamma(\tfrac{1}{2}-i\tau)}\gamma^s,\qquad \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}=\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\tfrac{1}{2}-i\tau)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\tfrac{1}{2}-i\tau)\Gamma(\tfrac{1}{2}-i\tau+j)\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\tau+l)d\tau=2\pi\frac{j!l!}{j+l+1}$$

величины $J_{mk}^{(1)}$ перепишем в виде

$$J_{mk}^{(1)}=\frac{4}{\pi}(-i)^{m+k}\frac{(1-i\varepsilon)^{m+k}}{(1+\varepsilon^2)^{m+k+1}}\Sigma_{mk}$$

$$\Sigma_{mk}=\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\gamma^j}{j!}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-k)_l\gamma^l}{l!(j+l+1)},\qquad \gamma=\frac{2}{1-i\varepsilon}$$

Поскольку

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{(-n)_s(\gamma x)^s}{s!}=(1-\gamma x)^n$$

то

$$\Sigma_{mk}=\int\limits_0^1(1-\gamma x)^{m+k}dx=\frac{1-(1-\gamma)^{m+k+1}}{\gamma(m+k+1)}$$

и следовательно

$$J_{mk}^{(1)}=\frac{2}{\pi}i(-1)^{m+k+1}\frac{(\varepsilon+i)^{m+k+1}-(\varepsilon-i)^{m+k+1}}{(m+k+1)(1+\varepsilon^2)^{m+k+1}}=$$

$$=\frac{4}{\pi}(-1)^{m+k}\sum_{j=0}^{m+k+1}C_{m+k+1}^j\varepsilon^j\sin\frac{\pi(m+k+1-j)}{2}\frac{1}{(m+k+1)(1+\varepsilon^2)^{m+k+1}}\tag{2.6}$$

Для более сложных по структуре величин $J_{mk}^{(2)}$ удается найти лишь рекуррентные соотношения

$$J_{mk+1}^{(2)}=-\frac{1}{2\varepsilon}[J_{mk}^{(2)}+J_{m-1k+1}^{(2)}]\quad(m=1,2,\ldots;\quad k=0,1,2,\ldots)\tag{2.7}$$

$$J_{0k+1}^{(2)}=-\frac{1}{2\varepsilon}J_{0k}^{(2)}+\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{\varepsilon(k+1)(1+\varepsilon^2)^{k+1}}\sum_{j=0}^{k+1}C_{k+1}^j\varepsilon^j\sin\frac{\pi(k+1-j)}{2}$$

$$J_{00}^{(2)}=\frac{4}{\pi}\frac{\operatorname{arctg}\varepsilon}{\varepsilon};\quad J_{km}^{(2)}=J_{mk}^{(2)}\quad(m,k=0,1,2,\ldots)$$

Формулы (2.6), (2.7) удобны для вычисления матричных коэффициентов (2.5) бесконечной системы (2.4), но малопригодны для исследования свойств этой системы. Предварительный анализ матричных коэффициентов показывает, что для изучения свойств бесконечной системы (2.4) при различных соотношениях между параметрами a, R, h достаточно выяснить поведение величин $J_{mk}^{(2)}(\varepsilon)$ при $m+k\to\infty$. Для их оценки воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$$[J_{mk}^{(2)}(\varepsilon)]^2\leqslant J_{mm}^{(2)}(\varepsilon)J_{kk}^{(2)}(\varepsilon)\qquad(J_{nn}^{(2)}(\varepsilon)\geqslant 0)$$

Представляя $J_{nn}^{(2)}(\varepsilon)$ в виде

$$J_{nn}^{(2)}(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{4\tau\operatorname{arctg}\varepsilon}}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}q_n^2(\tau)d\tau,\quad q_n^2(\tau)>0$$

$$q_n(\tau)=(-i)^n\sqrt{2}\frac{(1-i\varepsilon)^n}{(1+\varepsilon^2)^{n+1/2}}F(-n,1/2-i\tau;1;\gamma),\quad \gamma=\frac{2}{1-i\varepsilon}$$

и учитывая, что $e^{2\tau\operatorname{arctg}\varepsilon}\leq 2\operatorname{ch}\pi\tau$ $(0<\varepsilon<\infty,\ -\infty<\tau<\infty)$, имеем неравенство

$$J_{nn}^{(2)}(\varepsilon)\leq 4(-1)^n\frac{(1-i\varepsilon)^{2n}}{(1+\varepsilon^2)^{2n+1}}R_n(\varepsilon)$$

$$R_m(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\tau\operatorname{arctg}\varepsilon}}{\operatorname{ch}\pi\tau}F^2(-m,1/2-i\tau;1;\gamma)d\tau=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\gamma^j}{(j!)^2}\sum_{l=0}^{m}\frac{(-m)_l\gamma^l}{(l!)^2}T_{jl}$$

$$T_{jl}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\tau\operatorname{arctg}\varepsilon}\frac{\Gamma(1/2+i\tau)}{\Gamma(1/2-i\tau)}\Gamma(1/2-i\tau+j)\Gamma(1/2-i\tau+l)d\tau=$$

$$=2\pi e^{i\operatorname{arctg}\varepsilon}j!l!F(j+1,l+1;1;-e^{2i\operatorname{arctg}\varepsilon})$$

Используя теперь соотношения [8]

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a)_l(b')_l}{l!(c')_l}t^lF(a+l,b;c;x)=F_2(a,b,b';c;c';x;t)$$

при $a=1$, $c'=1$, $c=1$, $b=j+1$, $b'=-m$, $t=\gamma$, $x=-\exp(2i\operatorname{arctg}\varepsilon)$ и

$$F_2(a,b,b';a;a';w;z)=(1-w)^{-b}(1-z)^{-b'}F\left(b,b';a;\frac{wz}{(1-w)(1-z)}\right)$$

при $a=1$, $b=j+1$, $b'=-m$, $w=-\exp(2i\operatorname{arctg}\varepsilon)$, $z=\gamma$ после некоторых преобразований приходим к равенству

$$R_n(\varepsilon)=(-1)^n\frac{(1+i\varepsilon)^n}{(1-i\varepsilon)^n}\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

Следовательно,

$$[J_{mk}^{(2)}(\varepsilon)]^2\leq 16(1+\varepsilon^2)^{-m-k-1}\quad(0<\varepsilon<\infty)\tag{2.8}$$

При помощи оценки (2.8) можно убедиться, что при $0<\lambda<1$; $i=1,2$

$$D_{kn}^{(i1)}\sim\alpha_{nk}^{(0)}\beta_{nk}^{(1)}\lambda^{n+k+1}=O(nk^{-1}(n+k)e^{-s(n+k+1)})$$

$$D_{kn}^{(i2)}\sim\alpha_{nk}^{(0)}\beta_{nk}^{(2)}\lambda^{n+k+1}=O((n+k)e^{-s(n+k+1)})\quad(n+k\to\infty,\quad s=-\ln\lambda)$$

т.е. матричные элементы бесконечной системы (2.4) при $0<\lambda<1$ экспоненциально убывают по строкам и столбцам. Кроме того, при $0<\lambda=R/h<1$ справедливы неравенства

$$\sum_{k,n=1}^{\infty}[D_{kn}^{(ij)}]^2<\infty,\quad\sum_{n=2}^{\infty}[D_{0n}^{(2j)}]^2<\infty,\quad\sum_{k=2}^{\infty}[D_{k0}^{(i2)}]^2<\infty\tag{2.9}$$

Из неравенств (2.9) и принадлежности $\{f_k^{(2)}\}$ гильбертову пространству числовых последовательностей l_2 следует, что почти при всех значениях $\lambda\in(0,1)$ решение бесконечной системы (2.4) в l_2 существует, единственно и может быть найдено методом редукции [10, 11]. Оценки (2.9) позволяют сделать вывод и о том, что бесконечная система (2.4) квазирегулярна при $0 < \lambda < 1$ и вполне регулярна при $0 < \lambda \leq \lambda_0 < 1$ для некоторого $\lambda_0 \in (0, 1)$.

Ограничение $0 < \lambda < 1$ на возможные значения параметра λ естественным образом связано с формулировкой рассматриваемой задачи и означает, что сферы $r_1 = R$ и $r_2 = R$ не пересекаются и не касаются друг друга.

Решая бесконечную систему (2.4) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами, позволяющими вычислить коэффициент интенсивности нормальных напряжений K_1 до членов порядка λ^6 включительно, будем иметь

$$b_2^{(1)} = d_0\lambda^3 + O(\lambda^4), \quad b_k^{(1)} = O(\lambda^{k+1}) \quad (k = 3,4\ldots) \tag{2.10}$$

$$b_0^{(2)} = 1 + \frac{1+\nu}{3}\delta_0\varepsilon^3 J_{11}\lambda^3 + O(\lambda^4), \quad b_1^{(2)} = O(\lambda^4)$$

$$b_k^{(2)} = O(\lambda^{k+2}) \quad (k = 2,3,\ldots)$$

$$d_0 = d_{02}^{(0)}\beta_{02}^{(0)} - \alpha_2^{(2)}\varepsilon^4\delta_0 J_{12} - \alpha_2^{(3)}\varepsilon^3\delta_0 J_{11}$$

$$J_{11} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\varepsilon^3}\operatorname{arctg}\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)} - \frac{2}{3}\frac{1-3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}\right]$$

$$J_{12} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{4\varepsilon^4}\operatorname{arctg}\varepsilon - \frac{1}{4\varepsilon^3(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{2\varepsilon(1+\varepsilon^2)^2} + \frac{2}{3}\frac{(1-3\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon^2)^3}\right]$$

На основании асимптотического решения (2.10)

$$K_1 = \lim_{\rho\to a}[\sigma_z\sqrt{2(a-\rho)}]_{\beta=0} = -\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{2a}\sum_{n=0}^{\infty}\{b_{n+2}^{(1)}[\gamma_{n+2}r_{n+1} + (2n+3)\varepsilon r_{n+2}] +$$

$$+ b_n^{(2)}\delta_n r_{n+1}\}(\lambda\varepsilon)^{n+3} = \frac{2\sigma_0\sqrt{a}}{\pi}(1+\varepsilon^2)^{-2}\times$$

$$\times\left\{1-\varepsilon^2 + \left[d_0(\varepsilon^* - \gamma_2 + \gamma_2\varepsilon^2) - \frac{1+\nu}{3}\varepsilon^3(1-\varepsilon^2)J_{11}\right]\lambda^3\right\}\varepsilon^3\lambda^3 + O(\lambda^7);$$

$$\varepsilon^* = \frac{3\varepsilon^2(3-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon^2}, \quad r_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(-1)^m\frac{(\varepsilon+i)^{m+1} + (\varepsilon-i)^{m+1}}{(1+\varepsilon^2)^{m+1}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
2. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
3. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука 1965. 294 с.
5. *Проценко В.С., Соловьев А.И.* О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 973–982.
6. *Проценко В.С., Соловьев А.И., Цымбалюк В.В.* Кручение упругих тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 415–425.
7. *Соловьев А.И.* Упругое равновесие круговых кусочно-однородных сред с диаметральной трещиной // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 853–857.

8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Харьков

Поступила в редакцию
1.XII.1992