

УДК 539/375

© 1993 г. А.Н. Бородачев

## ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Предлагается новый общий метод построения весовых функций (ВФ) для пространственных упругих тел с плоскими трещинами. Показано, что для получения ВФ достаточно знать какое-либо пробное решение рассматриваемой задачи, отвечающее более простому закону нагружения поверхностей трещины, и функцию Грина для области, занимаемой трещиной. В качестве примера построена трехмерная ВФ для трещины в форме полосы, находящейся в неограниченном однородном и изотропном упругом теле.

**1. Весовые функции и вариационная формула.** В декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  рассмотрим статическую задачу для упругого тела  $V$ , ограниченного поверхностью  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , причем  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не имеют общих внутренних точек. На части поверхности тела  $\Omega_1$  задаются однородные кинематические, а на  $\Omega_2$  – однородные статические граничные условия. Для неограниченного тела  $V$  граничные условия на поверхности  $\Omega$  сводятся к обычным условиям затухания упругого поля на бесконечности. Тело содержит внутреннюю трещину, занимающую область  $S$  в плоскости  $x_3 = 0$ . Граница  $\Gamma$  области  $S$  может состоять из  $m$  достаточно гладких участков, т.е.  $\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} \cup \dots \cup \Gamma^{(m)}$ , где  $\Gamma^{(j)}$  не имеют общих точек. Очевидными примерами трещин, контуры которых состоят, например, из двух частей ( $m = 2$ ), являются трещины в форме кругового кольца или полосы. Точки поверхностей трещины  $S$  будем обозначать  $Q = (x_1, x_2, 0)$  и  $Q^0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$ , а точки ее контура  $\Gamma$  будут обозначаться  $M = (y_1, y_2, 0)$ .

Будем рассматривать только (наиболее важный с прикладной точки зрения) случай трещины нормального отрыва, когда поверхности трещины находятся под действием произвольной самоуравновешенной системы нормальных нагрузок  $p(Q)$ , а касательные напряжения в плоскости  $x_3 = 0$  отсутствуют. Случай, когда нагрузка прикладывается на некотором расстоянии от трещины, сводится к рассматриваемому при помощи принципа суперпозиции (называемого иногда также принципом Бюкнера) [1].

Весовая функция (ВФ)  $W^{(j)}(Q^0; M)$  для участка контура трещины  $\Gamma^{(j)}$  по определению равна величине коэффициента интенсивности напряжений (КИН)  $K_1^{(j)}(M)$ , обусловленного нагрузкой  $p(Q) = \delta(Q; Q^0)$ , где  $\delta$  – двумерная функция Дирака. Величина КИН для произвольного закона нагружения поверхностей трещины  $p(Q)$  может быть выражена через соответствующую ВФ при помощи квадратур

$$K_1^{(j)}(M) = \iint_S W^{(j)}(Q; M) p(Q) dS(Q) \quad (1.1)$$

где  $dS$  – элемент площади в декартовых координатах.

Предположим, что известно какое-либо (пробное) решение рассматриваемой задачи для тела  $V$  с трещиной, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности тела  $\Omega$  и отвечающее некоторому закону  $p(Q)$  нагружения поверхностей трещины, т.е. функции  $u_3(Q)$  и  $K_1^{(j)}(M)$  для этого пробного решения заданы, где  $u_3(Q)$  – нормальные перемещения точек поверхностей трещины. В этом случае вариация нормальных перемещений точек поверхностей трещины, вызванная малой вариацией  $\delta\Gamma$  контура трещины, определяется вариационной формулой [2–4]

$$\delta u_3(Q) = C \int_{\Gamma} W(Q; M) K_1(M) \delta\Gamma(M) ds(M) \quad (1.2)$$

где  $ds$  – элемент длины дуги на  $\Gamma$ , а  $\delta\Gamma$  отсчитывается в направлении внешней нормали к контуру  $\Gamma$ .

Фигурирующая в (1.2) постоянная  $C$  зависит только от упругих свойств материала и вычисляется по главным членам асимптотических разложений нормальных напряжений и перемещений в окрестности контура трещины [4]. Так, если

$$\sigma_{33} = K_1(2\rho)^{-1/2}, \quad u_3 = cK_1(2\rho)^{1/2}, \quad \rho \rightarrow 0$$

где  $\rho$  – расстояние в плоскости  $x_3 = 0$  до контура трещины, а  $c$  – некоторая постоянная, зависящая от упругих свойств материала, то  $C = \pi c/2$ . Например, для однородного и изотропного упругого материала эта постоянная имеет вид  $C = \pi(1 - \nu)/(2\mu)$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона и  $\mu$  – модуль сдвига.

Выберем такую вариацию контура трещины  $\Gamma$ , когда отлична от нуля только вариация части контура  $\Gamma^{(j)}$ , т.е.  $\delta\Gamma^{(j)}$ . При этом вариационная формула (1.2) принимает вид

$$\delta^{(j)} u_3(Q) = C \int_{\Gamma^{(j)}} W^{(j)}(Q; M) K_1^{(j)}(M) \delta\Gamma^{(j)}(M) ds(M) \quad (1.3)$$

и определяет вариацию нормальных перемещений, вызванную вариацией только части контура трещины  $\Gamma^{(j)}$ .

**2. Метод построения весовых функций.** В области  $S$ , занимаемой трещиной, рассмотрим ряд задач Дирихле для уравнения Лапласа относительно функций  $f^{(j)}(Q)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )

$$\Delta f^{(j)}(Q) = 0, \quad f^{(j)}(M) = f_0^{(j)}(M) \quad (2.1)$$

где  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа по переменным  $x_1$  и  $x_2$ , а граничные значения функций  $f^{(j)}(M)$  определяются следующими соотношениями:  $f_0^{(j)}(M) = 1$  при  $M \in \Gamma^{(j)}$  и  $f_0^{(j)}(M) = 0$  в противном случае.

Как известно [5], решения задач Дирихле (2.1) непосредственно выражаются через функцию Грина для области  $S$

$$f^{(j)}(Q) = - \int_{\Gamma^{(j)}} \frac{\partial G(Q; M)}{\partial n^{(j)}(M)} ds(M) \quad (2.2)$$

где  $\partial G(Q; M) / \partial n^{(j)}(M)$  – производная функции Грина  $G(Q; Q^0)$  по направлению внешней нормали к части контура трещины  $\Gamma^{(j)}$ .

Умножая обе части равенства (1.3) на  $f^{(j)}(Q)$  и считая, что вариации нормальных перемещений  $\delta^{(j)} u_3(Q)$  не обращаются в нуль в точках области  $S$  (в каждом конкретном случае выполнение этого условия может быть проверено непосредственно), получаем следующие представления гармонических функций из (2.1):

$$f^{(j)}(Q) = C \int_{\Gamma^{(j)}} \frac{f^{(j)}(Q)W^{(j)}(Q;M)K_1^{(j)}(M)\delta\Gamma^{(j)}(M)}{\delta^{(j)}u_3(Q)} ds(M) \quad (2.3)$$

Сравнивая теперь представления (2.2) и (2.3), устанавливаем общую структуру трехмерных ВФ, а именно,

$$W^{(j)}(Q;M) = -U^{(j)}(Q;M)H^{(j)}(Q;M) \quad (2.4)$$

$$U^{(j)}(Q;M) = \frac{\delta^{(j)}u_3(Q)}{CK_1^{(j)}(M)\delta\Gamma^{(j)}(M)}, \quad H^{(j)}(Q;M) = \frac{\partial G(Q;M)/\partial n^{(j)}(M)}{f^{(j)}(Q)}$$

Таким образом, в соответствии с формулой (2.4) для построения трехмерных ВФ достаточно знать лишь функции  $U^{(j)}$  и  $H^{(j)}$ . Ясно, что функции  $H^{(j)}$  зависят только от формы трещины и не зависят от геометрии тела  $V$ , граничных условий на поверхности  $\Omega$  и упругих свойств материала. Поэтому для стандартных форм плоских трещин достаточно вычислить эти функции только один раз. Геометрия тела  $V$ , граничные условия на  $\Omega$  и упругие свойства материала учитываются в представлении (2.4) функциями  $U^{(j)}$ , определяемыми по какому-либо пробному решению задачи для тела с трещиной, которое, естественно, зависит от указанных характеристик.

Задача о нахождении функции Грина, а следовательно, и функций  $H^{(j)}$ , для односвязной области трещины  $S$  сводится к отысканию конформного отображения этой области на единичный круг. Действительно, при достаточно общих условиях функция Грина может быть представлена в виде [5]

$$G(Q;Q^0) = -\ln |w(z;z^0)|/(2\pi) \quad (2.5)$$

$$w(z;z^0) = [w(z) - w(z^0)]/[1 - \bar{w}(z^0)w(z)], \quad z = x_1 + ix_2, \quad z^0 = x_1^0 + ix_2^0$$

где  $w(z)$  – какое-нибудь конформное отображение области трещины  $S$  на единичный круг  $|w| < 1$ .

Для стандартных геометрий трещин функция Грина непосредственно вычисляется по формуле (2.5) с использованием известных конформных отображений, поэтому главное ограничение на использование общего представления для ВФ (2.4) заключается в наличии соответствующих пробных решений.

**3. Трещина в форме полосы.** В качестве примера применения предложенного общего метода получения трехмерных ВФ построим ВФ для трещины в форме полосы, расположенной в неограниченном однородном и изотропном упругом теле. При этом  $S = \{Q: -a < x_1 < a, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = 0\}$  и граничный контур трещины  $\Gamma$  состоит из двух частей  $\Gamma^{(\pm)} = \{M: y_1 = \pm a, -\infty < y_2 < \infty, y_3 = 0\}$ . Здесь и далее вместо индекса  $j$ , указывающего на участок контура трещины  $\Gamma^{(j)}$ , используются символы "плюс" и "минус", отвечающие участкам фронта трещины  $\Gamma^{(\pm)}$ .

Из соображений симметрии ясно, что ВФ для участков контура трещины  $\Gamma^{(\pm)}$  связаны соотношением  $W^{(-)}(x_1, x_2; y_2) = W^{(+)}(-x_1, x_2; y_2)$ , что позволяет ограничиться вычислением, например, лишь ВФ  $W^{(+)}$ .

В случае, когда областью трещины является полоса, фигурирующая в представлении (2.4) функция Грина может быть получена при помощи конформных отображений. Как известно [5], функция  $w(z) = \operatorname{tg}(\alpha z/2)$ , где  $\alpha = \pi/(2a)$ , является конформным отображением области трещины  $S$  на единичный круг. Подставляя эту функцию в формулу (2.5), приходим, после некоторых вычислений, к следующему представлению для искомой функции Грина:

$$G(Q;Q^0) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \alpha(x_2 - x_2^0) - \cos \alpha(x_1 - x_1^0)}{\operatorname{ch} \alpha(x_2 - x_2^0) + \cos \alpha(x_1 + x_1^0)} \quad (3.1)$$

Дифференцируя (3.1) по  $x_1^0$  и устремляя в полученном соотношении  $x_1^0 \rightarrow a$  (при этом  $x_2^0 \rightarrow y_2$ ), находим нормальную производную функции Грина в точках части контура трещины  $\Gamma^{(+)}$ :

$$\frac{\partial G(Q; M)}{\partial n^{(+)}(M)} = -\frac{F^{(-)}(Q; M)}{4a}, \quad F^{(\pm)}(Q; M) = \frac{\cos \alpha x_1}{\operatorname{ch} \alpha(x_2 - y_2) \pm \sin \alpha x_1} \quad (3.2)$$

Видно, что функция  $f^{(+)} = (x_1 + a)/(2a)$  – решение соответствующей задачи Дирихле (2.1), поэтому при учете выражения (3.2) функцию  $H^{(+)}$  из представления (2.4) запишем в виде

$$H^{(+)}(Q; M) = -\frac{F^{(-)}(Q; M)}{2(x_1 + a)} \quad (3.3)$$

Теперь в соответствии с представлением (2.4), для построения трехмерной ВФ  $W^{(+)}$  нужно найти функцию  $U^{(+)}$  с использованием какого-либо известного (пробного) решения рассматриваемой задачи. В случае, когда прикладываемая к поверхностям трещины нагрузка не зависит от координаты  $x_2$ , т.е.  $p(Q) = p(x_1)$ , исходная пространственная задача о трещине в форме полосы сводится к классической задаче плоской деформации для трещины Гриффитса. Простейшее решение для трещины Гриффитса отвечает действию постоянной нагрузки  $p(x_1) = p \equiv \equiv \operatorname{const}$  на ее поверхностях и имеет вид [6]

$$u_3(Q) = p\mu^{-1}(1-\nu)(a^2 - x_1^2)^{1/2}, \quad K_1 = pa^{1/2} \quad (3.4)$$

Далее выберем такую вариацию контура трещины  $\Gamma$ , когда  $\delta\Gamma = \delta\Gamma^{(+)}(M) = \delta a = \operatorname{const}$ , т.е. когда исходная трещина получает малое одинаковое приращение  $\delta a$  во всех точках части контура  $\Gamma^{(+)}$ . Для вычисления соответствующей вариации нормальных перемещений точек поверхностей трещины удобно перейти к новым переменным  $x_1^0 = x_1 + d$ ,  $x_2^0 = x_2$ , где  $d$  – некоторая постоянная. При этом координаты частей контура трещины  $\Gamma^{(\pm)}$  описываются соотношениями  $x_1^0 = a^{(\pm)} \equiv d \pm a$ , а перемещения поверхностей трещины для пробного решения (3.4) имеют вид

$$u_3(Q^0) = p\mu^{-1}(1-\nu)(x_1^0 - a^{(-)})^{1/2}(a^{(+)} - x_1^0)^{1/2} \quad (3.5)$$

Вариация нормальных перемещений (3.5), вызванная вышеуказанной вариацией контура трещины, вычисляется обычным образом:

$$\delta^{(+)}u_3(Q^0) \equiv \frac{\partial u_3(Q^0)}{\partial a^{(+)}} \delta a = \frac{p(1-\nu)(x_1^0 - a^{(-)})^{1/2} \delta a}{2\mu(a^{(+)} - x_1^0)^{1/2}}$$

что, после перехода к исходным переменным, приводит к следующему результату:

$$\delta^{(+)}u_3(Q) = \frac{p(1-\nu)(a + x_1)^{1/2} \delta a}{2\mu(a - x_1)^{1/2}} \quad (3.6)$$

Подставляя теперь (3.6), второе из соотношений (3.4), а также приведенные выше значения постоянной  $C$  и вариации контура трещины  $\delta\Gamma^{(+)}$  в выражение для  $U^{(+)}$  из (2.4), находим

$$U^{(+)}(Q; M) = \frac{(a + x_1)^{1/2}}{\pi a^{1/2}(a - x_1)^{1/2}} \quad (3.7)$$

Для получения ВФ  $W^{(\pm)}$  достаточно подставить соотношения (3.3) и (3.7) в (2.4). Воспользовавшись этим и формулой связи между  $W^{(-)}$  и  $W^{(+)}$ , находим явное представление трехмерных ВФ для трещины в форме полосы, расположенной в неограниченном однородном и изотропном упругом теле

$$W^{(\pm)}(Q; M) = \frac{F^{(\mp)}(Q; M)}{2\pi a^{1/2}(a^2 - x_1^2)^{1/2}} \quad (3.8)$$

В соответствии с концепцией ВФ формулой (3.8) определяется величина КИН нормального отрыва для точек участков контура  $\Gamma^{(\pm)}$  рассматриваемой трещины с координатами  $y_2$  в случае, когда нагрузка на поверхностях трещины представляет собой две единичные нормальные противоположно направленные (расклинивающие) сосредоточенные силы, прикладываемые в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . В отличие от ранее предложенного представления трехмерных ВФ для трещины в форме полосы [7, 8] формула (3.8) дает точное решение рассматриваемой задачи.

Если в формуле (3.8) выполнить предельный переход, отвечающий переходу рассматриваемой трещины в трещину в форме полуплоскости, можно убедиться (данные вычисления проводятся непосредственно и здесь опущены), что ВФ из (3.8) переходит при этом в известную [8, 9] трехмерную ВФ для трещины в форме полуплоскости.

Определение КИН для трещины в форме полосы, расположенной в неограниченном однородном и изотропном упругом теле и находящейся под действием произвольной самоуравновешенной системы нормальных нагрузок  $p(Q) \equiv p(x_1, x_2)$ , сводится теперь, по сути дела, к вычислению квадратур. Действительно, подстановка соотношения (3.8) в (1.1) приводит к следующему результату:

$$K_1^{(\pm)}(y_2) = \frac{1}{2\pi a^{1/2}} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_1, x_2) F^{(\mp)}(Q; M) dx_2 dx_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}} \quad (3.9)$$

Для случая плоской деформации, когда  $p(x_1, x_2) = p(x_1)$  и величина КИН не зависит от координаты  $y_2$ ; запишем формулу (3.9) в виде

$$K_1^{(\pm)} = \frac{1}{2\pi a^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{p(x_1) \cos \alpha x_1 dx_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_2}{\operatorname{ch} \alpha(x_2 - y_2) \mp \sin \alpha x_1} \quad (3.10)$$

Интегралы по переменной  $x_2$  вычисляются в замкнутом виде и равны, соответственно  $2(a \pm x_1)/\cos \alpha x_1$ . При учете этого формулу (3.10) представим в следующей форме:

$$K_1^{(\pm)} = \int_{-a}^a k^{(\pm)}(x_1) p(x_1) dx_1, \quad k^{(\pm)}(x_1) = \frac{(a \pm x_1)^{1/2}}{\pi a^{1/2} (a \mp x_1)^{1/2}} \quad (3.11)$$

где  $k^{(\pm)}(x_1)$  – двумерная ВФ для трещины Гриффитса [8]. Таким образом, в случае плоской деформации формула (3.9) приводит, как и следовало ожидать, к известному результату.

**4. Формула связи трехмерных весовых функций с двумерными.** В соответствии с общей схемой предложенного метода, для построения трехмерных ВФ необходимо знать, в частности, величину КИН и нормальные перемещения точек поверхностей трещины, отвечающие какому-нибудь пробному решению. К сожалению, в литературе справочного характера (например, [8, 10]) обычно приводятся лишь соотношения для КИН и отсутствуют представления для перемещений точек поверхностей трещины. Поэтому в случаях, когда это возможно, может оказаться более предпочтительным несколько иной вариант метода

построения ВФ, не требующий знания перемещений точек поверхностей трещины и основывающийся на формулах связи трехмерных ВФ с двумерными ВФ.

Было доказано [11], что трехмерная ВФ для круговой трещины непосредственно вычисляется, если известна соответствующая двумерная осесимметричная ВФ. Для трещины в форме полосы справедлив аналогичный результат, заключающийся в том, что для построения искомой трехмерной ВФ достаточно знать лишь соответствующую двумерную ВФ, отвечающую случаю плоской деформации.

Двумерные ВФ для случая плоской деформации, которые будем обозначать  $k^{(\pm)}(x_1^0)$ , отвечают действию нагрузки  $p(Q) = \delta(x_1 - x_1^0)$  на поверхностях трещины в форме полосы, где  $\delta$  – одномерная функция Дирака. Подставляя указанную нагрузку в (1.1), приходим к следующей формуле, записанной в координатной форме:

$$k^{(\pm)}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W^{(\pm)}(x_1, x_2; y_2) dx_2, \quad -a < x_1 < a \quad (4.1)$$

Из соображений симметрии ясно, что для рассматриваемого класса задач нормального отрыва, когда в плоскости трещины отсутствуют касательные напряжения, трехмерные ВФ для трещины в форме полосы обладают следующими свойствами:

$$W^{(\pm)}(x_1, x_2; y_2) = W^{(\pm)}(x_1, x_2 - y_2) = W^{(\pm)}(x_1, y_2 - x_2)$$

что позволяет представить формулу (4.1) в виде

$$k^{(\pm)}(x_1) = \int_{\Gamma^{(\pm)}} W^{(\pm)}(x_1, x_2 - y_2) dy_2, \quad -a < x_1 < a \quad (4.2)$$

Умножая обе части равенства (4.2) на функции  $f^{(\pm)}(x_1)$ , являющиеся решениями соответствующих задач Дирихле (2.1) для полосы, и учитывая, что ВФ  $k^{(\pm)}(x_1)$  не обращаются в нуль при  $-a \leq x_1 \leq a$ , по аналогии с формулой (2.3) получаем

$$f^{(\pm)}(x_1) = \int_{\Gamma^{(\pm)}} \frac{f^{(\pm)}(x_1) W^{(\pm)}(x_1, x_2 - y_2)}{k^{(\pm)}(x_1)} dy_2 \quad (4.3)$$

Сравнивая теперь представления (2.2) и (4.3), устанавливаем формулу связи трехмерных ВФ для трещины в форме полосы с соответствующими двумерными ВФ

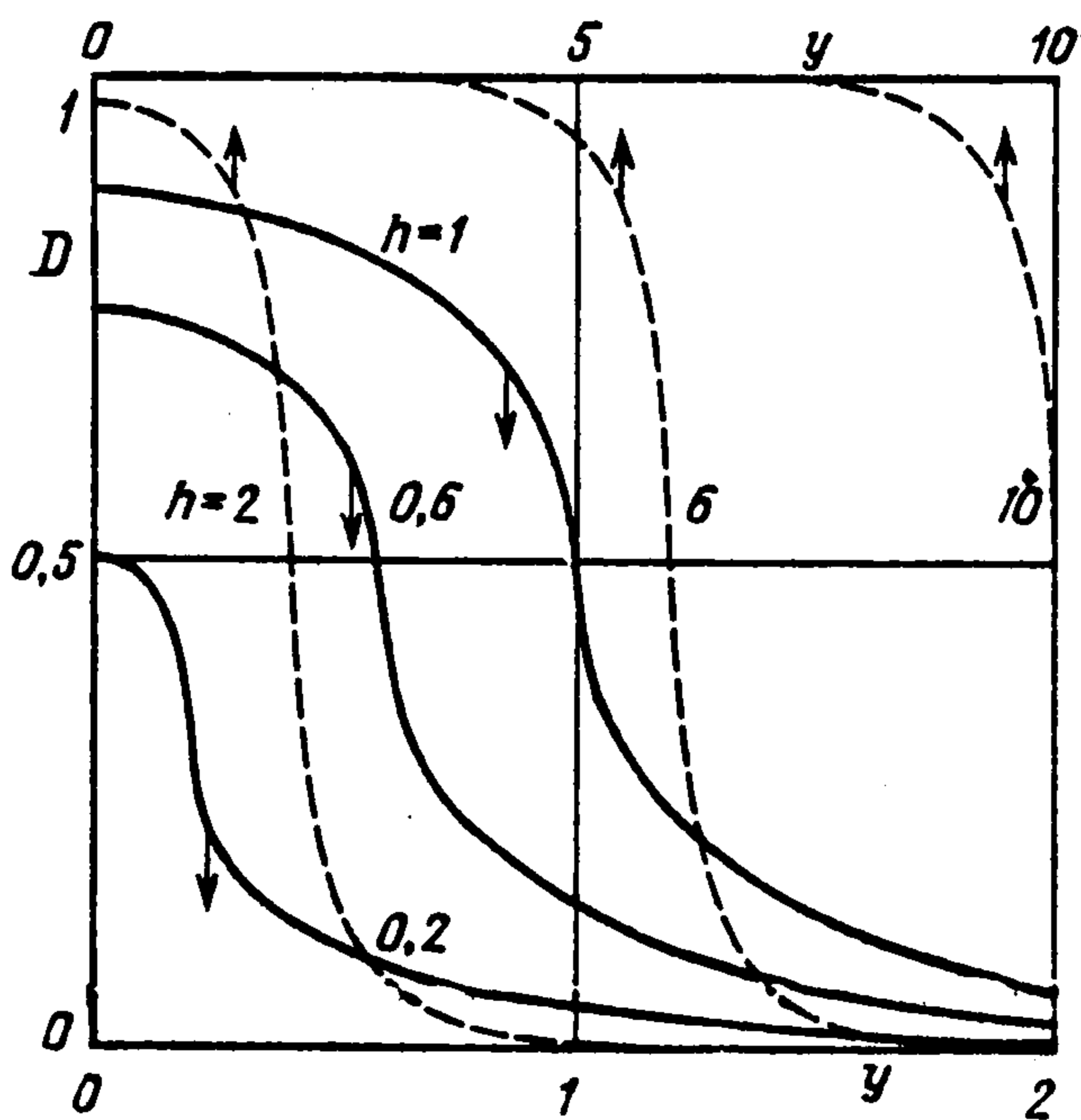
$$W^{(\pm)}(x_1, x_2 - y_2) = -k^{(\pm)}(x_1) H^{(\pm)}(Q; M) \quad (4.4)$$

причем функции  $H^{(\pm)}$  определяются формулами (2.4).

Аналогично тому, как было получено представление (3.3) для функции  $H^{(+)}$ , вычисляется и функция  $H^{(-)}$ , что позволяет записать формулу (4.4) в окончательной форме, удобной для практического использования:

$$W^{(\pm)}(Q; M) = \frac{k^{(\pm)}(x_1) F^{(\mp)}(Q; M)}{2(a \pm x_1)} \quad (4.5)$$

Таким образом, для построения трехмерных ВФ для трещины в форме полосы достаточно знать лишь соответствующие двумерные ВФ, отвечающие случаю плоской деформации. В качестве примера еще раз обратимся к задаче о трещине в форме полосы, расположенной в неограниченном однородном и изотропном упругом теле. Подставляя соответствующие данной задаче двумерные ВФ из (3.11) в представление (4.5), сразу приходим к искомому результату, даваемому формулой (3.8).



Формулу (4.5) можно использовать также и для приближенного построения трехмерных ВФ, если известны только приближенные представления соответствующих двумерных ВФ. При этом максимальная относительная погрешность вычисления трехмерных ВФ получается равной, как легко проверить, максимальной относительной погрешности вычисления двумерных ВФ.

Результатом сравнения представлений трехмерных ВФ (2.4) и (4.4) является следующая формула:

$$k^{(\pm)}(x_1) = \frac{\delta^{(\pm)} u_3(Q)}{CK_1^{(\pm)}(M) \delta \Gamma^{(\pm)}(M)}$$

позволяющая вычислять двумерные ВФ на основании как двумерных, так и трехмерных пробных решений соответствующей задачи о трещине в форме полосы. Эту формулу можно рассматривать как обобщение известной формулы Райса [12], основывающейся исключительно на использовании двумерных пробных решений.

**5. Пример расчета коэффициентов интенсивности напряжений для трещины в форме полосы.** Рассмотрим трехмерную задачу для трещины в форме полосы, расположенной в неограниченном однородном и изотропном упругом теле и находящейся под действием постоянной нормальной нагрузки  $p$ , заданной в области  $-a < x_1 < a$ ,  $-b < x_2 < b$ , где  $b > 0$  – некоторая постоянная. Для вычисления КИН непосредственно воспользуемся формулой (3.9), которая при заданных условиях нагружения принимает вид

$$K_1^{(\pm)}(y_2) = \frac{p}{2\pi a^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{\cos \alpha x_1 dx_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}} \int_{-b}^b \frac{dx_2}{\operatorname{ch} \alpha(x_2 - y_2) \mp \sin \alpha x_1} \quad (5.1)$$

В результате вычисления интегралов по переменной  $x_2$  в замкнутом виде и выполнения простых преобразований формулу (5.1) можно представить в окончательной форме, содержащей лишь однократные квадратуры:

$$K_1^{(\pm)}(y_2) = K_1^\infty D(h, y), \quad D(h, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\psi(x) dx}{(1 - x^2)^{1/2}} \quad (5.2)$$

$$\psi(x) = \psi^+ - \psi^-, \quad \psi^\pm(x) = \operatorname{arctg} \frac{e^{\pm \pi(h \mp y)/2} + \sin(\pi x / 2)}{\cos(\pi x / 2)}, \quad h = \frac{b}{a}, \quad y = \frac{y_2}{a}$$

где  $K_1^\infty = p a^{1/2}$  – величина КИН для плоской деформации, которая реализуется в рассматриваемой задаче при  $b \rightarrow \infty$ . Можно проверить, что при  $b \rightarrow \infty$  функция  $D(h, y) \rightarrow 1$  и формула (5.2) сводится к известному результату для случая плоской деформации.

При конечных значениях постоянной  $b$  для нахождения функции  $D(h, y)$  следует использовать квадратурные формулы. Наиболее просто фигурирующий в (5.2) интеграл вычисляется при помощи квадратурной формулы типа Гаусса, явно учитывающей наличие корневых особенностей на концах участка интегрирования [13].

Функция  $D$ , а следовательно, и величина КИН из (5.2) зависит лишь от двух безразмерных параметров  $h$  и  $y$ . Характер зависимости  $D$  от  $y$  показан на фигуре для некоторых значений  $h \leq 1$  (сплошные линии) и  $h > 1$  (штриховые линии). Приведенные

результаты, в частности, показывают, что начиная со значения параметра  $h \approx 4$  выполняется соотношение  $K_1^{(\pm)}(0) \approx K_1^\infty$ .

Заметим, что предложенный метод позволяет значительно расширить класс трехмерных задач теории трещин, для которых могут быть получены аналитические (точные или приближенные) решения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Cartwright D.J.* Stress intensity factor determination // *Developments in fracture mechanics* / Ed. Chell G.G. London: Appl. Sci. Publ., 1979. V. 1. P. 29–65.
2. *Rice J.R.* First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. N 3. P. 571–578.
3. *Бородачев Н.М.* Об одном вариационном методе решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоской трещиной // *Прикл. механика.* 1986. Т. 22. № 4. С. 71–76.
4. *Бородачев Н.М.* Трещина, близкая к круговой, в трансверсально-изотропном теле // *Проб. прочности.* 1989. № 8. С. 60–63.
5. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 477 с.
6. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
7. *Oore M., Burns D.J.* Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields // *Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol.* 1980. V. 102. N 2. P. 202–211.
8. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с.
9. *Kassir M.K., Sih G.C.* Three-dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff, 1975. 452 p.
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю.Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.; Т. 2. С. 449–1013.
11. *Бородачев А.Н.* Об одном методе построения весовых функций для круговой трещины // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1022–1030.
12. *Rice J.R.* Some remarks on elastic crack-tip stress fields // *Intern. J. Solids and Struct.* 1972. V. 8. N 6. P. 751–758.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Киев

Поступила в редакцию  
15.X.1992