УДК 539.3:534.1

© 1993 г. А.Л. Крылов, Н.Г. Мазур, В.Н. Николаевский, Г.А. Эль

ГРАДИЕНТНО-СОГЛАСОВАННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ УЛЬТРАЗВУКА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

На основании подробного анализа градиентно-согласованной микрополярной модели зернистой сплошной среды получены уравнения распространения слабых нелинейных волн. Высокочастотная мода колебаний ассоциируется с ультразвуковыми волнами, низкочастотная – с обычными сейсмическими в горных породах. На основе асимптотического рассмотрения получены эволюционные уравнения в том числе для случая длинно-коротковолнового резонанса. Последний соответствует случаю генерации ультразвука (шума) пробегающими сейсмическими волнами.

Распространение волн в горных породах с микроструктурой может быть исследовано в рамках известного обобщения классической теории упругости – так называемой микрополярной теории [1]. Для объяснения экспериментального факта [2] генерации ультразвуковых колебаний обычными сейсмическими волнами или же сейсмического шума волнами низких частот было решено воспользоваться градиентно-согласованной формулировкой микрополярной теории в [3]. Она существенно использует условие, что свободная энергия среды должна зависеть от пространственных производных от смещения на единицу большего порядка, чем производные от угла поворота зерна. Микрополярная модель также использовалась [4] для анализа нелинейных волновых процессов, но вопрос о генерации высоких частот колебаний пробегающими волнами не рассматривался.

1. Исходная формулировка математической модели. Искомыми переменными в уравнениях используемой теории являются координаты частицы среды x_k и ортогональная матрица χ_{kl}, описывающая поворот этой частицы как твердого тела. Эти переменные являются функциями лагранжевых координат и времени

$$x_k = x_k(X_m, t), \quad \chi_{kl} = \chi_{kl}(X_m, t), \quad k,\ l,\ m = 1,2,3$$

При малых деформациях более удобны смещения u_k и вектор угла поворота φ_k, связанные с x_k, χ_{kl} соотношениями

$$x_k = X_k + u_k$$
$$\chi_{kl} = \delta_{kl} + \varphi_{kl} + \tfrac{1}{2}\varphi_{ks}\varphi_{sl} + \ldots \quad (\chi = e^{\varphi}, \varphi_{kl} = -\varepsilon_{klm}\varphi_m) \tag{1.1}$$

где ε_{klm} – альтернирующий тензор, т.е. с точностью до членов второго порядка

$$\chi_{kl} \approx \delta_{kl} - \varepsilon_{klm}\varphi_m + \tfrac{1}{2}\varphi_k\varphi_l - \tfrac{1}{2}\delta_{kl}\varphi_m\varphi_m \tag{1.2}$$

Уравнения движения микрополярной среды имеют вид (балансы импульса и момента импульса)

$$\rho\ddot{u}_k = t_{lk,l}, \quad \rho j\ddot{\varphi}_k = m_{lk,l} + \varepsilon_{klm}t_{lm}$$
$$(u_{,l} = \partial u / \partial X_l) \qquad (1.3)$$

где t_{lk}, m_{lk} – тензоры напряжений и моментных напряжений. Систему (1.3) будем замыкать [3] с помощью следующих определяющих соотношений:

$$t_{lk} = \frac{\partial\Phi}{\partial G_{KL}} x_{l,K}\chi_{kL} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial C_{KLM}} x_{l,K}x_{k,LM} -$$
$$-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial C_{KLM}}(x_{k,K}x_{l,L}x_{m,M} + x_{l,K}x_{m,L}x_{k,M} - x_{m,K}x_{k,L}x_{l,M})\right]_{,m} \qquad (1.4)$$

$$m_{lk} = \frac{\partial\Phi}{\partial\Gamma_{KLM}}\varepsilon_{RML}x_{l,k}\chi_{kR} \qquad (1.5)$$

Эти уравнения полностью определяются объемной плотностью свободной энергии Φ, которая зависит только от компонент тензоров

$$G_{KL} = x_{s,K}\chi_{sL} - \delta_{KL}, \quad C_{KLM} = x_{s,K}x_{s,LM}, \quad \Gamma_{KLM} = \chi_{sM,K}\chi_{sL} \qquad (1.6)$$

Предположение о том, что Φ – функция только величин (1.6) и есть упомянутое выше условие градиентной согласованности для случая, когда в игру вступают первые производные от угла поворота и соответственно вторые производные от смещения. При малых деформациях величины (1.6) в главном порядке линейны по u_k, φ_k. Это видно из следующих выражений этих величин через u_k, φ_k:

$$G_{KL} = u_{L,K} - \varepsilon_{KLm}\varphi_m + \tfrac{1}{2}\varphi_K\varphi_L - \tfrac{1}{2}\delta_{KL}\varphi_m\varphi_m + \varepsilon_{Lsm}u_{s,K}\varphi_m + \ldots$$
$$C_{KLM} = u_{K,LM} + u_{s,K}u_{s,LM} + \ldots \qquad (1.7)$$
$$\Gamma_{KLM} = \varepsilon_{MLm}\varphi_{m,K} + \tfrac{1}{2}\varphi_L\varphi_{M,K} - \tfrac{1}{2}\varphi_M\varphi_{L,K} + \ldots$$

в которых учтены члены разложений до второй степени, что достаточно для дальнейшего.

При изучении модели изотропной микрополярной среды в линейном приближении плотность свободной энергии берется в виде однородной квадратичной формы от компонент тензоров (1.6), инвариантной относительно полной ортогональной группы. Общий вид такой формы приведен в [3]. Для того чтобы иметь возможность изучать разнообразные нелинейные явления, которые протекают в среде с микроструктурой (такие, например, как трансформация низкочастотных сейсмических волн в связанные с вращательными колебаниями зерен высокочастотные волны ультразвукового диапазона, или генерация продольными волнами поперечных волн), надо учитывать в Φ также и кубические члены. Общий вид инвариантной однородной кубической формы строится методом аналогичным изложенному ранее [3], путем перебора всех различных, с учетом симметрии C_{KLM} и антисимметрии Γ_{KLM} по индексам L, M, способов свертки в скаляр тензорных произведений **GGG**, **GCC**, **GΓΓ** и **GCΓ**. Лишь для таких произведений (в них сумма степеней трехвалентных тензоров **C** и **Γ** четна) обеспечивается инвариантность при отражениях. Таким образом, рассматриваем модель среды, которая определяется следующим выражением для плотности свободной энергии:

$$\Phi = \Phi_2(\mathbf{G},\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}) + \Phi_3(\mathbf{G},\mathbf{C},\mathbf{\Gamma})$$
$$\Phi_2 = a_1G_{KK}G_{LL} + a_2G_{KL}G_{KL} + \ldots + a_{13}C_{KLL}\Gamma_{MMK} + a_{14}C_{KLM}\Gamma_{LKM}$$
$$\Phi_3 = a_{15}G_{KK}G_{LL}G_{MM} + a_{16}G_{KL}G_{KL}G_{MM} + \ldots + a_{74}G_{KL}C_{MNN}\Gamma_{MKL} + a_{75}G_{KL}C_{MMN}\Gamma_{NKL}$$

($a_1, \ldots, a_{75}$ – материальные константы).

Следует отметить, что построенный описанным выше способом всевозможных свертываний набор квадратичных инвариантов является полным и линейно независимым. В то же время входящая в Φ_3 система кубических инвариантов, будучи полной, линейно независимой уже не является. Между инвариантами внутри типов GCC, $GC\Gamma$ и $G\Gamma\Gamma$ имеются линейные соотношения. Их можно получать, альтернируя тензор восьмого ранга, сверткой которого получен инвариант, по четырем индексам, расположенным в парах, определяющих свертку, например, слева, а затем выполняя свертку по той же схеме, поскольку альтернирование по четырем индексам дает в трехмерном пространстве тождественный нуль. Таким образом, связь между конкретной микрополярной средой и указанным набором констант a_i не является взаимно-однозначной: одну и ту же среду могут определять различные совокупности констант. Иначе говоря, количество материальных констант в Φ_3 может быть уменьшено.

Однако проведение этой процедуры не является необходимым в рамках данной работы, поскольку для реализации нелинейных волновых эффектов, изучаемых во второй части статьи, достаточно предположить, что входящие в одномерную редукцию общих уравнений комбинации материальных констант (небольшая их часть) отличны от нуля.

В результате замыкания системы уравнений (1.3) при помощи (1.4), (1.5), где G_{KL}, C_{KLM}, Γ_{KLM}, x_k, χ_{kl} выражаются через полевые переменные u_k, φ_k посредством (1.1), (1.2) и (1.7), получаются, после пренебрежения членами выше второй степени, уравнения движения

$$\rho\ddot{u}_k = a\varepsilon_{k\alpha\beta}\varphi_{\beta,\alpha} + b_1 u_{k,\alpha\alpha} + b_2 u_{\alpha,\alpha k} + b_3 u_{k,\alpha\alpha\beta\beta} + b_4 u_{\alpha,\alpha\beta\beta k} + b_5\varepsilon_{k\alpha\beta}\varphi_{\alpha,\beta\gamma\gamma} + Q_k^u \quad (1.8)$$

$$\rho j\ddot{\varphi}_k = a\varepsilon_{k\alpha\beta}u_{\beta,\alpha} - 2a\varphi_k + c_1\varphi_{k,\alpha\alpha} + c_2\varphi_{\alpha,\alpha k} + c_3\varepsilon_{k\alpha\beta}u_{\alpha,\beta\gamma\gamma} + Q_k^\varphi \quad (1.9)$$

Коэффициенты при линейных членах выражаются через материальные константы a_i следующим образом:

$$\begin{gathered} a = 2(a_1 - a_2), \quad b_1 = 2a_1, \quad b_2 = 2(a_2 + a_3) \\ b_3 = -a_4 - 2a_6 - 2a_7 + 2a_8, \quad b_4 = -a_4 - 2a_5 - 4a_8 \\ b_5 = a_{12} + a_{13}, \quad c_1 = 2(a_9 + 2a_{10} + a_{11} + 2a_{12} + a_{14}) \\ c_2 = -2(a_9 + a_{11} + a_{12}), \quad c_3 = a_{13} - a_{14} + 2a_4 - 4a_8 \end{gathered} \quad (1.10)$$

Сравнение с соответствующими формулами из [3] показывает некоторые отличия, связанные, вероятно, с неточностью в алгебраических выкладках, допущенной в [3]. По существу разница состоит в том, что в [3] коэффициенты b_5 и c_3 совпадают, тогда как согласно (1.10) они независимы между собой.

Что касается совокупностей квадратичных членов Q_k^u и Q_k^φ, то их фактическое выписывание и явное указание выражений коэффициентов через константы a_i – трудоемкая процедура, выполнение которой выходит за рамки данной работы. Возможно, для ее проведения целесообразно использовать компьютерную технику. Для данной работы достаточно привести некоторые общие сведения о структуре Q_k^u и Q_k^φ, что позволяет выделить в правых частях уравнений (1.8), (1.9) нелинейные члены, существенные для изучаемых эффектов в случае, когда решение имеет вид плоской волны.

Анализ совокупностей квадратичных членов в (1.8), (1.9) показывает, что Q_k^u и

Q_k^φ являются линейными комбинациями выражений вида

$$D_1 u_m D_2 u_n, \quad D_1 u_m D_2 \varphi_n, \quad D_1 \varphi_m D_2 \varphi_n; \quad m,n = 1,2,3 \tag{1.11}$$

где операторы D_1, D_2 представляют собой произведения нескольких операторов дифференцирования $\partial/\partial X_\alpha$, причем некоторые из α могут совпадать как между собой, так и с m или с n.

Порядок оператора D_i, действующего на u_m, может варьировать от 1 до 4, а порядок оператора, действующего на φ_n – от 0 до 3. К примеру, в Q_k^u имеются слагаемые

$$c u_{k,\alpha} u_{\alpha,\beta\beta}, \quad c' \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha,k} \varphi_{\beta,\gamma}, \quad c'' \varphi_\alpha \varphi_{k,\alpha\beta\beta} \tag{1.12}$$

и т.п., где c, c', c'' – некоторые коэффициенты, линейно выражающиеся через материальные константы a_i (наподобие (1.10)).

Наиболее существенной характеристикой квадратичного слагаемого вида (1.11) является порядок каждой из перемножаемых производных. В соответствии с этим, ввиду большого количества нелинейных членов в уравнениях (1.8), (1.9) полезно провести классификацию слагаемых в Q_k^u и Q_k^φ по этому признаку, разбив их по типам и обозначая каждый тип символом вида $u'u''$, $u'u'''$, $u'\varphi''$ и т.п., где число штрихов равно порядку дифференциальных операторов D_1 и D_2 в (1.11). Приведенные выше в качестве примера слагаемые (1.12) принадлежат к типам $u'u''$, $u'\varphi'$, $\varphi\varphi'''$ соответственно.

Хотя общее количество членов вида (1.11) в уравнениях (1.8), (1.9) превышает сотню, число различных их типов гораздо меньше и их нетрудно перечислить. С этой целью сформулируем правило, которое легко проверить непосредственно, рассмотрев последовательно все операции, производимые при замыкании системы уравнений (1.3) при помощи (1.4), (1.5) и при учете (1.1), (1.2) и (1.7).

Введем целое число l_i, характеризующее оператор D_i в (1.11) следующим образом: l_i равно порядку D_i, если D_i действует на φ_m и l_i – на единицу меньше порядка D_i, если D_i действует на u_m. Выше уже указывалось ограничение на порядки D_i, которое теперь можно выразить как

$$0 \leqslant l_i \leqslant 3, \quad i = 1,2 \tag{1.13}$$

Все разнообразие типов слагаемых, присутствующих в Q_k^u и Q_k^φ, определяется условиями: а) $0 \leqslant l_1 + l_2 \leqslant 3$, б) для любого слагаемого из Q_k^u сумма $l_1 + l_2$ нечетна, а для любого слагаемого из Q_k^φ – четна.

Заметим, что условие б является следствием симметрии изучаемой модели микрополярной среды при отражениях.

Руководствуясь этими условиями, т.е. тем, что в Q_k^u сумма $l_1 + l_2$ равна 1 или 3, а в Q_k^φ сумма $l_1 + l_2$ равна 0 или 2, и учитывая (1.13), укажем все типы квадратичных слагаемых в уравнениях (1.8), (1.9):

типы членов в Q_k^u

$$\begin{gathered} u'u'', \ u'u'''', \ u''u'''; \ u'\varphi', \ u'\varphi''', \ u''\varphi, \ u''\varphi'' \\ u'''\varphi', \ u''''\varphi; \ \varphi\varphi', \ \varphi\varphi''', \ \varphi'\varphi'' \end{gathered} \tag{1.14}$$

типы членов в Q_k^{φ}

$$u'u',\quad u'u''',\quad u''u'';\quad u'\varphi,\quad u'\varphi'',\quad u''\varphi',\quad u'''\varphi;\quad \varphi\varphi,\quad \varphi\varphi'',\quad \varphi'\varphi' \tag{1.15}$$

Следует отметить, что члены типа $\varphi\varphi$ фактически отсутствуют, поскольку они могут иметь только вид $\varepsilon_{k\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta$ или $\varepsilon_{\alpha\beta\beta}\varphi_\alpha\varphi_k$, что, очевидно, равно нулю.

Видно, что и линейные слагаемые подчиняются правилам, аналогичным а, б, только еще проще. Они характеризуются одним оператором D, для которого l удовлетворяет условиям: $0 \leqslant l \leqslant 3$; l нечетно в первом из уравнений (1.8), (1.9) и четно во втором из них.

Заметим, что все возможные слагаемые в Q_k^u и Q_k^{φ} с неопределенными коэффициентами c_j можно перечислить, составляя тензорные произведения из частных производных от u_k и φ_k, принадлежащие к указанным выше типам:

$$\begin{gathered} u_{\alpha,\beta}u_{p,qr},\quad u_{\alpha,\beta}u_{p,qrst},\ldots;\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu}u_{\alpha,\beta}\varphi_{p,q} \\ \varepsilon_{\lambda\mu\nu}u_{\alpha,\beta}\varphi_{p,qrs},\ldots;\ \ldots\ \ldots;\ \ldots,\quad \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{p,q} \end{gathered} \tag{1.16}$$

($\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$ добавляется с тем расчетом, чтобы общее число индексов было нечетным), и перебирая все неэквивалентные способы присвоения одному из индексов значения k и свертки по остальным, попарно отождествляемым, индексам. Тождественно нулевые члены, подобные указанным выше типа $\varphi\varphi$ естественно не учитываются. При этом остается трудоемкая задача определения зависимостей коэффициентов c_j от констант a_i, о которой упоминалось ранее. Просто расставить различные коэффициенты при всевозможных слагаемых типа (1.16) (т.е. считать эти коэффициенты независимыми) нельзя, поскольку даже в линейных частях уравнений (1.8), (1.9) наблюдаем зависимость между ними: коэффициенты при $\varepsilon_{k\alpha\beta}\varphi_{\beta,\alpha}$, $\varepsilon_{k\alpha\beta}u_{\beta,\alpha}$ и φ_k пропорциональны. Тем более неизбежно наличие таких зависимостей между коэффициентами при квадратичных членах, поскольку количество различных видов этих членов, получаемых описанным выше способом, превосходит количество констант a_i.

2. Нелинейные продольные волны в микрополярной среде. Рассмотрим одномерные нелинейные волны в микрополярной среде, описываемой общими уравнениями. Для волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}$

$$\begin{gathered} u_i(X_\alpha,t)=u_i(X,t),\quad \varphi_i(X_\alpha,t)=\varphi_i(X,t) \\ X=X_\alpha n_\alpha,\quad \alpha,i=1,2,3 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Пространственные производные при этом преобразуются по следующему правилу:

$$f_{i,\alpha}=n_\alpha\partial f/\partial X\equiv n_\alpha f' \tag{2.2}$$

Направим ось X вдоль направления распространения волны, т.е. $\mathbf{n}=(1,0,0)$.

Нелинейные уравнения (1.8), (1.9) содержат как продольные, так и поперечные составляющие u_α и φ_α, поэтому разделение нелинейных волн на продольные и поперечные достаточно условно. Рассмотрим, однако, нелинейные волны, которые в линейном пределе превращаются в продольные [5]. Это уравнения для $\varphi\equiv\varphi_1$ и $u\equiv u_1$. Будем для краткости называть изучаемые волны продольными. Уравнения для u и φ принимают вид

$$\rho\ddot{u}=2(a_1+a_2+a_3)u''-2(a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)u''''+Q^u \tag{2.3}$$

$$\rho j\ddot{\varphi}=2(2a_{10}+a_{14})\varphi''-4(a_1-a_2)\varphi+Q^{\varphi} \tag{2.4}$$

Отметим, что линейные члены типа u''', входящие в общее уравнение (1.9) для микроповоротов, не входят в уравнение (2.4) для продольной волны.

Видно, что в линейном приближении ($Q^u = 0$, $Q^\varphi = 0$, $\rho = \rho_0$) уравнения (2.3) и (2.4) расщепляются.

Введем для удобства и согласования с работой [5] величины

$$c_1^2 = 2(a_1 + a_2 + a_3)/\rho_0, \quad c_2^2 = 2(2a_{10} + a_{14})/\rho_0 j$$
$$\delta = -2(a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8)/\rho_0, \quad \omega_0^2 = 4(a_1 - a_2)/\rho_0 j \tag{2.5}$$

Рассмотрим задачу об эволюции продольной сейсмической волны. Пусть при $t = 0$

$$u = u_1, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \tag{2.6}$$

Поперечные составляющие вектора $\mathbf{u}$ появляются лишь за счет нелинейной трансформации (наличия продольной составляющей в Q^u – нелинейных слагаемых в уравнениях для u_2 и u_3), поэтому их можно считать малыми по сравнению с $u \equiv u_1$ и рассматривать баланс масс в виде

$$\rho_0 / \rho = 1 + u' \tag{2.7}$$

Высокочастотные продольные волны микровращения в такой системе могут появиться за счет нелинейного механизма передачи энергии от продольных макродвижений к микроповоротам – так называемого длиннокоротковолнового резонанса (ДКР) [6]. При этом, разумеется, в задаче (2.6) $\varphi_1 \gg \varphi_2, \varphi_3$, так как поперечные компоненты φ_2 и φ_3 могут появиться лишь за счет ДКР с малыми поперечными составляющими u_2, u_3, а также за счет нелинейной трансформации самой компоненты $\varphi_\cdot$.

Нелинейные уравнения для продольных волн принимают, таким образом, вид

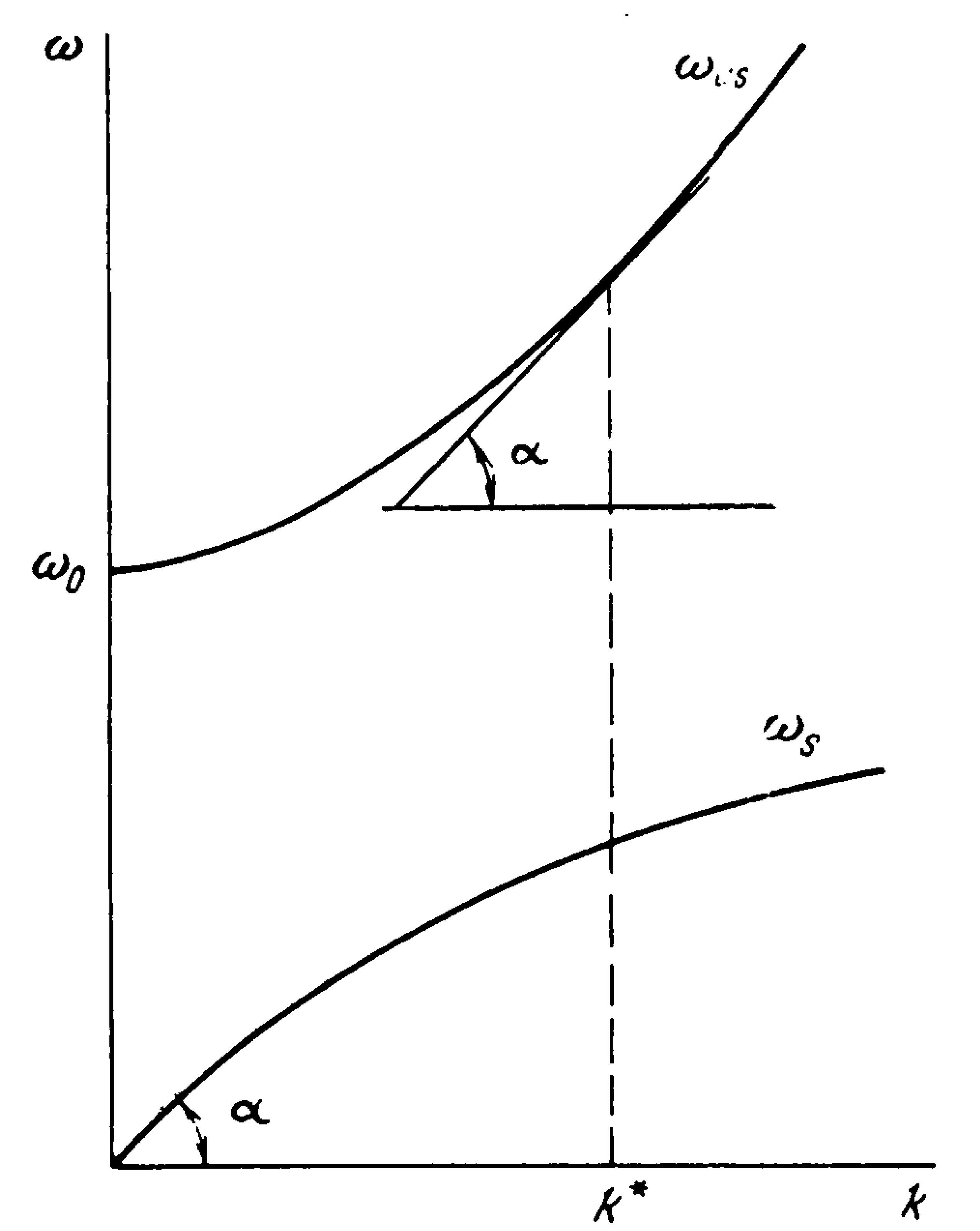
$$\ddot{u} - c_1^2 u'' - \delta u'''' - \nu u' u'' + 2\chi \varphi' \varphi + Q_*^u = 0 \tag{2.8}$$

$$\ddot{\varphi} - c_2^2 \varphi'' + \omega_0^2 \varphi - u'(c_2^2 \varphi'' - \mu \varphi) + Q_*^\varphi = 0 \tag{2.9}$$

Коэффициенты ν и χ нетрудно вычислить, группируя в Q^u слагаемые типа $u'u''$ и $\varphi\varphi'$ (см. (1.14)). Сумма оставшихся нелинейных членов Q_*^u, как показано ниже, не дает вклада в изучаемые эффекты. Аналогично группируя в Q^φ члены, пропорциональные $u'\varphi$ (см. (1.15)), вычисляем коэффициент μ в (2.9) (слагаемое Q_*^φ также оказывается несущественным в изучаемой задаче).

Система (2.8), (2.9) имеет ясную структуру.

Уравнение (2.8) – это интегрируемое уравнение Буссинеска, дополненное нелинейным членом, описывающим взаимодействие колебаний высоких и низких частот. Член со старшей производной соответствует дисперсии длинных волн. Это уравнение стандартной процедурой растяжения координат и разложения зависимой переменной по малому параметру (см., например, [6]) может быть сведено к известному одноволновому уравнению Кортевега-де Вриза, которое хорошо описывает длинные слабодиспергирующие волны смещения, однако не учитывает влияния высокочастотных осцилляций микровибраторов. Уравнение (2.9) представляет собой линейное уравнение Клейна–Гордона, дополненное билинейными составляющими, характеризующими влияние низкочастотных (сейсмических) колебаний на высокочастотные (ультразвуковые) волны. Как известно (см., например, [6]), интегрируемой моделью, к которой приводит уравнение Клейна–Гордона (с учетом нелинейных членов из Q^φ), является нелинейное уравнение Шредингера для огибающей высокочастотной волны. Это уравнение, так же как и уравнение Кортевега-де Вриза, не учитывает взаимодействия



волн разных масштабов, которое и представляет для нас основной интерес. Такое взаимодействие может быть описано в рамках модели ДКР.

3. Резонанс длинных и коротких волн. Линейные волны системы (2.8), (2.9) характеризуются дисперсионными соотношениями

$$\omega_s^2 = c_1^2 k^2 + \delta k^4 \qquad (3.1)$$

для сейсмических (индекс s) и

$$\omega_{us}^2 = c_2^2 k^2 + \omega_0^2 \qquad (3.2)$$

для ультразвуковых (индекс us) волн (фигура).

Пусть отношение $\varepsilon = k_s/k_{us}$ характерных волновых чисел сейсмических и ультразвуковых волн мало. Представим искомые переменные u и φ в виде асимптотических рядов по параметру ε, используя известную технику многомасштабных разложений [6]

$$u(\xi,\tau) = \varepsilon u^{(1)} + \ldots, \quad \varphi(x,t,\xi,\tau) = \varepsilon^q \varphi^{(1)} + \varepsilon^{q+1}\varphi^{(2)} + \ldots \qquad (3.3)$$

где $\xi = \varepsilon(x - c_g t)$, $\tau = \varepsilon^2 t$ – "медленные" координаты; $c_g = d\omega_{us}/dk$ – групповая скорость ультразвуковых волн, причем $q > 0$. Производные $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial x$ при введении нового набора независимых переменных x, t; ξ, τ преобразуются по следующему закону:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon c_g \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \qquad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.3), (3.4) в уравнение (2.4) динамики микроповоротов и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему зацепленных уравнений. Первое из них отвечает множителю ε^q и приводит к разделению быстрых и медленных переменных:

$$\varphi^{(1)} = A(\xi,\tau)e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad \theta = kx - \omega t + \theta_0 \qquad (3.5)$$

где θ_0 – произвольная постоянная, A – медленно меняющаяся комплексная амплитуда (огибающая). Искомое уравнение для A следует из уравнения для $\varphi^{(3)}$, соответствующего порядку $q + 2$:

$$\ddot\varphi^{(3)} - c_2^2 \varphi^{(3)\prime\prime} + \omega_0^2 \varphi^{(3)} = [(c_2^2 - c_g^2)\partial^2 A / \partial\xi^2 + 2ik\partial A/\partial\tau -$$

$$-VA(\omega_0^2 + k^2 c_2^2)]e^{i\theta} + \text{к.с.} + Q_*^\varphi, \quad V = \partial u^{(1)}/\partial\xi \qquad (3.6)$$

Величина, заключенная в квадратные скобки, вызывает секулярный рост рассматриваемого приближения. Условие отсутствия такого роста приводит к уравнению огибающей

$$2ikA_\tau + (c_2^2 - c_g^2)A_{\xi\xi} = (k^2 c_2^2 + \omega_0^2)VA \qquad (3.7)$$

Видно, что нелинейные члены, входящие в Q_*^φ (их структура описана в (1.15)), входят в более высокое по ε приближение и не дают вклада в секулярный рост $\varphi^{(3)}$. Следует отметить, что квадратичные по φ члены в Q_*^{φ} все же приводят к членам типа $|A|^2A$, характеризующим самовоздействие ультразвуковых волн в правой части уравнения (3.7). Их учет в дальнейшем не приводит к принципиальным изменениям. Кроме того, при изучении взаимодействия волн, отвечающих разным ветвям дисперсионного соотношения, естественно считать эти члены малыми по сравнению с учтенным билинейным слагаемым $\sim VA$.

Чтобы получить уравнение для деформации в первом приближении $V(\xi, \tau)$, следует и в уравнении (2.8) перейти к координатам ξ, τ вместо x, t:

$$(c_g^2 - c_1^2)V_{\xi\xi} - 2\varepsilon c_g V_{\tau\xi} = 2\chi\varepsilon^{2(q-1)}|A|^2_{\xi\xi} - (Q_*^u)_\xi / \varepsilon^2 \tag{3.8}$$

Оказывается, что нелинейный $\nu u'u''$ и нелокальный $\delta u''''$ члены в новых координатах малы и в (3.8) ими можно пренебречь. Кроме того, при помощи (1.14) можно показать, что в Q_*^u нет членов, которые могли бы конкурировать с учтенными, поэтому в дальнейшем слагаемым Q_*^u можно также пренебречь.

В отсутствие резонанса ($c_g \neq c_1$) второй член в левой части уравнения (3.8) оказывается намного меньше первого, что при выборе $q = 1$ дает

$$V = -2\chi(c_1^2 - c_g^2)^{-1}|A|^2 \tag{3.9}$$

Подставляя выражение (3.9) в (3.7), получаем нелинейное уравнение Шредингера для огибающей быстрого поля

$$2ikA_\tau + (c_2^2 - c_g^2)A_{\xi\xi} = -2\chi(k^2c_2^2 + \omega_0^2)(c_1^2 - c_g^2)^{-1}|A|^2 A \tag{3.10}$$

Итак, в рассмотренной нерезонансной ситуации огибающая ультразвуковой волны и медленная (сейсмическая) переменная жестко связаны алгебраическим соотношением (3.9), т.е. нижняя ветвь "копирует" верхнюю.

В случае резонанса существует некоторое значение k^*, для которого выполняется равенство

$$c_g(k^*) = c_1 \tag{3.11}$$

т.е. групповая скорость ультразвуковых волн c_g совпадает с фазовой скоростью длинных сейсмических волн: $c_s = \omega_s/k \to c_1(k \to 0)$ (фигура). Примем, что постоянная взаимодействия χ имеет порядок малости ε^p, т.е.

$$\chi = \varepsilon^p c_1 \overline{\chi}, \quad p > 0, \quad \overline{\chi} = O(1) \tag{3.12}$$

Тогда при выборе $q = (3 - p)/2$ уравнение (3.8) принимает вид

$$V_\tau = \overline{\chi}|A|^2_\xi \tag{3.13}$$

Само значение p в (3.12) определяется реальной величиной малой константы упругой связи χ.

Вводя новые переменные

$$L = V\frac{(k^*)^2c_2^2 + \omega_0^2}{2k^*}, \qquad S = A\left[\frac{|\overline{\chi}|(\omega_0^2 + (k^*)^2c_2^2)}{((c_2^2 - c_1^2)2k^*)^{1/2}}\right]^{1/2}$$
$$t' = \tau, \quad x' = \xi(2k^*)^{1/2}(c_2^2 - c_1^2)^{-1/2} \tag{3.14}$$

приходим к канонической системе длинно-коротковолнового резонанса (ДКР) (см., например, [6]):

$$2iS_t + S_{xx} = 2LS, \quad L_t = \pm|S|_x^2 \tag{3.15}$$

Знак во втором уравнении определяется знаком постоянной $\overline{\chi}$, штрихи у независимых переменных опущены. Система (3.15) возникает в различных резонансных ситуациях, например, при изучении взаимодействия ленгмюровских и ионозвуковых волн в плазме [7], а также при описании белковой α-спирали [8]. Изучались [9, 10] солитонные решения уравнений ДКР.

Рассмотрим для определенности систему (3.15) со знаком "минус" во втором уравнении. Заменой переменных

$$S = I^{1/2} e^{i\varphi}, \quad \varphi_x = w \tag{3.16}$$

эти уравнения сводятся к системе гидродинамического типа

$$\begin{gathered} I_t + (Iw)_x = 0, \quad L_t + I_x = 0 \\ w_t + [w^2/2 + L - 1/4(I_{xx}/I - I_x^2/2I^2)]_x = 0 \end{gathered} \tag{3.17}$$

Представляет интерес так называемый бездисперсионный предел, который реализуется для гладких "течений", т.е. при $I/I_x \gg 1$. Третье из уравнений (3.17) тогда принимает более простой вид

$$w_t + (w^2/2 + L)_x = 0 \tag{3.18}$$

и система (3.17), (3.18) может быть представлена в римановой форме

$$\partial r_i/\partial t + V_i(\mathbf{r})\partial r_i/\partial x = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{3.19}$$

где r_i – инварианты Римана, $V_i(\mathbf{r})$ – характеристические скорости, зависящие от всех трех инвариантов, причем суммирования по повторяющимся индексам нет.

Связь инвариантов Римана и характеристических скоростей с исходными переменными I, w, L дается соотношениями

$$r_i = L + w^2(3/2\Lambda_i - 1)\Lambda_i, \quad V_i = w\Lambda_i \tag{3.20}$$

где Λ_i – корни кубического уравнения

$$\Lambda(\Lambda - 1)^2 = I/w^3 \tag{3.21}$$

Система (3.17), (3.18) и соответственно (3.19) гиперболична, если

$$0 < I/w^3 < 4/27 \tag{3.22}$$

В этом случае огибающая генерируемой ультразвуковой волны устойчива, и для описания гладкой эволюции искомых переменных достаточно использовать систему (3.19) вместо существенно более сложной системы (3.15). Так, любые r_i = const являются точными решениями системы (3.19), что и позволяет существенно упростить ее анализ.

Если же условие (3.22) не выполняется, то "гладкий" режим быстро нарушается из-за модуляционной неустойчивости и в игру вступают старшие производные во втором уравнении системы (3.17). Огибающая ультразвукового пакета при этом сама начинает осциллировать, что приводит к ее распаду на солитоны (огибающей).

Наконец, при помощи резонансного условия (3.11) длина волны λ^* возбуждаемого ультразвука может быть выражена через материальные константы

$$\lambda^* = 2\pi c_2 (c_2^2 - c_1^2)^{1/2} / (c_1 \omega_0) \tag{3.23}$$

Иначе говоря, величина λ^* не зависит от частоты сейсмовибраций и пропорциональна внутреннему масштабу среды. Приближение ДКР будет работать тем точнее, чем строже выполняется неравенство

$$\lambda^* / \lambda_s \sim \varepsilon \ll 1$$

где λ_s – длина волны воздействия, причем

$$\lambda_s \gg \delta^{1/2} / c_1$$

Последнее условие следует из линейного дисперсионного соотношения (3.1) и означает, что наиболее эффективный резонанс достигается в области линейной дисперсии.

Для корректности замены (3.14) необходимо выполнение неравенства $c_2 > c_1$. Отношение фазовых скоростей возбуждаемого ультразвука и сейсмической волны при этом удовлетворяет соотношению

$$c_{us} / c_s = c_2^2 / c_1^2 > 1$$

что согласуется с экспериментом [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости. // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 645–751.
2. *Вильчинская Н.А., Николаевский В.Н.* Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 5. С. 91–100.
3. *Brulin O., Hjalmars S.* Linear grade-consistent micropolar theory. // Intern. J. Engng. Sci. 1981. V. 1Ͻ. № 12. P. 1731–1738.
4. *Erbay S., Suhubi E.S.* Nonlinear wave propagation in micropolar media. I, II. // Intern. J. Engng Sci. 1989. V. 27. № 8. P. 895–919.
5. *Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А.* Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6. С. 1340–1344.
6. *Dodd R.K., Elibeck J.C., Gibbon J.D., Morns H.C.* Solitons and nonlinear wave equatiory. London: Acad. Press, 1982. 630 p. М.: Мир, 1983. 694 с.
7. *Захаров В.Е.* Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 5. С. 1745–1759.
8. *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наук. думка, 1988. 303 с.
9. *Ma Y.C.* The complete solution of the long-wave – short-wave resonance equations // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. № 3. P. 201–221.
10. *Yajima N., Oikawa M.* Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons: Inverse scattering methods // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56. № 6. P. 1719–1739.

Москва

Поступила в редакцию
23.VI.1992