

УДК (532.5+539.3):534.1

© 1993 г. А.Г. Куликовский

**О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБО НЕОДНОРОДНЫМИ
ТЕЧЕНИЯМИ В ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЛАСТЯХ.
ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБЫ
С ТЕКУЩЕЙ В НЕЙ ЖИДКОСТЬЮ**

Методом ВКБ исследуется устойчивость слабонеоднородных течений.

Рассматриваются граничные условия отражения и преломления волн на линиях Стокса. Обсуждаются подходы к анализу ситуации, когда точки поворота не лежат на действительной оси при достаточно сложном строении собственных функций.

В качестве примера исследуется неустойчивость поперечных колебаний слабо неоднородной трубы с текущей в ней жидкостью. Установлено, что при определенных условиях может образоваться мода растущих колебаний, представляющая цепочку четырех волн, когда выполняется условие конвективной неустойчивости, однако локальное условие абсолютной неустойчивости не имеет места ни в одной точке. Проводится качественный анализ условий в терминах частот и волновых чисел.

В ряде работ [1, 2] предложен и использован для исследования конкретных течений "критерий глобальной устойчивости". Этот критерий основан на нахождении собственной функции, связанной с наличием кратной точки поворота на комплексной плоскости (при более детальном рассмотрении – двух близких точек поворота). При такой неустойчивости на действительной оси имеется интервал, где выполнено локальное условие абсолютной [3] неустойчивости. Этот же критерий был получен другим путем [4] из рассмотрения развития нестационарных возмущений в качестве одного из возможных вариантов перехода к неустойчивости.

Отметим, что к неустойчивости, связанной с ростом возмущения, представляющего две волны, запертые между близкими точками поворота, скорее подошел бы термин "локальная". Термин "глобальная неустойчивость" использовался ранее [3, 5] при рассмотрении устойчивости однородных течений с граничными условиями на концах отрезка большой длины. Этот термин обозначал существование растущего возмущения, представляющего собой совокупность волн, две из которых проходят через весь отрезок и отражаются от обоих его концов (в отличие от граничной или односторонней неустойчивости, когда возмущение развивается около одного из концов отрезка).

В многочисленных работах по устойчивости слабо неоднородных состояний и течений (например, [6–8]), выяснено, что моды возмущений, которые могут быть ответственны за переход к неустойчивости, представляют собой цепочки взаимно превращающихся волн, соответствующих различным волновым числам.

Аналогичный результат был получен [9] при анализе общих критериев образования собственных функций в слабо неоднородных течениях, при наличии точек на действительной оси, в которых ставятся граничные условия произвольного вида. Предполагалось [9], что задаваемые граничными условиями коэффициенты отражения и преломления волн конечны, т.е. имеют конечный предел при стремлении масштаба длины к бесконечности. Если граничные условия связаны с явлением Стокса [7, 10], т.е. со скачкообразным изменением коэффициента в ВКБ – представлении решения, то упомянутая в [9] возможность применения полученного там результата требует некоторых пояснений, если соответствующая точка поворота не лежит на действительной оси x . Эти пояснения даны ниже в разд. 1.

В разд. 2 рассматривается задача о поперечных колебаниях слабонеоднородной трубы с текущей в ней жидкостью. В отличие от ситуаций, рассматривавшихся в [1, 2], мода колебаний, соответствующая растущим возмущениям, представляет собой цепочку, состоящую из четырех волн, а локальное условие абсолютной неустойчивости не выполняется ни в одной точке. Интересно также отметить, что образование собственной функции в этом примере не связано с соединением антистоксовых линий ("линий уровня") различных точек поворота, как это бывает для уравнений второго порядка и в некоторых других случаях [6, 7, 11].

1. При изучении устойчивости во многих случаях можно считать, что возмущения зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$, после чего изучение поведения малых возмущений сводится в типичных ситуациях к изучению граничных задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Если коэффициенты линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений зависят от x/L , где L – масштаб области изменения x , предполагаемый большим, то в конечных областях изменения переменной x общее решение, согласно методу ВКБ [7, 10], представляется в виде линейной комбинации элементарных ВКБ-решений с коэффициентами C_m

$$\sum_m C_m A_m \left(\frac{x}{L} \right) \exp \left[i \int_{x_0}^x k_m \left(\omega, \frac{\xi}{L} \right) d\xi \right] \quad (1.1)$$

Здесь $k_m(\omega, x/L)$ – ветвь многозначной функции $k(\omega, x/L)$, определяемой из дисперсионного уравнения рассматриваемой системы $\Phi(\omega, k, x/L) = 0$, в которое переменная x/L входит как параметр.

Как и в [9], будем полагать, что имеется (или достаточно учитывать) только конечное число ветвей $k_m(\omega, x/L)$ ($m = 1, 2, \dots, N$), как это имеет место для решений дифференциальных уравнений. Кроме того, будем считать, что при всех ω , представляющих интерес, на комплексной плоскости x есть только отдельные точки ветвления функции $k(\omega, x/L)$. При каждом заданном m вектор $A_m(x/L)$ (с числом компонент, равным числу неизвестных), находится по методу ВКБ в виде асимптотического ряда [10].

Для решений дифференциальных уравнений, вообще говоря, не существует единого асимптотического представления общего решения вида (1.1) для всей действительной оси x или для всей комплексной плоскости x . Можно, например, упомянуть, что асимптотическое представление (1.1) можно получить для каждого из интервалов действительной оси x , на которых мнимые части всех корней $k_j(\omega, x/L)$ различны [10]. На комплексной плоскости x разрывы асимптотических представлений решений задаются на некоторых линиях, называемых линиями Стокса.

Линии Стокса выходят из точек поворота, которые определяются как точки ветвления функции $k(\omega, x/L)$ на комплексной плоскости x при заданном ω . В дальнейшем для простоты будут рассматриваться простые точки поворота, в которых при заданном ω совпадают значения двух волновых чисел: $k_p = k_q$. Будем полагать, как это обычно делается [7, 10], что в окрестности такой точки происходит существенное взаимодействие только тех элементарных ВКБ-решений, которые соответствуют k_p и k_q (в точке поворота имеет место резонансное их взаимодействие), и что происходит оно независимо от остальных элементарных ВКБ-решений. Это означает, что в окрестности точки поворота ветвящиеся ВКБ-решения ведут себя так же, как решения уравнения (или системы) второго порядка с зависимостью $k(\omega, x)$, приближающей в этой окрестности ветви $k_p(\omega, x/L)$ и $k_q(\omega, x/L)$. При этом от точки ветвления $x = A$ отходят три линии Стокса внутри каждого из секторов, в которых

$$\operatorname{Im} \int_A^x [k_p(\omega, \xi / L) - k_q(\omega, \xi / L)] d\xi \neq 0$$

На каждой из линий Стокса разрыв испытывает коэффициент в слагаемом в (1.1), содержащем меньшую по модулю из экспонент, соответствующих k_p и k_q , в которых положено $x_0 = A$, а величина разрыва пропорциональна коэффициенту в слагаемом, содержащем большую экспоненту.

Таким образом, в окрестности точки A в различных секторах имеет место различное асимптотическое представление решения при переходе из одного сектора в другой. C_p и C_q оказываются связанными друг с другом линейными соотношениями с конечными коэффициентами (коэффициенты Стокса) [7, 10], если в качестве нижнего предела интегрирования в показателях экспонент в (1.1) принимается точка поворота $x_0 = A$.

Если имеются точки поворота, не лежащие на действительной оси x , то можно попытаться деформировать ось x таким образом, чтобы новая криволинейная ось x' проходила через точки поворота, которые необходимо учитывать при построении решения. В каждой из этих точек поворота в качестве граничных условий, связывающих решения по обе стороны от нее на линии x' , будут задаваться упомянутые выше соотношения с конечными коэффициентами. Так обычно и поступают в случае уравнений второго порядка и во многих других случаях [6, 7, 11].

Условием применения этого способа построения решения является возможность так продеформировать ось x , чтобы получившаяся линия нигде, кроме точек поворота, через которые она проходит, не пересекалась линиями Стокса, идущими от этих или других точек поворота. Если такая деформация оси x возможна, то для построения собственных функций может быть использована процедура, предложенная в [9], как это сделало ниже в п. 2.

2. Рассмотрим в качестве примера неустойчивости с растущим возмущением, состоящим из более чем двух элементарных ВКБ-решений ("волн"), неустойчивость трубы с текущей в ней жидкостью, проявляющуюся в виде поперечных колебаний. Поперечное смещение трубы $w(x, t)$ в направлении какой-либо из осей координат, ортогональной невозмущенному положению оси трубы, принимаемой в качестве оси x , удовлетворяет уравнению [12]

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w = -Fw - D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (2.1)$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 – масса трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины, v – скорость жидкости, $-Fw$ – упругая восстанавливающая сила, D – жесткость трубы на изгиб. Колебания, описываемые этим уравнением, изучались [12–14] для случая однородной трубы, когда все коэффициенты в (2.1) – постоянные и $F = 0$. Было показано [14], что при $\rho_1/\rho_2 > 1/8$ неустойчивость абсолютна, а при $\rho_1/\rho_2 < 1/8$ неустойчивость конвективна. Показано также, что при выполнении критерия конвективной неустойчивости выполняется критерий глобальной неустойчивости в смысле работы [5], т.е. при наличии общего вида граничных условий, выставленных на концах достаточно длинной трубы, возникает растущая мода собственных колебаний, связанная с прохождением изгибных волн вдоль всей трубы и отражением их от ее концов.

Здесь будет рассматриваться случай неоднородной трубы с медленным изменением ее параметров и будет показано, что при определенных условиях может образоваться мода растущих колебаний, представляющая цепочку из четырех волн при условиях, когда во всех точках выполняется локальное условие конвективной неустойчивости.

Дисперсионное уравнение, соответствующее (2.1), запишем в разрешенном относительно ω виде

$$\omega = \Omega_{1,2}(k, x) \equiv Uk \mp \sqrt{Qk^4 - Pk^2 + R} \quad (2.2)$$

$$U = \frac{\rho_2 v}{\rho_1 + \rho_2}, \quad P = \frac{\rho_1 \rho_2 v^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}, \quad Q = \frac{D}{\rho_1 + \rho_2}, \quad R = \frac{F}{\rho_1 + \rho_2}$$

Будем считать сначала, что $Q = A + Bx^2$, а U, P, R, A, B – положительные постоянные, причем все они, кроме U , достаточно малы.

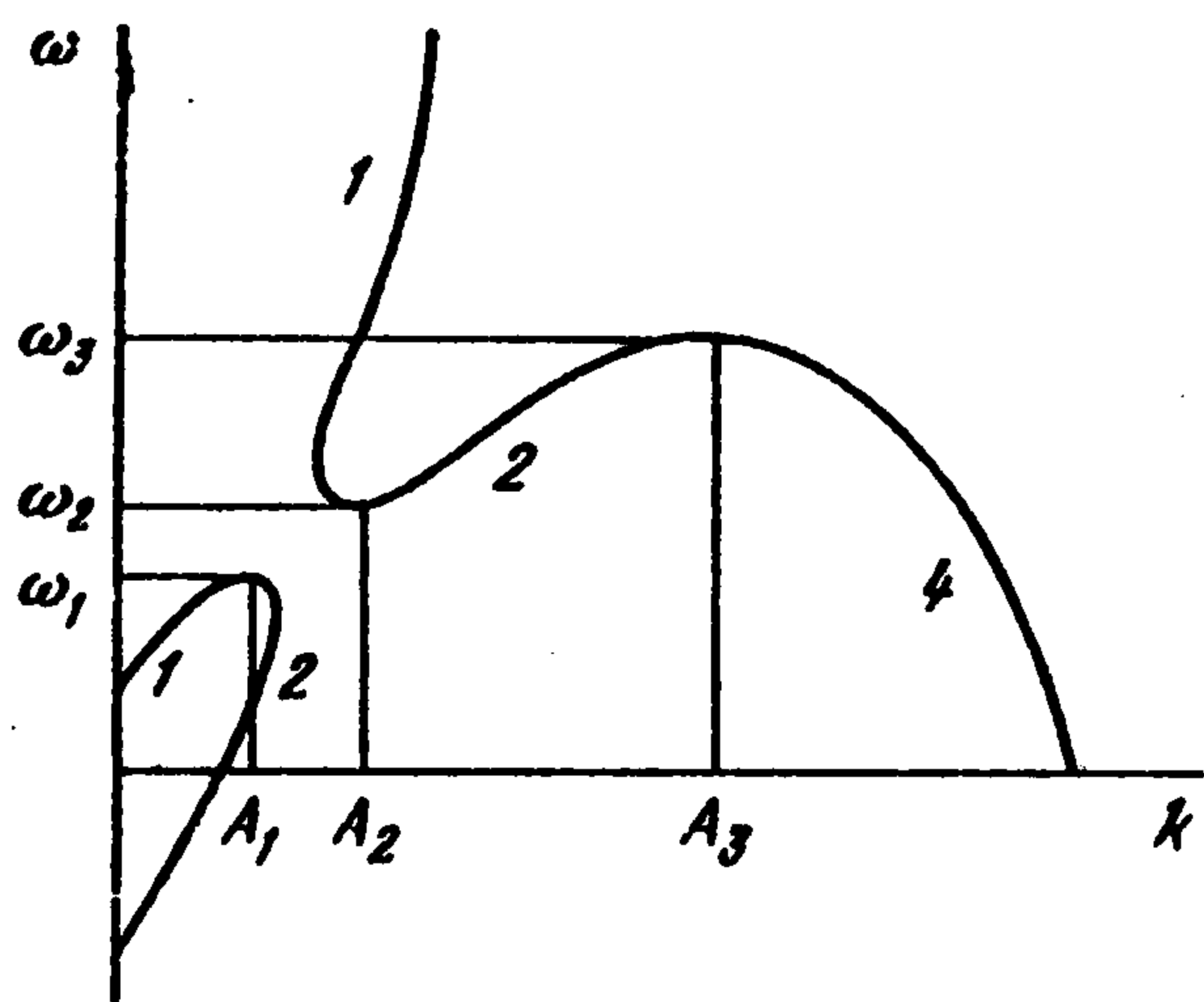
Зависимость ω от действительных k нечетна и, пусть она при $x = 0$ имеет вид, представленный на фиг. 1. В этом случае все шесть точек ветвления функции $k(\omega)$ соответствуют действительным значениям $\omega = \pm\omega_i$ ($i = 1, 2, 3$). Это означает, что график, изображенный на фиг. 1, обеспечивает выполнение локального критерия конвективной неустойчивости. С ростом x график $\omega(k)$ меняется, причем ω_1 растет, а ω_2 и ω_3 убывают. При некотором x произойдет сначала слияние ветвей графика, а затем уменьшение ω_3 вплоть до отрицательных значений. При этом, очевидно, ни при каких x не выполняется локальное условие абсолютной неустойчивости.

Зависимость $\text{Im } \Omega_1(k, 0)$ от комплексных k характеризуется фиг. 2, где изображены линии $\text{Im } \Omega_1(k, 0) = 0$. Знаками плюс и минус обозначены области положительных и отрицательных значений $\text{Im } \Omega_1$. Цифры 1–4 на фиг. 1 и 2 означают номера ветвей функции $k(\omega)$, которые занумерованы таким образом, что при $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ величина $k_m(\omega)$ стремится к бесконечности, оставаясь в m -м квадранте на комплексной плоскости k . Таким образом, k_1 и k_2 соответствуют волнам, распространяющимся направо, а k_3 и k_4 – волнам, распространяющимся налево. Жирные линии на действительной оси x на фиг. 2 изображают разрезы, на которых испытывают разрыв $\text{Im } \Omega_1$. Для второй ветви $\omega = \Omega_2(k, 0)$ справедливо равенство $\text{Im } \Omega_2(k, 0) = \text{Im } \Omega_1(-k, 0)$.

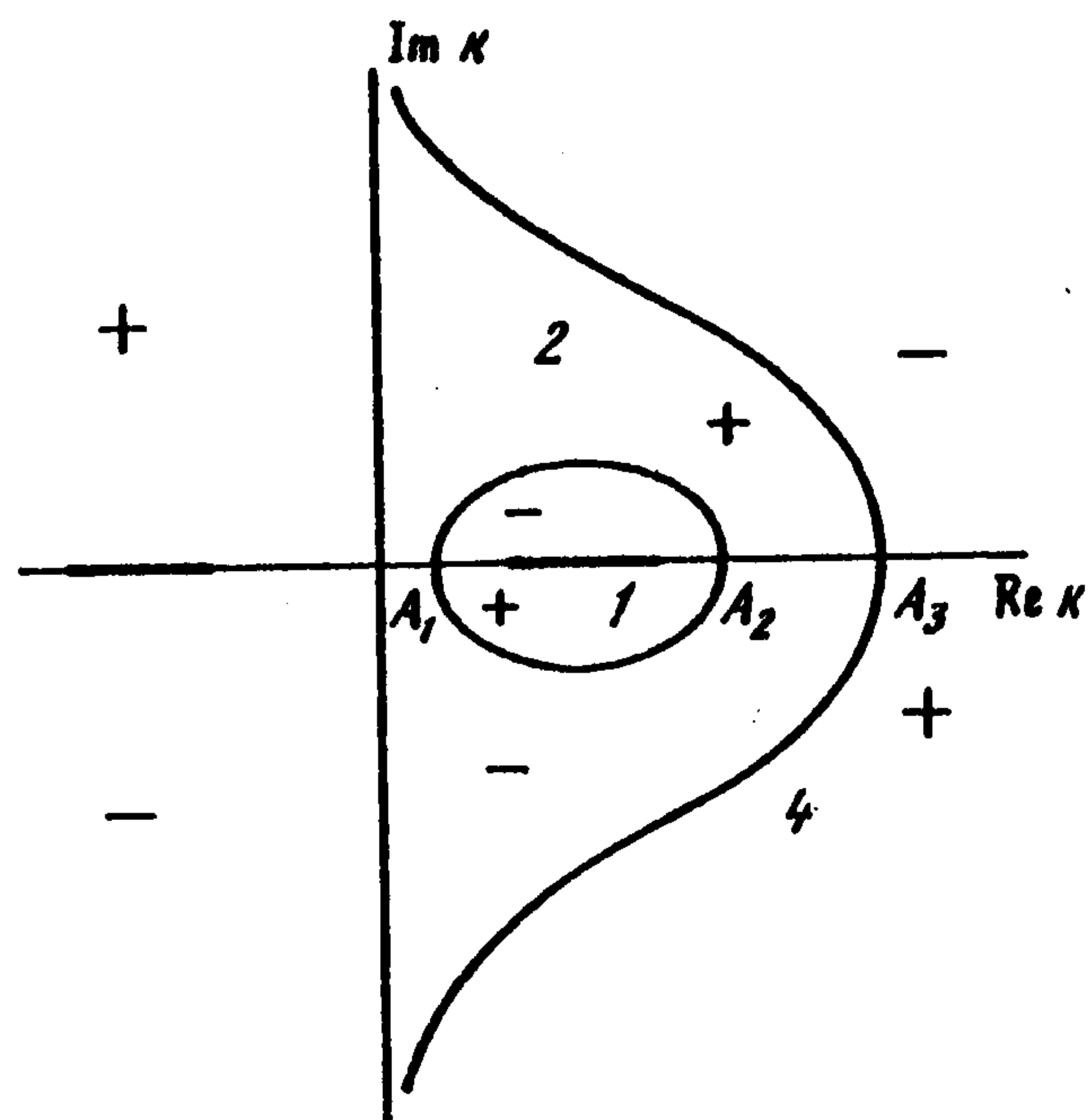
Можно проверить, что среди имеющихся ветвей функции $k(\omega)$ только у ветви $k_1(\omega)$ при $\text{Im } \omega > 0$ имеются значения с мнимой частью разных знаков. Это означает, что только эта волна при $\text{Im } \omega > 0$ может испытывать экспоненциальный рост в направлении своего распространения в соответствии с наличием в решении множителя $\exp[ij k_1(\omega, \xi/L) d\xi]$. Остальные же волны при любых ω с $\text{Im } \omega > 0$ испытывают пространственное затухание в направлении своего распространения.

Поэтому цепочка взаимно превращающихся волн, необходимая [9] для образования собственной функции при $\text{Im } \omega > 0$, может существовать только для ω , соответствующих значениям k из области 1 на фиг. 2. Можно убедиться, что упомянутая область изменения ω стягивается в точку при стремлении к нулю разности $\omega_2 - \omega_1$, которая зависит от значений входящих в постановку задачи постоянных. Если величина $\omega_2 - \omega_1$ мала, то будет мал и отрезок действительной оси x , на котором может происходить усиление волны, соответствующей k_1 , а также будет мала величина $\text{Im } k_1(\omega, x)$ на этом отрезке.

Из изложенного следует, что если величина $\omega_2 - \omega_1$ мала, то можно ожидать образования растущих собственных функций с очень малыми $\text{Im } \omega$. Поэтому рассмотрим сначала распространение волн, соответствующих действительным ω из интервала $\omega_1 < \omega < \omega_2$, так как только при этих ω волна, соответствующая k_1 , будет испытывать пространственный рост. В таком случае точки поворота будут расположены на действительной оси x . При малых x это будут точки, соответствующие на фиг. 1, 2 либо A_1 , либо A_2 , в которых $k_1 = k_2$, а при конечных x (т.е. не связанных с малостью разности $\omega_2 - \omega_1$) – точки поворота,



Фиг. 1



Фиг. 2

соответствующие на фиг. 2 точке A_3 , в которой $k_2 = k_4$. На фиг. 3 изображена ось x с двумя парами симметрично расположенных точек поворота A'_3, A_3, A'_2, A_2 .

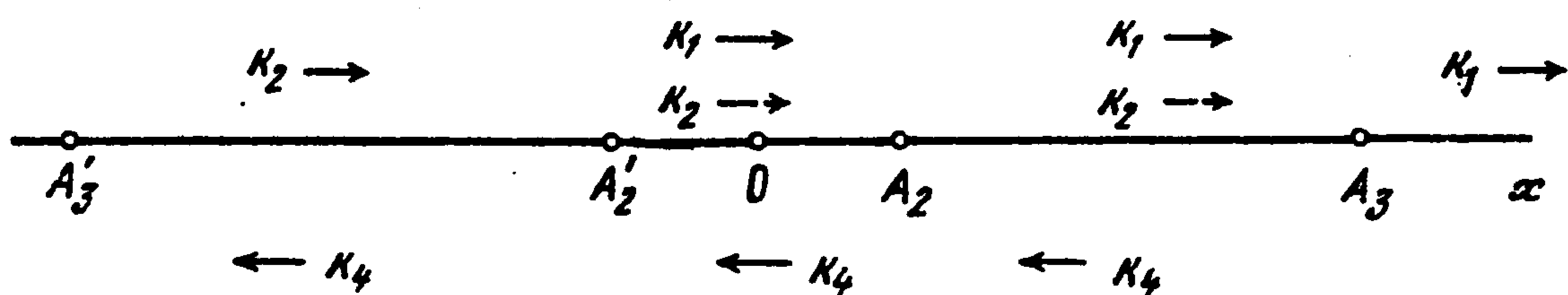
Сверху и снизу указаны волновые числа волн, распространяющихся по соответствующим отрезкам оси x , а стрелками указаны направления распространения волн. Вне отрезка $A'_3 A_3$ волны, соответствующие k_2 и k_4 , испытывают экспоненциальное затухание, и они не обозначены на фиг. 3.

Рассмотрим взаимодействие распространяющихся направо волн, соответствующих k_1 и k_2 в малой области на комплексной плоскости x , включающей точки A'_2 и A_2 . Линии уровня $\text{Im} \int [k_2(\omega, \xi/L) - k_1(\omega, \xi/L)] d\xi$ изображены на фиг. 4 при $\text{Im} \omega = 0$. Волна, соответствующая k_2 , при $x < A'_2$, превращается в точке A'_2 с конечными ненулевыми коэффициентами в волны, соответствующие комплексным k_1 и k_2 , в области $A'_2 < x < A_2$, причем первая из них усиливается с ростом x , а вторая ослабляется. В точке A_2 происходит превращение этих волн в волны с действительными k_1 и k_2 , которые распространяются правее точки A_2 . Если в левой половине окрестности точки A_2 пренебречь затухающей волной, соответствующей k_2 , то правее точки A_2 амплитуды обеих волн можно считать равными.

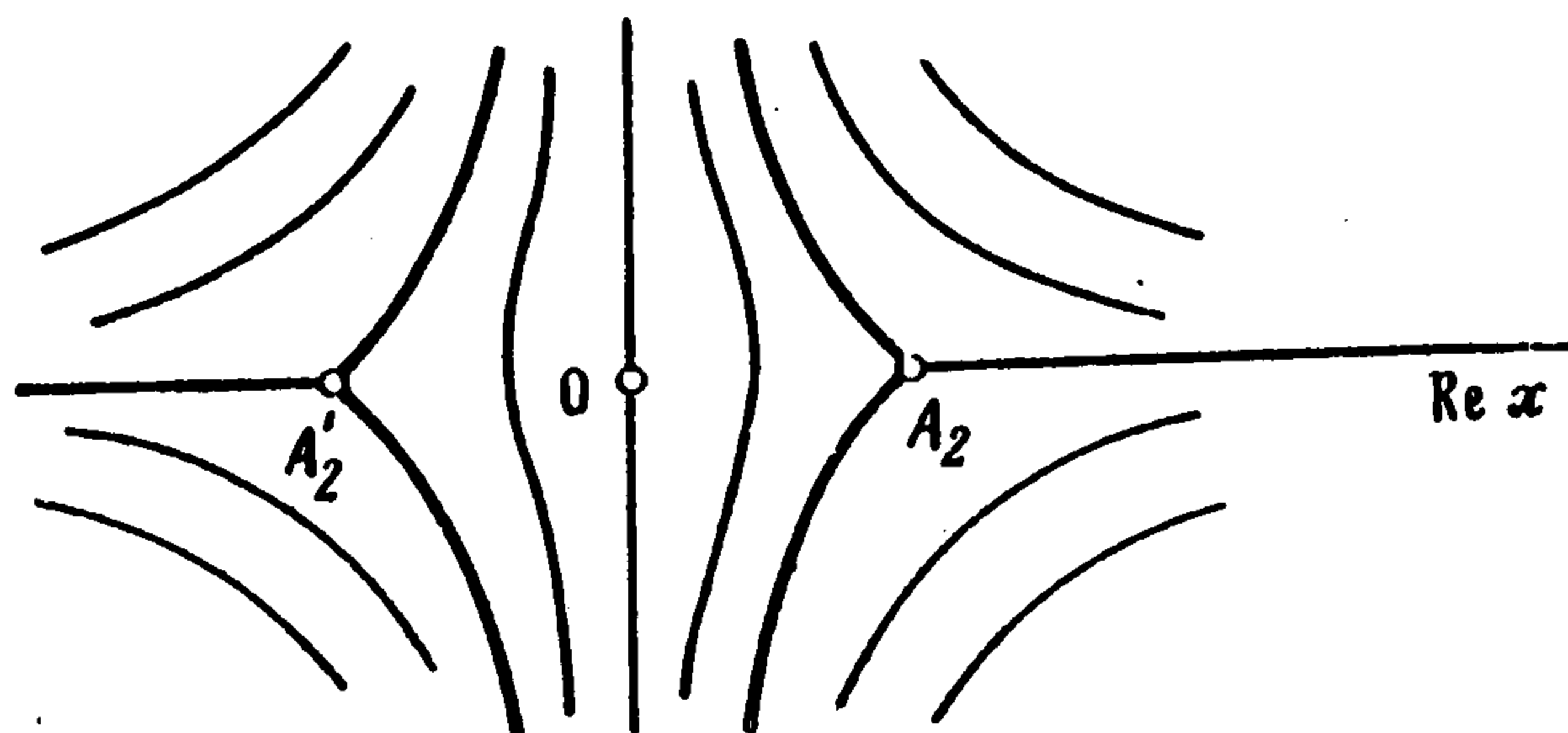
Таким образом, в результате прохождения отрезка $A'_2 A_2$, волна, соответствующая k_2 , испытывает пространственное усиление, причем главная часть изменения амплитуды этой волны определяется величиной

$$\exp \left[-\text{Im} \int_{A'_2}^{A_2} k_1(\omega, \xi/L) d\xi \right]$$

Попутно порождается волна, соответствующая k_1 , которая затем без взаимодействия с другими волнами уходит за пределы отрезка $[A'_3 A_3]$ и учитываться не будет. Система волн, соответствующих k_2 и k_4 , отражающихся от точек A_3 и A'_3 , снабжается при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ как бы усилителем на отрезке $A'_2 A_2$. Длина отрезка



Фиг. 3



Фиг. 4

$A'_2 A_2$, согласно предположению, много меньше длины отрезка $A'_3 A_3$ и показатель пространственного усиления волны, соответствующий k_1 , тоже мал, а остальные волны при малых $\text{Im } \omega > 0$ испытывают пространственное затухание, пропорциональное $\text{Im } \omega$. Поэтому легко подобрать малое $\text{Im } \omega > 0$, чтобы суммарное пространственное усиление и ослабление в цепочке волн, соответствующих k_2, k_1, k_2, k_4 , компенсировалось, и, таким образом, из этих волн стало возможным образование собственной функции.

Очевидно, что образование собственной функции в рассмотренном случае связано с наличием всех четырех точек поворота. Если при существовании точек A'_3 и A_3 менять значения постоянных коэффициентов, входящих в дисперсное уравнение, то неустойчивость возникает при удовлетворении локального условия конвективной неустойчивости в окрестности точки $x = 0$ вместе с появлением на действительности оси x точек A'_2 и A_2 . Растущие собственные колебания при этом возникают сразу на конечном отрезке $A'_3 A_3$ и состоят, как было сказано, из четырех волн.

При других зависимостях Q от x точки поворота A'_3 и A_3 при действительных ω могут быть комплексными и не создавать условий эффективного отражения волн, соответствующих k_2 и k_4 (например, при $Q = A + B \exp(-x^2/L^2)$ точки A'_3 и A_3 могут лежать на мнимой оси x). В этом случае неустойчивость не возникает при появлении на действительной оси x отрезка $A'_2 A_2$ с локальным условием конвективной неустойчивости.

Заметим в заключение, что в работе не рассматривались эффекты, связанные с неаналитичностью коэффициентов уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huerre P., Monkewitz P.A.* Local and global instabilities in spatially developing flows // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, California: Annu. Revs Inc. 1990. V. 22. P. 473–537.
2. *Monkewitz P.A.* The role of absolute and convective instability in predicting the behavior of fluid systems // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1990. V. 9. № 5. P. 395–413.
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
4. *Иорданский С.В.* Устойчивость неоднородных состояний и континуальные интегралы // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 7. С. 180–189.
5. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
6. *Рухадзе А.А., Силин В.П.* Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы // Успехи физ. наук. 1964. Т. 82. № 3. С. 499–535.
7. *Заславский Г.М., Мейтлис В.П., Филоненко Н.Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982. 117 с.
8. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 553 с.
9. *Куликовский А.Г.* Об условиях устойчивости стационарных состояний или течений в областях, протяженных в одном направлении // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 411–418.
10. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
11. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4. № 2. С. 267–277.
12. *Федосьев В.И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169–170.
13. *Мовчан А.А.* Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 760–762.
14. *Куликовский А.Г., Шикина И.С.* Об изгибных колебаниях длинной трубы, заполненной движущейся жидкостью // Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. № 1. С. 31–39.

Москва

Поступила в редакцию
17.11.1993