

УДК 533.6.011

© 1993 г. А.И. РЫЛОВ

О СТРУКТУРЕ ДОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ НЕСИММЕТРИЧНЫМ ТЕЛОМ И ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Рассматривается дозвуковое вихревое течение за отошедшей ударной волной (УВ), возникающей при сверхзвуковом плоском обтекании несимметричного тела конечной толщины. Для тел с выпуклой головной частью показана выпуклость дозвукового участка УВ и отсутствие внутренних точек ветвления в дозвуковой области между телом, УВ и изобарами, выходящими из звуковых точек УВ. Показано, что указанная область покрыта пучком изоклин, выходящих из точки торможения. Доказана выпуклость дозвукового участка УВ при обтекании возможно и не выпуклого тела при условии, что значения углов наклона стенки на головной части тела лежат вне диапазона углов ударной поляры.

Ранее, в предшествующих задачах симметричного обтекания, использовался метод изобар, основанный на анализе линий постоянного давления [1–4], и близкий к нему "модифицированный" метод годографа [5]. Как оказалось, при исследовании несимметричного обтекания необходим и метод изобар и метод, основанный на анализе линий постоянного угла наклона вектора скорости (метод изоклин). Оба метода основаны на известных свойствах изобар и изоклин [1, 6].

1. Рассмотрим некоторые соотношения и понятия, которые будут использоваться в дальнейшем.

Плоское вихревое течение идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа описывается уравнениями [1]

$$\rho q^2 \theta_L = -p_N, \quad \rho q^2 \theta_N = -p_L (M^2 - 1) \quad (1.1)$$

где p и ρ – давление и плотность, q и θ – модуль и угол наклона вектора скорости, M – число Маха, $\theta_L, p_L, \theta_N, p_N$ – производные, вычисляемые вдоль линии тока и по нормали к ней.

Следствием уравнений (1.1) являются выражения для производных θ_l и p_l , вычисляемых соответственно вдоль линий $p = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ [1]

$$\theta_l = -p_n (1 - M^2 \sin^2 \beta) / (\rho q^2) \quad (1.2)$$

$$p_l = \theta_n \rho q^2 (1 - M^2 \sin^2 \varphi) / (1 - M^2) \quad (1.3)$$

где p_n и θ_n – производные, вычисляемые по нормали к линии, соответственно, $p = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, β и φ – углы, составляемые указанными линиями с вектором скорости.

Далее под изобарой (изоклиной) будет пониматься линия $p = \text{const}$ ($\theta = \text{const}$), являющаяся также границей выбранной области повышенного или пониженного относительно рассматриваемой линии давления p (угла θ). Из соотношений (1.2) и (1.3) с учетом сказанного получаем, что в дозвуковых вихревых течениях при движении вдоль изобары (изоклины) угол θ (давление p) меняется монотонно, возможно и не строго монотонно [1]. Равенства $\theta_l = p_n = p_l = \theta_n = 0$ возможны

лишь в изолированных точках ветвления, в которых равны нулю все первые производные от p и θ .

Можно показать, что в дозвуковых течениях из изолированной точки ветвления выходит равное четное число $N \geq 4$ изобар и изоклин, при этом между двумя соседними изобарами существует одна и только одна изоклина и наоборот.

Действительно, рассмотрим окружность с центром в точке ветвления w и с достаточно малым радиусом, при котором других точек ветвления внутри окружности нет. Очевидно, что при круговом обходе точки w за изобарой, вдоль которой при движении от точки w производная $p_n > 0$, следует изобара, вдоль которой $p_n < 0$ и т.д. Следовательно из точки w выходит четное число N изобар. Для обычной точки, не являющейся точкой ветвления, $N = 2$, для точки ветвления $N \geq 4$.

Рассмотрим две соседние изобары, выходящие из точки w . Вдоль одной из них θ возрастает, вдоль другой убывает. Следовательно, между этими изобарами существует изоклина, также выходящая из точки w . Других подобных изоклин между рассматриваемыми изобарами нет, ибо в противном случае можно показать, что между двумя соседними изоклинами существует изобара, также выходящая из точки ветвления, что противоречит исходному предположению. Утверждение доказано.

Отметим также, что совершенно иная точка ветвления имеет место, если в этой точке w реализуется не одно, а некоторый диапазон значений θ . В этом случае из точки w выходит бесконечное число изоклин, вокруг точки w существует семейство замкнутых изобар и, как следствие, из самой точки w изобары в исследуемую область не выходят. Указанные ситуации реализуются во внутренних точках торможения и в течениях с замкнутыми линиями тока.

На фиг. 1 приведена ударная поляра, отвечающая равномерному сверхзвуковому потоку политропного газа. Поляра симметрична относительно оси $\theta = 0$. Точки k и k^- отвечают наибольшему $\theta = \theta_k$ и наименьшему $\theta = -\theta_k$ значениям угла θ , в точках s и $s^- M = 1$, выше (ниже) точек s и $s^- M < 1$ ($M > 1$). Для рассматриваемого политропного газа точки s и s^- лежат ниже точек k и k^- .

Отметим некоторые известные свойства изобар и изоклин в дозвуковой области, в частности сопрягающейся через УВ с равномерным сверхзвуковым потоком.

1°. Исключены замкнутые изоклины, а при отсутствии внутренних точек торможения и замкнутых линий тока также и замкнутые изобары [1, 6].

2°. Отсутствуют изобары, обе концевые точки которых лежат на УВ [1]. Исключение составляют изобары, охватывающие точку, в которой $\theta = 0$ и в которой УВ обращена выпуклостью в сторону дозвукового потока за УВ [2].

3°. Исключены изобары с концевыми точками на прямой стенке при условии, что на стенке между этими точками нет точки торможения [1, 3].

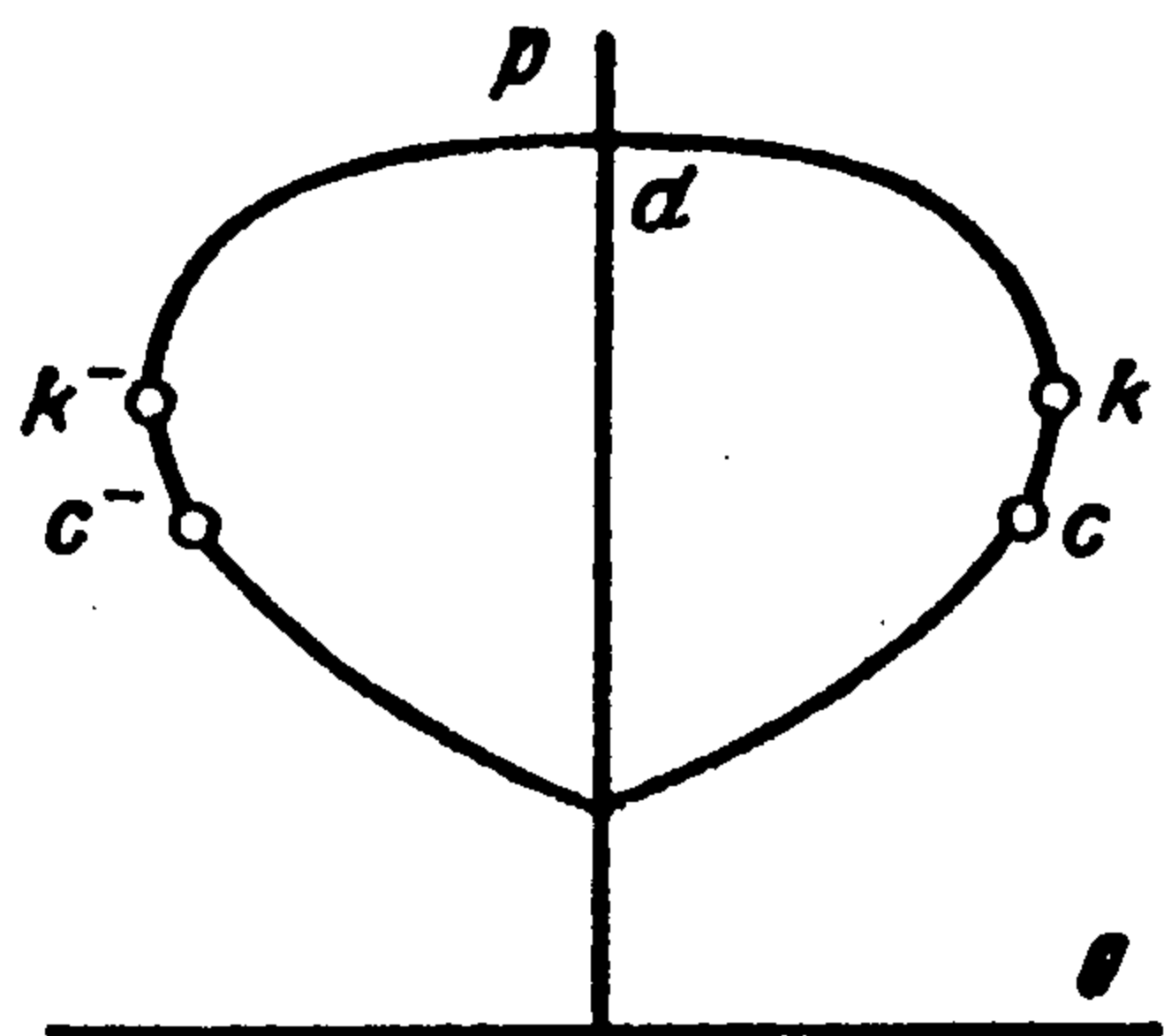
Укажем также на следующие свойства изоклин, не отмеченные ранее.

4°. Изоклина не может начинаться и заканчиваться на УВ, за исключением тех случаев, когда она охватывает точку УВ, в которой $\theta = \pm\theta_k$ и в окрестности которой ускорение отрицательно.

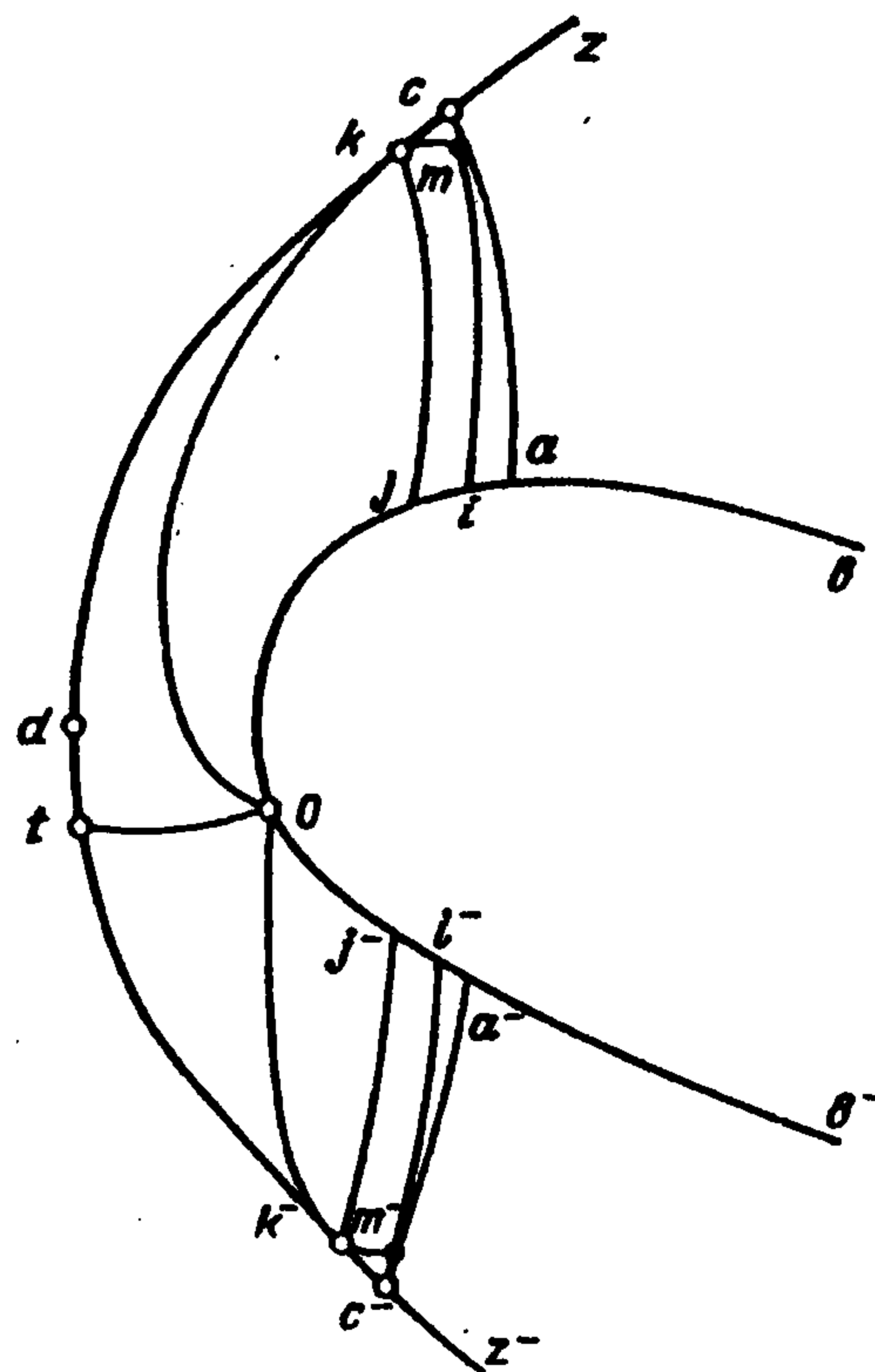
Доказательство основано на свойствах ударной поляры и монотонном изменении p вдоль изоклин.

5°. Изоклина не может начинаться и заканчиваться на прямолинейном отрезке стенки.

Действительно, в этом случае отрезок стенки между концевыми точками, при отсутствии на нем точек ветвления, также является изоклиной. Но замкнутые изоклины исключены. При наличии точки ветвления из нее в поток выходит изоклина, которая не может пересечься с исходной изоклиной и не может вновь выйти на стенку, так как при этом снова возникает замкнутая изоклина.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отмеченные свойства изобар и изоклин будут использованы ниже.

2. Рассмотрим плоское обтекание несимметричного тела с выпуклой головной частью равномерным горизонтальным сверхзвуковым потоком, набегающим слева, фиг. 2. Здесь b^-b – контур тела, z^-z – отошедшая ударная волна (УВ), c^-a^- и ca – звуковые линии, iO – разделительная линия, O – точка торможения.

Головная часть тела предполагается достаточно гладкой, без угловых точек, так что в области c^-a^- и ac нет местных сверхзвуковых зон и замкнутых линий тока. Очевидно, в этой области нет и внутренних точек торможения.

В дальнейшем будет исследоваться в основном не вся дозвуковая область c^-a^-Oac , а большая ее часть c^-i^-Oic , где c^-i^- и ci – изобары. Учитывая, что энтропия в точках c^- и c не превосходит значение энтропии в любой точке дозвукового участка УВ, можно показать, что на c^-i^- и ci $M \leq 1$ [2]. Следовательно, в соответствии со сказанным выше, вдоль c^-i^- значение θ монотонно убывает, а вдоль ci возрастает.

Теорема 1. Пусть участок i^-i рассматриваемого тела является выпуклым, т.е. при движении от точки i^- к точке i угол наклона стенки монотонно (не обязательно строго монотонно) убывает и на нем допустимые прямолинейные участки. Тогда дозвуковое течение между телом и УВ обладает следующими свойствами.

1°. При движении вдоль УВ от точки c^- к точке a , в которой $\theta = 0$, давление монотонно возрастает, а затем, на участке dc , убывает. Как следствие, участок c^-c является выпуклым.

2°. В области c^-i^-ic нет внутренних точек ветвления изобар и изоклин.

Доказательство. Рассмотрим поведение θ вдоль контура c^-i^-Oic с учетом известного решения в бесконечно малой окрестности точки торможения [7]. Вдоль контура, c^-i^-O θ убывает, причем вдоль i^-O возможно не строго монотонно (при наличии прямолинейных участков стенки). В точке O θ возрастает от величины $\theta = \theta_0 - \pi$ до $\theta = \theta_0$, причем каждому значению θ из сказанного диапазона отвечает одна изоклина, составляющая в точке O угол $\omega = 2\theta_0 - \theta$ с

осью x . И, наконец, вдоль контура Oic θ снова убывает, причем на стенке Oi возможны прямолинейные участки, вдоль которых $\theta = \text{const}$. Такое поведение θ вдоль $c^{-i}Oic$ играет существенную роль в дальнейших рассуждениях.

Вдоль дозвукового участка $c^{-}c$ УВ p и θ , связанные ударной полярой, меняются непрерывно. Поэтому на участке $c^{-}c$ существует по крайней мере одна точка, в которой $\theta = \theta_k$ и в окрестности которой производная p_τ , вычисляемая вдоль $c^{-}c$, отрицательна. В соответствии с отмеченными выше свойствами изоклин данная точка не охватывается изоклинами, начинающимися и заканчивающимися на УВ. Учитывая, что в этой точке производная $\theta_\tau = 0$, делаем вывод, что из нее в дозвуковую область выходит не менее двух изоклин. Эти изоклины не могут выйти на дозвуковой участок УВ и не могут оборваться внутри дозвуковой области течения. Они могут выйти лишь на контур $c^{-i}Oic$. Даже если значению $\theta = \theta_k$ на этом контуре отвечает прямолинейный участок стенки, то и тогда, в соответствии со свойствами изоклин, на этот участок из рассматриваемой точки может выйти лишь одна изоклина. Следовательно, на дозвуковом участке УВ существует лишь одна точка k , в которой $\theta = \theta_k$ и в окрестности которой $p_\tau < 0$, и из этой точки выходят две изоклины, одна из которых приходит в точку торможения O , а другая на контур Oic (фактически речь идет об одной изоклине, касающейся в точке k УВ).

Аналогично определяется и точка k^{-} . Обе точки и изоклины Okt и $Ok^{-}t^{-}$ приведены на фиг. 2. Для дальнейшего совершенно не существенно, лежат ли точки t и t^{-} на изобарах, как на фиг. 2, или на теле. В любом случае вдоль отрезков tc и $t^{-}c^{-}$ θ меняется монотонно.

На УВ между точками k и k^{-} $p \geq p_k$. Следовательно, учитывая сказанное выше, изоклины, выходящие из точек отрезка $k^{-}k$, приходят лишь в точку торможения O , что в свою очередь доказывает монотонное возрастание θ вдоль отрезка $k^{-}k$, монотонное возрастание p на отрезке $k^{-}d$ и монотонное убывание p на отрезке dk и, как следствие, выпуклость УВ на отрезке $k^{-}k$.

Правее точки k при немонотонном изменении p возможны изоклины, начинающиеся и заканчивающиеся на отрезке kc . Поэтому метод изоклин, использованный выше, не эффективен при исследовании отрезка kc . Для него более подходящим является метод изобар, использованный ранее в задачах симметричного обтекания [1-4].

Покажем, что из точки k выходит лишь одна изобара. Действительно, в противном случае, при $p_\tau = 0$ в точке k из этой точки выходит не менее трех изобар, причем при движении от точки k вдоль крайних изобар $p_n < 0$ и, как следствие, вдоль них θ возрастает. В этих рассуждениях учтено, что $p_\tau < 0$ в окрестности точки k . Далее крайние изобары, вдоль которых $\theta > \theta_k$, могут выйти лишь на стенку Oi . Между указанными изобарами существует по крайней мере одна изобара, вдоль которой θ убывает, и она также должна выйти на выпуклую стенку Oi , что исключено. Аналогично исследуется и точка k^{-} .

Итак, из точек k и k^{-} выходят изобары kj и $k^{-}j^{-}$ и в точках j и j^{-} имеем соответственно $\theta > \theta_k$ и $\theta < -\theta_k$. Из этих неравенств следует и оценка для угла наклона стенки в точке торможения

$$\theta_k < \theta_0 < \pi - \theta_k.$$

Допустим, что на отрезке kc p меняется не монотонно. Тогда на kc можно выбрать точки f и g с равными значениями p и θ , но с разными значениями p_τ .

В точке g , расположенной правее, $p_c < 0$, в точке f $p_c > 0$. В результате вдоль изобары выходящей из точки g , θ возрастает, а вдоль изобары, выходящей из точки f , θ убывает, и эта изобара выходит на тело правее точки j , т.е. она не может выйти на отрезок Oi^- , на котором $\theta < 0$. Но для выпуклого тела рассмотренная ситуация исключена. Аналогично исследуется и отрезок k^-c^- , что и завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Из предыдущих рассуждений видно, что на изоклинах Okm и Ok^-m^- нет точек ветвления. Это обстоятельство позволяет доказывать отсутствие точек ветвления внутри области s^-i^-ic отдельно для областей kcm , $k^-c^-m^-$, $Okmi$, $Ok^-m^-i^-$ и Okk^- .

Пусть, например, некоторая внутренняя точка области $Okmi$ является точкой ветвления. Тогда из нее выходят не менее чем четыре изобары и четыре изоклины. Выходящие из точки ветвления изоклины не могут выйти на изоклину Okm , поскольку на ней нет точек ветвления. Но на контур Oim , даже с учетом возможных прямолинейных участков стенки, и в точку торможения могут прийти лишь две из четырех (или более) изоклин, выходящих из точки ветвления. Следовательно, из любой внутренней точки области $Okmi$ выходят лишь две изоклины, а значит, и две изобары или, что то же самое, через каждую внутреннюю точку области $Okmi$ проходит лишь одна изоклина и одна изобара.

Аналогично можно показать отсутствие точек ветвления и в областях $Ok^-m^-i^-$, Ok^-k , kmc , $k^-c^-m^-$, чем и завершается доказательство теоремы.

Следствие 1. В области s^-i^-ic отсутствуют замкнутые изобары и изоклины и, как следствие, отсутствуют внутренние точки локального экстремума p и θ . Следовательно, второе утверждение теоремы 1 указывает на то, что ни в одной внутренней точке рассматриваемой области невозможно одновременное равенство нулю производных $p_x, p_y, \theta_x, \theta_y$.

Заметим также, что полученные результаты, как и результаты [4], относящиеся к дозвуковому симметричному обтеканию выпуклого тела, демонстрируют взаимосвязь между граничными условиями и таким свойством течения, как отсутствие внутренних точек ветвления.

Следствие 2. Область течения $imkk^-m^-i^-$ полностью покрывается пучком изоклин, выходящих из точки торможения O . Вдоль каждой из изоклин давление монотонно убывает.

Так же как и в симметричном случае [3], выпуклость головной части тела является достаточным, но не обязательным условием для выпуклости дозвукового участка УВ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть на возможно и не выпуклом теле $\theta > \theta_k$ и $\theta < -\theta_k$ на участках соответственно Oi и Oi^- , фиг. 2. (Данное условие выполнено, например, если правой границей головной части тела являются выпуклые угловые точки, левее которых $\theta > \theta_k$ и $\theta < -\theta_k$ соответственно выше и ниже точки торможения. В этом случае в зависимости от формы тела звуковые линии выходят из угловых точек или из точек, расположенных левее них.) При выполнении указанных условий на дозвуковом участке УВ давление p монотонно возрастает (убывает) вдоль s^-d (dc) и, как следствие, дозвуковой участок УВ s^-c является выпуклым.

Доказательство практически повторяет доказательство первого утверждения теоремы 1. Лишь при анализе отрезков kc и k^-c^- требуется противоречие получается при рассмотрении изобар, выходящих из точек с предполагаемым отрицательным ускорением.

Автор благодарит фонд Сороса за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский А.А.* О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
2. *Рылов А.И.* О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95–99.
3. *Рылов А.И.* О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 780–786.
4. *Рылов А.И.* О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 386–391.
5. *Шифрин Э.Г.* О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 158–162.
6. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.II.1993