

УДК 533.6.011

© 1993 г. Г.И. Назаров

НОВЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Без применения метода аппроксимаций построены двучленные приближенные решения уравнений газовой динамики в переменных годографа скорости как для дозвукового течения, содержащего произвольную аналитическую функцию комплексного переменного и звуковую (критическую) точку, так и для сверхзвукового движения, имеющего две произвольные функции от характеристических переменных и звуковую точку. На примере производится сращивание этих решений на звуковой линии при трансзвуковом движении.

1. Основные формулы. Известно [1], что потенциал скорости ϕ и функция тока ψ при установившемся адиабатическом движении идеального газа в переменных годографа τ, θ удовлетворяют несимметричной линейной системе уравнений в частных производных с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + P \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - Q \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0,$$

$$P = \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)^{\beta+1}}, \quad Q = \frac{2\tau}{(1 - \tau)^\beta} \quad (1.1)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \tau = \frac{v^2}{v_{\max}^2}$$

v – модуль скорости; v_{\max} – предельная скорость потока, γ – показатель адиабаты Пуассона (для атмосферного воздуха $\gamma = 1,4025$).

Переход к физическим координатам x, y осуществляется по формуле

$$dz = (d\phi + i\rho_0 \rho^{-1} d\psi) v^{-1} e^{i\theta} \quad (z = x + iy) \quad (1.2)$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta, \quad M = \frac{v}{a_*} = [2\beta\tau / (1 - \tau)]^{1/2}$$

(ρ – плотность, ρ_0 – характерная плотность, a_* – скорость звука).

Обычно [2, 3] в системе (1.1) переходят к новой переменной $\sigma = \sigma(\tau)$ и сводят ее к симметричному виду, содержащему один коэффициент – функцию Чаплыгина $K = PQ$, неявно зависящую от σ .

Построим приближенные решения для системы уравнений (1.1).

2. Дозвуковое течение. При дозвуковом движении ($P > 0, 0 \leq \tau < \tau_*$) уравнения (1.1) – эллиптического типа. Значению $\tau_* = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ отвечает критическая точка, в которой скорость потока равна скорости звука.

При дозвуковом течении ($\tau < \tau_*$) методом разделения переменных для системы (1.1) построено [1] точное общее решение и соответствующие многочленные струйные краевые задачи [4] для ϕ и ψ в виде сходящихся рядов, содержащих

гипергеометрические функции Гаусса. Предложены [5] точные общие решения для симметричной системы уравнений газовой динамики в переменных σ, θ в виде интегральных и дифференциальных рядов, содержащих произвольную аналитическую функцию комплексной переменной.

Различные приближенные решения для симметричных уравнений газодинамики основываются на аппроксимации функции Чаплыгина [3, 6].

Построим приближенное решение для системы уравнений (1.1) в виде дву-членного интегрального оператора [5]

$$\begin{aligned}\varphi &= c_1\theta - c_2 \int_{\tau_*}^{\tau} P d\tau + \operatorname{Re}[\alpha(\tau)w(\zeta) + A \int w(\zeta) d\zeta] \\ \psi &= c_1 \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{d\tau}{Q} + c_2\theta + \operatorname{Im}[\beta(\tau)w(\zeta) + B \int w(\zeta) d\zeta] \\ \zeta &= s + i\theta, \quad \left(s = \int_{\tau_*}^{\tau} \left(\frac{P}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ – непрерывные функции от одной переменной τ ; A, B – постоянные, $w(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция комплексного аргумента ζ .

Внося соответствующие производные от (2.1) в равенства (1.1) и, используя известные свойства аналитических функций комплексной переменной, записываем:

$$\operatorname{Re} \Delta_1(\tau)w - \left(\frac{P}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta(\tau)w' = 0, \quad \operatorname{Im} \Delta_2(\tau)w + \Delta(\tau)w' = 0\tag{2.2}$$

$$\Delta_1(\tau) = \alpha' - A \left(\frac{P}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} - BP$$

$$\Delta_2(\tau) = A + Q\beta' - B(PQ)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta(\tau) = \alpha - \beta(PQ)^{\frac{1}{2}}$$

Эти равенства удовлетворятся тождественно при произвольной функции $w(\zeta)$, если наложить условия

$$\Delta_1(\tau) = 0, \quad \Delta_2(\tau) = 0, \quad \Delta(\tau) = 0\tag{2.3}$$

Из первых двух дифференциальных равенств (2.3) функции α и β определяются с точностью до аддитивных постоянных интегрирования. Эти постоянные можно опустить как несущественные для оператора (2.1) или наоборот воспользоваться ими таким образом, чтобы в критической точке τ_* выполнялись равенства $\alpha(\tau_*) = \beta(\tau_*) = 0$. Тогда при любом показателе γ получим выражения

$$\alpha = -BI_1 + AI_3, \quad \beta = -AI_2 + BI_3\tag{2.4}$$

В дальнейшем в расчетах принято $\gamma = 1,4$. Входящие сюда интегралы выражаются в аналитической форме

$$I_1 = \int_{\tau_*}^{\tau} P d\tau = t^{-1} + \frac{t^{-3}}{3} - t^{-5} - \operatorname{Arth} t \Big|_{t_*}^t$$

$$I_2 = \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{d\tau}{Q} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \operatorname{Arth} t \Big|_{t_*}^t$$

$$I_3 = \int_{\tau_*}^{\tau} \left(\frac{P}{Q} \right)^{1/2} d\tau = \sqrt{6} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{6}{5}} t - \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{6t^2 - 5}}{t} \Big|_{\tau_*}^{\tau} \quad (2.5)$$

$$t = \sqrt{1 - \tau}$$

Все функции (2.5) строго отрицательны и монотонно возрастают от $-\infty$ до 0, а функция $s = -I_3$ убывает от ∞ до 0.

Постоянные A и B в (2.4) можно подобрать так, чтобы параметр $\Delta(\tau)$ (2.3) на всем интервале $0 \leq \tau \leq \tau_*$ был близок к нулю $\Delta(\tau) \approx 0$, и этой невязкой-уклонением от нуля практически можно пренебречь. Полученное таким образом приближенное решение (2.1), (2.4) системы (1.1) в литературе не встречается.

Вычисление значений функций α , β , s , Δ , M осуществлялось при сохранении шести значащих цифр после запятой при $A = 0,829223$, $B = 0,866714$ (в табл. 1 они приведены с точностью до четвертого знака). Функция $\alpha(\tau) < 0$, а $\beta(\tau) > 0$. При этом $\alpha(\tau_*) = \beta(\tau_*) = 0$ и $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ (бесконечные значения величин (2.5) в точке торможения $\tau = 0$ приводятся к нулю в (2.4)).

При решении прямых краевых задач функцию $w(\zeta)$ возьмем в виде сходящегося экспоненциального ряда

$$w(\zeta) = \sum (A_n e^{n\omega\zeta} + B_n e^{-n\omega\zeta}) \quad (2.6)$$

в котором ω , A_n , B_n – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий. Здесь и далее суммирование ведется от $n = 1$ до $n = \infty$.

При учете (2.6) формулы (2.1) запишем в виде:

$$\varphi = c_1 \theta - c_2 \int_{\tau_*}^{\tau} P \cdot t \tau + \sum \{ A_n [\alpha + (n\omega)^{-1} A] e^{n\omega s} + B_n [\alpha - (n\omega)^{-1} A] e^{-n\omega s} \} \cos n\omega \theta \quad (2.7)$$

$$\psi = c_1 \int_{\tau_*}^{\tau} Q^{-1} d\tau + c_2 \theta + \sum \{ A_n [\beta + (n\omega)^{-1} B] e^{n\omega s} + B_n [B(n\omega)^{-1} - \beta] e^{-n\omega s} \} \sin n\omega \theta$$

В качестве простейшего примера рассмотрим в расширенной постановке классическую задачу [1] о симметричном истечении газа из щели шириной $2H$ сосуда, ограниченного двумя плоскими полубесконечными стенками, образующими между собой угол 2λ . С краев щели со скоростью, равной скорости звука, срываются свободные струи, уходящие вниз по потоку на ∞ и образующие там поперечное сечение шириной $2h$. Начало координат находится на оси симметрии ox в сечении щели.

Таблица 1

τ	$M \times 10^3$	$-\alpha \times 10^4$	$\beta \times 10^4$	$-s$	$\Delta \times 10^4$
0	0	0	0	∞	0
0,01	225	47	250	1,141741	203
0,03	393	230	433	0,618688	200
0,05	513	287	491	0,390833	196
0,07	613	295	500	0,251754	178
0,09	703	270	473	0,157140	155
0,11	786	219	413	0,090168	123
0,13	864	146	318	0,043025	81
0,15	939	59	178	0,012218	32
$1/6$	1000	0	0	0	0

В силу симметрии рассмотрим нижнюю часть течения, в которой $\theta > 0$. Этот поток ограничен линией тока $\psi = -Q$ (Q – полурасход газа) и $\psi = 0$ – линией симметрии потока.

Имеем следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \psi = 0: \quad \theta = 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_* \\ \psi = -Q: \quad \theta = \lambda, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_* \\ \psi = -Q: \quad 0 \leq \theta \leq \lambda, \quad \tau = \tau_* \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для решения задачи запишем (2.7) при $c_1 = 0$ и $A_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$\varphi = -c_2 \int_{\tau_*}^{\tau} P d\tau + \sum B_n [\alpha - (n\omega)^{-1} A] e^{-n\omega s} \cos n\omega\theta \quad (2.9)$$

$$\psi = c_2\theta + \sum B_n [B(n\omega)^{-1} - \beta] e^{-n\omega s} \sin n\omega\theta$$

Полагая $c_2 = -Q/\lambda$, $\omega = \pi/\lambda$, удовлетворим два первых условия (2.8). Удовлетворится и третье условие, ежели функцию $f(\theta) = Q(\theta/\lambda - 1)$ разложим в ряд Фурье по $\sin n\omega\theta$ на интервале $0 \leq \theta \leq \lambda$, и затем обычным путем найдем B_n

$$B_n = 2Q(B\lambda)^{-1} \left[(-1)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n\pi} \right) - 1 \right] \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Отметим, что функция ψ (2.9) при $c_2 = 0$ и

$$B_n = 2Q \left(1 - \cos \frac{n\pi\mu}{\lambda} \right) (B\lambda)^{-1} \quad (2.11)$$

будет характеризовать задачу о симметричном струйном обтекании клина струей газа, имеющей на ∞ и на срывающихся с концов щек клина скорости, равные скорости звука.

В (2.11) λ – угол верхней щеки клина, μ – угол свободной струи вниз по потоку на ∞ , которые они составляют с осью симметрии ox .

Заметим, что в критической точке $\tau = \tau_*$ ($\alpha(\tau_*) = \beta(\tau_*) = s(\tau_*) = 0$) для задачи (2.8), (2.9) φ и ψ равны

$$\varphi(\tau_*, \theta) = A \sum (n\omega)^{-1} B_n \cos n\omega\theta \quad (2.12)$$

$$\psi(\tau_*, \theta) = c_2\theta + B \sum (n\omega)^{-1} B_n \sin n\omega\theta$$

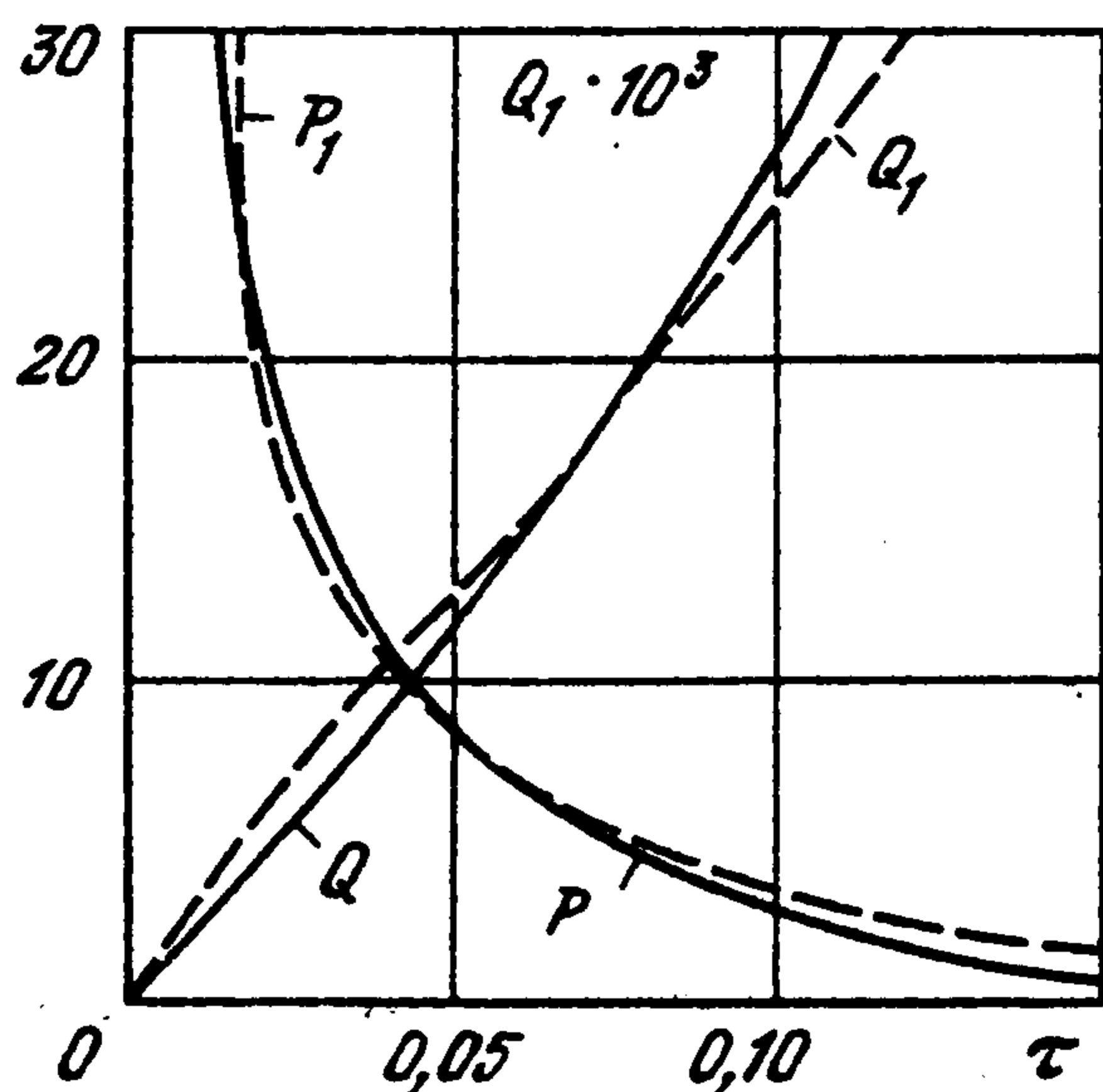
3. Парадокс аппроксимации. Равенство $\Delta(\tau) = 0$ (2.3) можно выполнить точно, если входящие в него значения P , Q заменить, например, на функции сравнения P_1 , Q_1

$$P \approx P_1 = a\tau^{-p}, \quad Q \approx Q_1 = b\tau^q \quad \left(q = \frac{4-p}{3} \right) \quad (3.1)$$

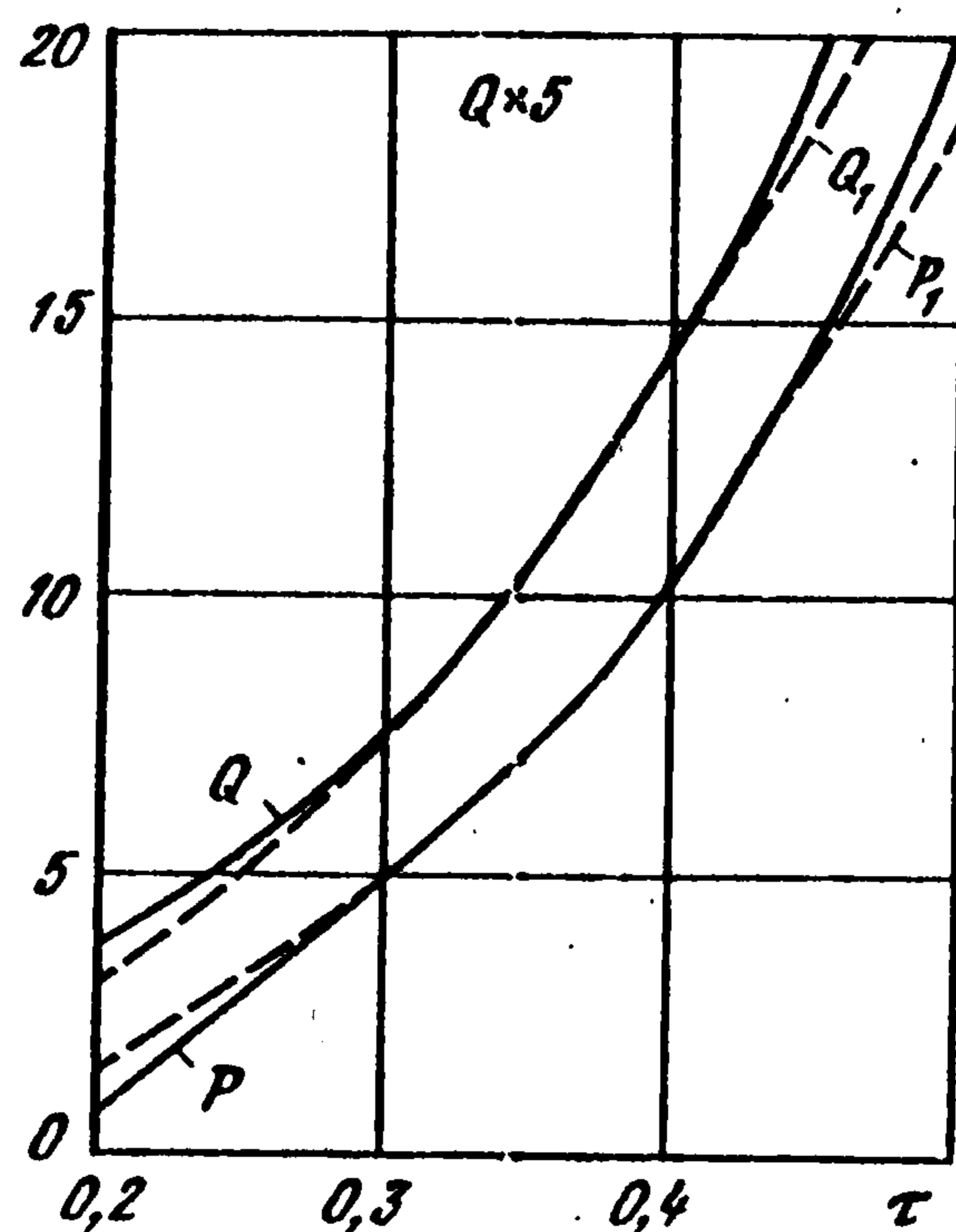
(a , b , p – положительные числа).

Внося (3.1) в уравнения (2.3), опуская постоянные интегрирования как несущественные, получим для функций (2.4) и $\Delta(\tau)$ равенства:

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{a\tau^{1-p}}{1-p}, \quad I_2 = \frac{\tau^{1-q}}{b(1-q)}, \quad (PQ)^{1/2} = (ab)^{1/2} \tau^{\frac{q-p}{2}} \\ I_3 = 2 \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} \frac{\tau^{1-\frac{p+q}{2}}}{2-p-q} \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\Delta(\tau) = A \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \tau^{1-\frac{p+q}{2}} \left(\frac{2}{2-p-q} + \frac{1}{1-q} \right) - B \alpha \tau^{1-p} \left(\frac{1}{1-p} + \frac{2}{2-p-q} \right) = 0$$

Уравнение $\Delta(\tau) = 0$ удовлетворяется при

$$B = 0, \quad q = (4 - p)/3 \quad (3.3)$$

Этот случай удобен для аппроксимации двух функций P, Q .

Два других случая 1) $aB = A \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}, p = q$ и 2) $A = 0, q = 4 - 3p$ непригодны для подобной аппроксимации.

На фиг. 1 сплошной линией изображены графики функций P, Q (1.1) и пунктирной – графики функций (3.1) для случая (3.3) при $p = 1,22, a = 0,20, b = 2,08$. Значения для Q нанесены с увеличением в 10^3 .

Подсчетом легко убедиться, что здесь возникает своеобразный парадокс аппроксимации, состоящий в том, что на участке $0,05 \leq \tau \leq 0,11$, на котором аппроксимации функций P и Q функциями (3.1) удовлетворительны, параметр же $\Delta(\tau)$ (2.3) при тех же условиях (постоянные интегрирования опущены) для точных значений P и Q значительно отличается от нуля, этот параметр монотонно возрастает от $\Delta(0) = -\infty$ до $\Delta(\tau_*) = 0$. На рассматриваемом же участке он принимает значения $\Delta(0,05) = -1,1, \Delta(0,11) = -0,42$, то есть значительно уклоняется от нуля. Это расхождение, по-видимому, может возникнуть, если аппроксимация (3.1) выйдет за рамки классификации групповых свойств дифференциальных уравнений, установленной [7] для функции Чаплыгина, входящей в уравнение второго порядка для функции тока ψ .

Такой парадокс можно устранить, положив, например, постоянную $A = 0,01$, от которой, однако, аппроксимация не зависит. В таком случае вообще отпадает надобность в аппроксимации (3.1) и в необходимости рассматривать случай (3.3) в газодинамике. С другой стороны, возник дополнительный "механизм" для оценки аппроксимации.

4. **Сверхзвуковое движение.** При сверхзвуковом потоке газа ($P < 0, \tau_* \leq \tau <$

τ_1) система уравнений (1.1) становится гиперболической

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - Q \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0 \quad (4.1)$$

$$\chi = -P = \frac{(2\beta + 1)\tau - 1}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}, \quad Q = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}$$

Для симметричных уравнений сверхзвуковой газодинамики известны (например, [2, 3, 6]) приближенные решения, полученные на основе аппроксимации функции Чаплыгина, неявно зависящей от $\sigma = \sigma(\tau)$.

По аналогии с (2.1) ищем решение системы уравнений (4.1) в виде конечного интегрального оператора

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1 \theta + c_2 \int_{\tau_*}^{\tau} \chi d\tau + \gamma(\tau)[f(\xi) + F(\eta)] + E[\int f(\xi) d\xi + \int F(\eta) d\eta] \\ \varphi &= c_1 \int_{\tau_*}^{\tau} Q^{-1} d\tau + c_2 \theta + \delta(\tau)[f(\xi) - F(\eta)] + D[\int f(\xi) d\xi - \int F(\eta) d\eta] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\xi = \sigma - \theta, \quad \eta = \sigma + \theta \quad \left(\sigma = \int_{\tau_*}^{\tau} \left(\frac{\chi}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right)$$

здесь c_1, c_2, E, D – постоянные, $f(\xi), F(\eta)$ – произвольные функции от характеристических переменных ξ, η .

Функции $\gamma(\tau), \delta(\tau)$ необходимо выбрать так, чтобы формулы (4.2) удовлетворяли системе (4.1) при произвольных f и F . Вносим в (4.1) соответствующие производные от (4.2)

$$(\gamma' + E\sigma' + D\chi)(f + F) + \sigma'[\gamma + \delta(\chi Q)^{\frac{1}{2}}](f' + F') = 0 \quad (4.3)$$

$$(E + Q\delta' + DQ\sigma')(f - F) + [\gamma + \delta(\chi Q)^{\frac{1}{2}}](F' - f') = 0$$

Эти уравнения тождественно удовлетворятся, если γ и δ подчинить условиям

$$\gamma = -E\sigma - D \int_{\tau_*}^{\tau} \chi d\tau, \quad \delta = -E \int_{\tau_*}^{\tau} Q^{-1} d\tau - D\sigma \quad (4.4)$$

$$\Delta(\tau) = \gamma + \delta(\chi Q)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.5)$$

При этом для случая $\gamma = 1,4$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_*}^{\tau} \chi d\tau &= -\left(t^{-1} + \frac{t^{-3}}{3} \right) + t^{-5} + \text{Arth } t \Big|_{\tau_*}^{\tau} \\ \int_{\tau_*}^{\tau} Q^{-1} d\tau &= t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \text{Arth } t \Big|_{\tau_*}^{\tau} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\sigma = \int_{\tau_*}^{\tau} \left(\frac{\chi}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau = \sqrt{6} \arctg \sqrt{\frac{6\tau-1}{6(1-\tau)}} - \arctg \sqrt{\frac{6\tau-1}{1-\tau}} \Big|_{\tau_*}^{\tau}$$

$$t = \sqrt{1-\tau}, \quad \sigma > 0$$

Вычисление выражений (4.5), (4.6) с сохранением шести значащих цифр после запятой показало, что при $E = 0,086021, D = 0,034710$ в интервале $\tau_* \leq \tau \leq 0,34$ имеем $|\Delta_{\max}(\tau)| \leq 0,0019$.

Таблица 2

τ	M	$-\alpha \times 10^4$	$\beta \times 10^4$	$\sigma \times 10^4$	$-\Delta \times 10^4$
$1/6$	1	0	0	0	0
0,18	1,05	24	18	79	14
0,20	1,12	51	37	296	19
0,22	1,19	75	50	568	15
0,24	1,26	97	59	873	7
0,26	1,33	120	65	1199	5
0,28	1,39	145	67	1541	-4
0,30	1,46	172	68	1893	-4
0,32	1,57	204	66	2253	1
0,34	1,61	240	63	2619	16
0,36	1,68	282	59	2991	41
0,38	1,75	331	53	3367	79
0,40	1,83	388	46	3747	135

В табл. 2 для указанных значений τ параметр $\Delta(\tau)$ отрицателен, а в точках $\tau_1 = 0,28$ и $\tau_2 = 0,30$ – положителен, функция $\alpha < 0$.

На этом участке решение (4.2), (4.4) практически может быть использовано также в качестве приближенного для системы уравнений (4.1).

Легко показать, что если χ и Q на участке $0,26 \leq \tau \leq 0,416$ заменить на гипотетические выражения

$$\chi \approx \chi_1 = a_1 \tau^p, \quad Q \approx Q_1 = b_1 \tau^q, \quad \left(q = \frac{p+4}{3} \right) \quad (4.7)$$

то всюду $\Delta(\tau) = 0$ и при $D = 0$, $p = 2,853646$ ($q = 2,284549$), $a_1 = 144,3216$, $b_1 = 23,9579$ графики функций χ и Q и функций (4.7) близки между собой (фиг. 2 – масштаб для Q увеличен в 5 раз).

Здесь так же, как и при дозвуковом движении, аппроксимация не зависит от постоянной E и возникает аналогичный парадокс, то есть параметр $\Delta(\tau)$ (на участке удовлетворительной аппроксимации) значительно отклоняется от нуля, будучи вычисленным при точных значениях χ и Q .

При решении прямых граничных задач в характеристических переменных можно воспользоваться, к примеру, методикой [3]. На этом здесь не останавливаемся.

Рассмотрим пример непрерывного решения с возможностью перехода (стыковки) через критическую точку. Для этого f и F возьмем в виде

$$f = \frac{1}{2} \Sigma (a_n \sin n\Omega\xi + b_n \cos n\Omega\xi)$$

$$F = \frac{1}{2} \Sigma (a_n \sin n\Omega\eta + b_n \cos n\Omega\eta)$$

(Ω , a_n , b_n – постоянные, $n = 1, 2, \dots$). Тогда формулы (4.2) при $c_1 = 0$ примут вид:

$$\varphi = c_2 \int_{\tau_0}^{\tau} \chi d\tau + \Sigma \{ a_n [\gamma \sin n\Omega\sigma - E(n\Omega)^{-1} \cos n\Omega\sigma] +$$

$$+ b_n [\gamma \cos n\Omega\sigma + E(n\Omega)^{-1} \sin n\Omega\sigma] \} \cos n\Omega\theta$$

(4.8)

$$\psi = c_2 \theta + \Sigma \{ b_n [\delta \sin n\Omega\sigma - D(n\Omega)^{-1} \cos n\Omega\sigma] -$$

$$- a_n [\delta \cos n\Omega\sigma + D(n\Omega)^{-1} \sin n\Omega\sigma] \} \sin n\Omega\theta$$

Если здесь положить $c_2 = -Q/\lambda$, $\Omega = \pi/\lambda$, то функция ψ будет удовлетворять двум первым условиям (2.8). Учитываем, что $\gamma(\tau_*) = \delta(\tau_*) = \sigma(\tau_*) = 0$ и, приравняв между собою (состыковывая) выражения (2.12) и (4.8) при $\tau = \tau_*$, придем к связи (преемственности) между постоянными

$$a_n = AV_n/E, \quad b_n = -BV_n/D \quad (n = 1, 2, \dots)$$

что обеспечивает выполнение третьего условия (2.8) и, в то же время, позволяет рассмотреть трансзвуковое движение в окрестности звуковой линии, а затем продолжить исследование в сверхзвуковой части течения в характеристических переменных по схеме [3, 6, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. О газовых струях. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 144 с.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
3. Домбровский Г.А. Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа. М.: Наука, 1964. 158 с.
4. Томилов Е.Д. Струйные дозвуковые плоские движения газа. Новосибирск: Наука, 1980. 247 с.
5. Назаров Г.И. Точное решение уравнений газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 113–120.
6. Баранцев Р.Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. 216 с.
7. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // ПМТФ. 1960. № 3. С. 126–145.
8. Коваленко Н.Д. Управление сверхзвуковыми газовыми потоками в реактивных соплах. Киев: Наук. думка, 1992. 205 с.

Киев

Поступила в редакцию
21.X.1992