УДК 532.5

© 1993 г. В.И. Жук

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, ИНДУЦИРУЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЙ ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ В ТРАНСЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Исследуется развитие нестационарных нелинейных возмущений в ламинарном пограничном слое на пластине при трансзвуковом внешнем течении. Изучение двумерного поля скоростей сводится к решению интегро-дифференциального уравнения для зависящей от времени и одной пространственной координаты функции. Развитая теория осуществляет непрерывный переход от до- к сверхзвуковому обтеканию, поскольку упомянутое управляющее уравнение содержит в качестве предельных случаев уравнения Бюргерса и Бенджамина–Оно, которыми описывается эволюция возмущений вне трансзвукового диапазона.

Обобщение трехпалубной теории свободного взаимодействия пограничного слоя [1–3] на случай трансзвуковых скоростей может приводить к различным оценкам масштабов возмущений в зависимости от роли нестационарных эффектов. Задача со взаимодействием для трансзвукового диапазона, впервые рассмотренная в [4], допускает введение времени во внешней потенциальной области потока [5] без изменения соответствующих стационарному режиму оценок. Последние, как показано в [6], устанавливаются, например, из законов подобия, имеющих место в теории [1–3]. Иной механизм распространения волн предложен в [7], где введенные масштабы переменных требуют сохранения нестационарных членов как во внешней, так и в пристеночной областях.

Ниже излагается асимптотический анализ нелинейных возмущений, амплитуда которых превышает величину, предполагаемую в [7]. Концепция самоиндуцированного давления для таких амплитуд определяет нормировку зависимых и независимых переменных, отличную от [4, 5, 7], причем структура течения становится четырехпалубной. Оценки величин вводятся как комбинации трансзвукового параметра и степеней числа Рейнольдса. Специальный предельный переход к числам Маха порядка единицы сводит рассматриваемую асимптотическую схему к ранее предложенной четырехслойной теории [8].

1. Будем изучать продольное обтекание плоской пластины трансзвуковым потоком газа в предположении, что на расстоянии L^* от передней кромки в основную толщу пограничного слоя внесено возмущение вида

$$\frac{u^*}{U^*_\infty}=U_0+\delta u_{1m}+\delta^2 u_{2m}+\ldots,\qquad \frac{\upsilon^*}{U^*_\infty}=\delta^{5/2}\upsilon_{1m}+\delta^{7/2}\upsilon_{2m}+\ldots$$
$$\frac{\rho^*}{\rho^*_\infty}=R_0+\delta\rho_{1m}+\delta^2\rho_{2m}+\ldots,\qquad \frac{p^*-p^*_\infty}{\rho^*_\infty U^{*2}_\infty}=\delta^2 p_{1m}+\delta^3 p_{2m}+\ldots \tag{1.1}$$

Здесь ось x^* декартовой системы x^*, y^* направлена по вектору скорости набегающего потока с числом маха M_∞, t^* – время, u^*, υ^* – компоненты вектора скорости, ρ^* – плотность, p^* – давление, μ^* – динамический коэффициент вязкости. Звездочками отмечены размерные величины, индекс ∞ относится к невозмущенному состоянию на бесконечности, передняя кромка соответствует $x^* = 0$. Аргументами функций с индексами $1m$, $2m$ ... являются $T = \delta^{3/2}\mathrm{Re}^{1/2}U_\infty^* L^{*-1}t^*$, $X = \delta^{3/2}\mathrm{Re}^{1/2}L^{*-1}(x^* - L^*)$, $Y_m = \mathrm{Re}^{1/2}L^{*-1}y^*$. Рассматриваются числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \mu_\infty^* \to \infty$, а амплитуды возмущений в (1.1) задаются в терминах малого параметра $\delta = (M_\infty^2 - 1)Q_\infty^{-1}$, где $Q_\infty = O(1)$. Длина возмущенной области, в которой $X = O(1)$, полагается короткой (на масштабах L^*), что, внося ограничение $\mathrm{Re}^{-1/3} << \delta << 1$, позволяет считать профили продольной компоненты скорости U_0 и плотности R_0 исходного стационарного решения в пограничном слое зависящими лишь от вертикальной координаты Y_m.

Упомянутое ограничение является следствием более сильного неравенства

$$\mathrm{Re}^{-1/6} << \delta << 1 \tag{1.2}$$

предполагаемого выполненным всюду ниже. Смысл (1.2) будет очевиден из дальнейшего.

Подставив (1.1) в уравнения Навье–Стокса, получим после интегрирования

$$u_{1m} = A_1(T,X)\frac{dU_0}{dY_m}, \quad \upsilon_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial X}U_0(Y_m), \quad \rho_{1m} = A_1\frac{dR_0}{dY_m}, \quad p_{1m} = p_{1m}(T,X)$$

$$\begin{gathered}\upsilon_{2m} = -U_0(Y_m)\frac{\partial p_{1m}}{\partial X}\int\limits_{Y_m}^{\infty}\left(\frac{1}{R_0U_0^2} - 1\right)dY_m' - \frac{\partial A_1}{\partial T} - A_1\frac{\partial A_1}{\partial X}\frac{dU_0}{dY_m} - \frac{\partial A_2}{\partial X}U_0(Y_m) \\ u_{2m} = -U_0(Y_m)p_{1m} - \int\limits_{-\infty}^{X}\frac{\partial \upsilon_{2m}}{\partial Y_m}dX' \\ \rho_{2m} = R_0 p_{1m} + \frac{1}{U_0}\left[\frac{1}{2}A_1^2\left(U_0\frac{d^2R_0}{dY_m^2} - \frac{dU_0}{dY_m}\frac{dR_0}{dY_m}\right) - \frac{dR_0}{dY_m}\int\limits_{-\infty}^{X}\left(\frac{\partial A_1}{\delta T} + \upsilon_{2m}\right)dX'\right]\end{gathered} \tag{1.3}$$

Функции $A_1(T, X)$, $A_2(T, X)$, $p_{1m}(T, X)$ в (1.3) произвольны. Предельное поведение

$$U_0 = \lambda_1 Y_m + ..., \quad R_0 = r_0 + ..., \quad (Y_m \to 0) \tag{1.4}$$

вблизи стенки, которую примем теплоизолированной, невозмущенного решения показывает, что в случае $Y_m = O(\delta)$ первые два слагаемых в представлении как u^*, так и υ^* из (1.1) становятся одного порядка. Поэтому в нижней части пограничного слоя, где новая вертикальная координата $Y_a = \delta^{-1}Y_m = \delta^{-1}\mathrm{Re}^{1/2}L^{*-1}y^*$ порядка единицы, возмущения становятся нелинейными, а ряды (1.1) трансформируются следующим образом:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = \delta u_{1a} + ..., \quad \frac{\upsilon^*}{U_\infty^*} = \delta^{3/2}\upsilon_{1a} + ..., \quad \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = r_0 + ..., \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1a} + ... \tag{1.5}$$

Функции с индексом $1a$ зависят от аргументов T, X, Y_a. Уравнения Навье–Стокса в результате представления их решения в виде (1.5) имеют следствием

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial T} + u_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + \upsilon_{1a}\frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} = -\frac{1}{r_0}\frac{\partial p_{1a}}{\partial X}, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + \frac{\partial \upsilon_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0 \tag{1.6}$$

Невязкие уравнения (1.6) означают сохранение завихренности $\omega_{1a} = \partial u_{1a}/\partial Y_a$ вдоль траекторий частиц газа. Предположив в начальный момент пограничный слой невозмущенным, отсюда находим

$$u_{1a} = \lambda_1 Y_{1a} + B_a(T,X), \qquad \upsilon_{1a} = -Y_a \partial B_a(T,X)/\partial X + D_a(T,X)$$

Переписанные в переменной Y_a пределы разложений (1.1) для $Y_m \to 0$, которые при учете явных выражений (1.3) и свойств (1.4) имеют вид

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = \delta\lambda_1(Y_a + A_1) + \ldots, \quad \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = r_0 + \ldots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1m} + \ldots$$
$$\frac{\upsilon^*}{U_\infty^*} = \delta^{7/2}\left(-\lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_a - \frac{\partial A_1}{\partial T} - \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{1}{\lambda_1 r_0}\frac{\partial p_{1m}}{\partial X}\right) + \ldots \tag{1.7}$$

должны быть согласно принципу сращивания идентичны пределам разложений (1.5) при $Y_a \to \infty$. Сформулированное условие, однозначно определяя функции $B_a(T, X)$, $D_a(T, X)$, показывает, что $p_{1a} = p_{1m}$, а главные члены по δ рядов (1.7) для u^* и υ^* дают решение уравнений (1.6).

Источником возмущений рассматриваемого вида может служить локальная неровность на обтекаемой пластине, форма которой задается уравнением

$$y^* = \delta \,\mathrm{Re}^{-1/2} L^* G_a(T,X) \tag{1.8}$$

Условие непротекания

$$\upsilon_{1a} = \frac{\partial G_a}{\partial T} + u_{1a}\frac{\partial G_a}{\partial X}$$

на поверхности $Y_a = G_a(T, X)$ деформированного участка пластины, который погружен в нелинейную невязкую подобласть $Y_a = O(1)$ с полем скоростей из (1.7), налагает связь

$$\frac{\partial(A_1 + G_a)}{\partial T} + \lambda_1(A_1 + G_a)\frac{\partial(A_1 + G_a)}{\partial X} = -\frac{1}{\lambda_1 r_0}\frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \tag{1.9}$$

на неизвестные функции $A_1(T, X)$, $p_{1m}(T, X)$.

Для введенных выше характерных длин и времен толщина вязкого подслоя много меньше высоты неровности (1.8), если справедливо неравенство (1.2). В указанном подслое, прилегающем к твердой поверхности, удобно использовать координату $N_l = \delta^{9/4}\mathrm{Re}^{1/4}(Y_a - G_a) = O(1)$. Тогда параметры течения записываются следующим образом:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = \delta u_{1l} + \ldots, \quad \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} = r_0 + \ldots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1l} + \ldots$$
$$\frac{\upsilon^*}{U_\infty^*} = \delta^{7/2}\left(\frac{\partial G_a}{\partial T} + u_{1l}\frac{\partial G_a}{\partial X} + \delta^{-9/4}\mathrm{Re}^{-1/4}\upsilon_{1l}\right) + \ldots, \quad \frac{\mu^*}{\mu_\infty^*} = \mu_0 + \ldots \tag{1.10}$$

Индексом $1l$ помечены функции аргументов T, X, N_l, а безразмерная вязкость μ_0 вычислена по температуре $T^*/T_\infty^* = 1/r_0$ невозмущенного пограничного слоя при $Y_m = 0$.

Уравнения Навье–Стокса в случае представления их решения в форме (1.10) дают

$$\frac{\partial u_{1l}}{\partial T} + u_{1l}\frac{\partial u_{1l}}{\partial X} + \upsilon_{1l}\frac{\partial u_{1l}}{\partial N_l} = -\frac{1}{r_0}\frac{\partial p_{1l}}{\partial X} + \frac{\mu_0}{r_0}\frac{\partial^2 u_{1l}}{\partial N_l^2} \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial u_{1l}}{\partial X}+\frac{\partial \upsilon_{1l}}{\partial N_l}=0, \quad \frac{\partial p_{1l}}{\partial N_l}=0$$

К условиям прилипания на твердой поверхности

$$u_{1l}=\upsilon_{1l}=0, \quad (N_l=0) \tag{1.12}$$

необходимо добавить условия сращивания на нижней границе невязкой области, влекущие за собой $p_{1l}=p_{1m}$ и

$$u_{1l}\to\lambda_1(A_1+G_a), \quad (N_l\to\infty) \tag{1.13}$$

Обратим внимание на тс, что координаты N_l и Y_a становятся одного порядка при $\delta=\mathrm{Re}^{-1/8}$. В последнем случае нелинейная область сливается с вязким пристеночным подслоем, а масштабы возмущений совпадают с рассмотренными в [7].

2. Положим $Y_m\to\infty$. Тогда предельные свойства $U_0(Y_m)\to 1, R_0(Y_m)\to 1$ задают поведение выражений (1.3), а вместе с ним и асимптотический вид решения (1.1) на верхнем крае пограничного слоя

$$\frac{u^*}{U^*_\infty}\to 1-\delta^2 p_{1m}+\ldots, \quad \frac{\upsilon^*}{U^*_\infty}\to -\delta^{5/2}\frac{\partial A_1}{\partial X}+\ldots$$
$$\frac{\rho^*}{\rho^*_\infty}\to 1+\delta^2 p_{1m}+\ldots, \quad \frac{p^*-p^*_\infty}{\rho^*_\infty U^{*2}_\infty}\to\delta^2 p_{1m}+\ldots \tag{2.1}$$

Если толщина введенных выше трех подобластей течения меньше по порядку величины, чем их длина в продольном направлении, то во внешней подобласти над пограничным слоем ситуация обратная: при околозвуковом обтекании масштаб вертикальной координаты $y^*=\delta^{-2}\,\mathrm{Re}^{-1/2}L^*Y_u$, где новая переменная $Y_u = O(1)$, превышает остающийся прежним масштаб $\delta^{-3/2}\,\mathrm{Re}^{-1/2}$ по координате x^*. Возмущения (2.1) при $Y_u\to 0$ индуцируют во внешней области $Y_u=O(1)$ поле параметров газа

$$\frac{u^*}{U^*_\infty}=1+\delta^2 u_{1u}+\delta^3 u_{2u}+\ldots, \quad \frac{\upsilon^*}{U^*_\infty}=\delta^{5/2}\upsilon_{1u}+\delta^{7/2}\upsilon_{2u}+\ldots$$
$$\frac{\rho^*}{\rho^*_\infty}=1+\delta^2\rho_{1u}+\delta^3\rho_{2u}+\ldots, \quad \frac{p^*-p^*_\infty}{\rho^*_\infty U^{*2}_\infty}=\delta^2 p_{1u}+\delta^3 p_{2u}+\ldots, \quad M^2_\infty=1+\delta Q_\infty \tag{2.2}$$

Функции с индексом $1u$, $2u$... зависят от аргументов T, X, Y_u. Внося формулы (2.2) в систему уравнений Навье–Стокса, получим

$$p_{1u}=\rho_{1u}=-u_{1u}, \quad u_{1u}=\frac{\partial\varphi_{1u}}{\partial X}, \quad \upsilon_{1u}=\frac{\partial\varphi_{1u}}{\partial Y_u} \tag{2.3}$$

В следующем приближении имеем:

$$\frac{\partial\rho_{1u}}{\partial T}+\frac{\partial u_{2u}}{\partial X}+\frac{\partial\rho_{2u}}{\partial X}+\frac{\partial\upsilon_{1u}}{\partial Y_u}=0, \quad \frac{\partial u_{1u}}{\partial T}+\frac{\partial u_{2u}}{\partial X}+\frac{\partial p_{2u}}{\partial X}=0$$
$$\frac{\partial\upsilon_{1u}}{\partial T}+\frac{\partial\upsilon_{2u}}{\partial X}+\frac{\partial p_{2u}}{\partial Y_m}=0, \quad \frac{\partial p_{1u}}{\partial T}+\frac{\partial p_{2u}}{\partial X}=\frac{\partial\rho_{1u}}{\partial T}-Q_\infty\frac{\partial\rho_{1u}}{\partial X}+\frac{\partial p_{2u}}{\partial X} \tag{2.4}$$

Соотношения (2.3) дополняются уравнением для потенциала

$$2\frac{\partial^2\varphi_{1u}}{\partial T\partial X}+Q_\infty\frac{\partial^2\varphi_{1u}}{\partial X^2}-\frac{\partial^2\varphi_{1u}}{\partial Y_u^2}=0 \qquad (2.5)$$

являющимся условием разрешимости системы уравнений второго приближения (2.4). Краевые условия

$$\frac{\partial\varphi_{1u}(T,X,0)}{\partial X}=-p_m(T,X), \qquad \frac{\partial\varphi_{1u}(T,X,0)}{\partial Y_u}=-\frac{\partial A_1(T,X)}{\partial X} \qquad (2.6)$$

вытекают из сращивания с (2.1).

Аффинное преобразование

$$\begin{aligned}&T=b_t t, \quad X=b_x x, \quad Y_a=b_y y_a, \quad N_l=b_y n_l, \quad Y_u=b_y^* y_u\\ &u_{1a}=b_u u, \quad \upsilon_{1a}=b_\upsilon \upsilon, \quad u_{1l}=b_u \upsilon_l, \quad \upsilon_{1l}=b_\upsilon \upsilon_l, \quad p_{1m}=b_p p\\ &A_1=b_y A', \quad G_a=b_y G, \quad \varphi_{1u}=b_\varphi \varphi, \quad Q_\infty=b_q K_\infty\end{aligned} \qquad (2.7)$$

исключает из дальнейшего постоянные λ_1, r_0, μ_0, если в (2.7) положить

$$\begin{aligned}&b_t=(2^2\lambda_1^{14}r_0^{-1}\mu_0^5)^{-1/9}, \quad b_x=(2\lambda_1^4 r_0\mu_0)^{-1/3}, \quad b_y=(2\lambda_1^7 r_0^4\mu_0^{-2})^{-1/9}\\ &b_u=(2^{-1}\lambda_1^2 r_0^{-4}\mu_0^2)^{1/9}, \quad b_\upsilon=(2\lambda_1^7 r_0^{-5}\mu_0^7)^{1/9}, \quad b_p=(2^{-2}\lambda_1^4 r_0\mu_0^4)^{1/9}\\ &b_y^*=(2^7\lambda_1^{13}r_0\mu_0^4)^{-1/9}, \quad b_\varphi=(2^5\lambda_1^8 r_0^2\mu_0^{-1})^{-1/9}, \quad b_q=(2^8\lambda_1^2 r_0^{-4}\mu_0^2)^{1/9}\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Обозначим $A=A'+G$. Вязкий пристеночный подслой при условии отсутствия особенности в решении задачи

$$\frac{\partial u_l}{\partial t}+u_l\frac{\partial u_l}{\partial x}+\upsilon_l\frac{\partial u_l}{\partial n_l}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial n_l^2}, \qquad \frac{\partial u_l}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_l}{\partial n_l}=0 \qquad (2.9)$$

$$n_l=0: u_l=\upsilon_l=0, \qquad n_l\to\infty: u_l\to A(t,x) \qquad (2.10)$$

не влияет в рассматриваемом приближении на параметры течения в вышележащих подобластях. Замкнутая система невязких уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}+K_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_u^2}=0 \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial\varphi(t,x,0)}{\partial x}=-p(t,x), \qquad \frac{\partial\varphi(t,x,0)}{\partial y_u}=-\frac{\partial A(t,x)}{\partial x}+\frac{\partial G(t,x)}{\partial x} \qquad (2.13)$$

позволяет независимо от (2.9), (2.10) найти функции $A(t, x)$, $p(t, x)$ и, тем самым, поле скоростей в нелинейной невязкой подобласти

$$u_a=n_a+A, \qquad \upsilon_a=-n_a\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial t}+u_a\frac{\partial G}{\partial x}, \qquad n_a=y_a-G \qquad (2.14)$$

а также в основной толще пограничного слоя по явным выражениям (1.3).

Совершив в (2.11) замену

$$x_*=x-(1+K_\infty)t, \qquad t_*=x+(1-K_\infty)t$$

получаем волновое уравнение, для которого справедливо представление [9]:

$$\varphi(t_*,x_*,0) = -\frac{1}{\pi}\iint_{S_*}\frac{\partial\varphi(\eta_*,\xi_*,0)}{\partial y_u}\frac{d\eta_* d\xi_*}{\sqrt{(t_*-\eta_*)^2-(x_*-\xi_*)^2}}$$

Здесь S_* – область интегрирования $\eta_* < t_* - |x_* - \xi_*|$. Возвращаясь к переменным t, x и исключая $p(t, x)$ при помощи (2.13) из (2.12), имеем

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint_S\left[\frac{\partial A(\eta,\xi)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(\eta,\xi)}{\partial\xi}\right]\frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(t-\eta)(x-\xi)-K_\infty(t-\eta)^2}} \tag{2.15}$$

где сектор интегрирования S устанавливается неравенствами

$$\eta < t, \quad \xi < x - K_\infty(t-\eta) \tag{2.16}$$

Для $K_\infty \to +\infty$ уравнение (2.15) переходит в уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{K_\infty}}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right] \tag{2.17}$$

Действительно, область интегрирования (2.16) в этом пределе заключена между образующими малый угол лучами. Следовательно, подынтегральную функцию $A(\eta, \xi)$ (как и $G(\eta, \xi)$) можно заменить на $A(t, \xi)$, тогда после интегрирования по переменной η вместо (2.15) получаем (2.17).

Другой предельный случай $K_\infty \to -\infty$ соответствует интегрированию внутри тупого угла, близкого к π. Основной вклад дает узкая область малых $t-\eta$, поскольку в остальной части сектора (2.16) двойное дифференцирование по переменной x в уравнении (2.15) приводит к величине порядка $|K_\infty|^{-5/2}$. Заменим, как и выше, для малых $t-\eta$ функцию $A(\eta, \xi)$ на $A(t, \xi)$, тогда после несложных преобразований приходим к уравнению Бенджамина–Оно [10, 11]

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi\sqrt{-K_\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial A^2(t,\xi)}{\partial\xi^2}-\frac{\partial G^2(t,\xi)}{\partial\xi^2}\right]\frac{d\xi}{\xi-x} \tag{2.18}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Интегродифференциальное уравнение (2.15) является следствием взаимодействия невязкой пристеночной подобласти с внешним потенциальным течением через играющую пассивную роль основную толщу пограничного слоя. Нетривиальный вопрос о существовании регулярного решения уравнений Прандтля (2.9) с градиентом давления, заданным по найденной из (2.15) функции $A(t, x)$, служит внутренним критерием реализуемости введенной выше четырехпалубной структуры возмущений.

3. Пусть поверхность обтекаемой пластины не возмущена ($G = 0$), тогда инициируемое тем или иным способом нелинейное движение подчиняется уравнению (2.15) с однородной правой частью $\Pi(A)$. Эквивалентная запись оператора $\Pi(A)$ в виде

$$\Pi(A) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty\frac{\partial A(t-\tau,x-K_\infty\tau-\nu)}{\partial\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{\tau\nu}}$$

удобна, когда решение ищется в виде бегущей волны $A = A(\zeta)$, $\zeta = x - ct$. Для $K_\infty > c$ из (2.15) имеем

$$(A-c)\frac{dA}{d\zeta} = \frac{1}{\sqrt{K_\infty - c}}\frac{d^2A}{d\zeta^2}$$

Для $K_\infty < c$ снова приходим к уравнению Бенджамина–Оно

$$(A-c)\frac{dA}{d\zeta} = \frac{1}{\pi\sqrt{c-K_\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2A(\xi)}{d\xi^2}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}$$

Односолитонное решение

$$A = \frac{4c}{1+c^2(c-K_\infty)(x-ct)^2} \tag{3.1}$$

уравнения (2.15) существует при $K_\infty < c < 0$. Как видно из (3.1), фазовая скорость солитона однозначно определяет его амплитуду $4c$. "Масса" солитона

$$\int_{-\infty}^{\infty} A dx = \frac{4\pi}{(c-K_\infty)^{1/2}} \tag{3.2}$$

является функцией обоих входящих в (3.1) параметров. Заметим, что в дозвуковом диапазоне для односолитонного возмущения величина, аналогичная (3.2), не зависит от фазовой скорости. Интегральная характеристика (3.2) существенна в механизме генерации солитонов [12].

Периодическое решение

$$A = \frac{2k^2}{c(c-K_\infty)}\left\{1-\left[1-\frac{k^2}{c^2(c-K_\infty)}\right]^{1/2}\cos[k(x-ct)]\right\}^{-1} \tag{3.3}$$

уравнения (2.15) также предполагает $K_\infty < c < 0$.

Основываясь на [13], представим функцию (3.3) в виде цепочки равноотстоящих солитонов

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4s}{1+s^2(c-K_\infty)(x-ct-2n\pi k^{-1})^2} \tag{3.4}$$

где

$$s = c\frac{\theta}{\operatorname{arcth}\theta}, \quad \theta = \frac{k}{c(c-K_\infty)^{1/2}}, \quad c<0 \tag{3.5}$$

Каждое слагаемое в (3.4) стремится к решению типа уединенной волны (3.1) в пределе $s \to c$, достигаемом согласно (3.5) при $\theta \to 0$. Поскольку всегда $|s| < |c|$, в общем случае отдельные элементы цепочки (3.4) не являются решениями уравнения (2.15), удовлетворяя ему лишь в сумме как результат нелинейного взаимодействия.

Пусть α – параметр. Уравнение (2.15) инвариантно относительно преобразования

$$x \to x - \alpha t, \quad A \to A + \alpha, \quad K_\infty \to K_\infty - \alpha \tag{3.6}$$

поэтому наряду с (3.3) функция

$$A = c + \frac{k}{(c-K_\infty)^{1/2}}\left[\frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2} - 2F\right], \quad F = \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2 - 2\sigma\cos[k(x-ct)]} \tag{3.7}$$

также является его решением. Входящие в (3.7) четыре параметра подчиняются ограничениями $0 < \sigma < 1$, $c > K_\infty$, $k > 0$. Заметим, что в отличие от (3.3) фазовая скорость c в (3.7) может иметь любой знак. В случае

$$\sigma = \left(\frac{1-\Lambda}{1+\Lambda}\right)^{1/2}, \quad \Lambda = \frac{k}{|c|(c-K_\infty)^{1/2}}, \quad c<0$$

возвращаемся к (3.3). Тождество

$$F = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n \cos[nk(x-ct)]$$

означает, что амплитуды гармоник в фурье-разложении функции (3.7) представляют собой не ряды по параметру σ, а являются одночленами степени n.

4. Остановимся на вопросе о существовании регулярного решения в вязком пристеночном подслое $n_l = O(1)$, если в качестве внешнего краевого условия при $n_l \to \infty$ берется периодическая функция (3.7). Уравнение (2.15) инвариантно относительно преобразования

$$t \to \beta^{5/3} t, \quad x \to \beta x, \quad A \to \beta^{-2/3} A, \quad K_\infty \to \beta^{-2/3} K_\infty \tag{4.1}$$

зависящего от параметра β. Семейство решений (3.7) отображается преобразованием (4.1) само в себя, так как его действие на функцию из данного семейства эквивалентно замене $k \to \beta k$, $c \to \beta^{2/3} c$, $K_\infty \to \beta^{-2/3} K_\infty$.

Рассмотрим сначала стационарную 2π-периодическую функцию

$$A = \frac{1}{(-K_\infty)^{1/2}}\left[-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma^{2n} - 2\sigma^n \cos nx\right)\right] \tag{4.2}$$

из семейства (3.7). Будем искать стационарное 2π-периодическое решение системы уравнений Прандтля (2.9) с заданным по A из (4.2) градиентом давления $dp/dx = -\frac{1}{2} dA^2/dx$ и граничными условиями $u_l \to A$ ($n_l \to \infty$); $u_l = c_0$, $v_l = 0$ ($n_l = 0$). Здесь в качестве дополнительного параметра задачи введена скорость стенки по касательной к себе c_0. Из дальнейшего будет следовать, что искомое решение существует не при всех c_0.

Положим

$$c_0 = \frac{1}{(-K_\infty)^{1/2}}\left(-S_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n S_n\right) \tag{4.3}$$

Система уравнений пограничного слоя Прандтля выдерживает преобразование

$$t \to \gamma_1\gamma_2^{-1} t, \quad x \to \gamma_1 x, \quad y_l \to (\gamma_1\gamma_2^{-1})^{1/2} y_l$$
$$u_l \to \gamma_2 u_l, \quad v_l \to (\gamma_1^{-1}\gamma_2)^{1/2} v_l, \quad p \to \gamma_2^2 p \tag{4.4}$$

зависящее от двух параметров γ_1, γ_2. Возьмем $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = c_0 < 0$, тогда применение (4.4) оставляет систему (2.9) без изменения, а граничные условия примут вид

$$u_l = 1, \quad v_l = 0 \quad (n_l = 0); \quad u_l \to u_\infty \quad (n_l \to \infty) \tag{4.5}$$

где $u_\infty = Ac_0^{-1}$. Из (4.2), (4.3) имеем

$$u_\infty = \frac{1}{S_0}\left[1-\sigma\left(\frac{S_1}{S_0}-4\cos x\right)-\sigma^2\left(2+\frac{S_2}{S_0}-\frac{S_1^2}{S_0}+4\frac{S_1}{S_0}\cos x-4\cos 2x\right)+\ldots\right] \quad (4.6)$$

В случае краевой задачи (4.5) с функцией u_∞, представимой в виде

$$u_\infty^2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2 Q_n(x), \quad Q_n(0)=Q_n(2\pi)$$

были приведены условия [14]

$$\int_0^{2\pi} Q_1 dx = 0, \quad \int_0^{2\pi}(u_\infty^3-u_\infty)dx = O(\sigma^4) \quad (4.7)$$

существования стационарного 2π-периодического решения системы уравнений Прандтля. Второе условие из (4.7) имеет место, если ряд Фурье для величины $Q_2(x)$ содержит лишь первую гармонику. Разложение (4.6) подчиняется данному требованию.

Примем $S_0 = 1$, тогда из (4.7) следует $S_1 = 0$, $S_2 = 10$. Ограничимся ради краткости первыми членами ряда (4.3), поскольку процедура вычислений дальнейших членов разложения по параметру σ аналогична указанной в [14].

Вывод уравнения (2.15) и формулировка задачи (2.9), (2.10) соответствуют неподвижной стенке. Используя (3.6), перейдем в систему координат,где стенка неподвижна. Возвращаясь от u_∞ к A, заключаем, что для внешнего краевого условия вида

$$A = -c_0 + \frac{1}{(-c_0-K_\infty)^{1/2}}\left\{-1+2\sum_{n=1}^{\infty}[\sigma^{2n}-2\sigma^n\cos[n(x+c_0t)]]\right\} \quad (4.8)$$

2π-периодическое решение в вязком подслое существует, если выполнено соотношение

$$c_0 = -\frac{1}{(-c_0-K_\infty)^{1/2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^n S_n\right) \quad (4.9)$$

неявно определяющее фазовую скорость в (4.8).

Распространим результат на случай любого периода с помощью (4.1), где следует положить $\beta = k$. Тогда вместо (4.8) в качестве внешнего краевого условия возвращаемся к функции (3.7), в которой фазовая скорость $c = k^{2/3}|c_0|$. Что касается вязкого подслоя, то в стационарном решении уравнений Прандтля для A, заданному по (4.2), необходимо совершить подстановку $u_l \to u_l + |c_0|$, $x_l \to x_l - |c_0|t$ с c_0 из (4.9), воспользовавшись их инвариантностью относительно (3.6), а затем применить преобразование (4.4) с $\gamma_1 = k$, $\gamma_2 = k^{-2/3}$. В результате такой замены новое решение системы (2.9) уже удовлетворяет условиям (2.10) с функцией A из (3.7). Заметим, что в (4.9) учтено изменение K_∞ при переходе в движущуюся систему координат согласно (3.6).

Итак, решение уравнений Прандтля в вязком пристеночном подслое с условиями прилипания на неподвижной стенке и заданным по функции A из (3.7) градиентом давления $-\Pi(A)$ существует, если имеет место связь

$$k = c(c-K_\infty)^{2/3}(1-10\sigma^2+\ldots) \quad (4.10)$$

между входящими в (3.7) четырьмя параметрами.

Для $\sigma = 0$ выражение (4.10) представляет собой дисперсионное соотношение линейной теории устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока, совпадающее с точностью до масштабных множителей (2.8) с полученным в [15].

5. Из уравнений Бюргерса (2.17) и Бенджамина–Оно (2.18), справедливых в случае $|K_\infty| \to \infty$, параметр K_∞ можно исключить с помощью аффинного преобразования, выбор которого неоднозначен. Однако преобразование, исключающее параметр K_∞ из (2.17) и (2.18), при дополнительном требовании инвариантности по отношению к нему задачи (2.9), (2.10), а также соотношений (2.14), определяется единственным образом:

$$
\begin{aligned}
&t \to |K_\infty|^{-1/4}\, t, \quad x \to |K_\infty|^{-3/8}\, x, \quad y_a \to |K_\infty|^{-1/8}\, y_a \\
&u_a \to |K_\infty|^{-1/8}\, u_a, \quad \upsilon_a \to |K_\infty|^{1/8}\, u_a, \quad p \to |K_\infty|^{-1/4}\, p \\
&A \to |K_\infty|^{-1/8}\, A, \quad G \to |K_\infty|^{-1/8}\, G
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Коэффициенты растяжения функций с индексами a и l идентичны.

Пусть $|K_\infty| = O(\delta^{-1})$. Из $M_\infty^2 = 1 + \delta Q_\infty$ и (2.7), (2.8) следует

$$
|K_\infty| = \delta^{-1} 2^{-8/9} \lambda_1^{-2/9} r_0^{4/9} \mu_0^{-2/9} |M_\infty^2 - 1|
\tag{5.2}
$$

Суперпозиция двух преобразований (5.1), (2.7) при учете (5.2) дает:

$$
\begin{aligned}
&t^* = \delta^{-9/4} \mathrm{Re}^{-1/2} L^* U_\infty^{*-1} \lambda_1^{-3/2} \mu_0^{-1/2} |M_\infty^2 - 1|^{-1/4} t^0 \\
&x^* = \delta^{-9/8} \mathrm{Re}^{-1/2} L^* \lambda_1^{-5/4} r_0^{-1/2} \mu_0^{-1/4} |M_\infty^2 - 1|^{-3/8} x^0 \\
&y^* = \delta^{9/8} \mathrm{Re}^{-1/2} L^* \lambda_1^{-3/4} r_0^{-1/2} \mu_0^{-1/4} |M_\infty^2 - 1|^{-1/8} y^0 \\
&u^* = \delta^{9/4} U_\infty^* \lambda_1^{1/4} r_0^{-1/2} \mu_0^{1/4} |M_\infty^2 - 1|^{-1/8} u^0 \\
&\upsilon^* = \delta^{27/8} U_\infty^* \lambda_1^{3/4} r_0^{-1/2} \mu_0^{3/4} |M_\infty^2 - 1|^{1/8} \upsilon^0 \\
&p^* = p_\infty^* + \delta^{9/4} \rho_\infty^* U_\infty^{*2} \lambda_1^{1/2} \mu_0^{1/2} |M_\infty^2 - 1|^{-1/4} p^0
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Символом ^{0} помечены безразмерные переменные в определяемой (5.3) специальной системе единиц, звездочки по-прежнему означают размерные величины.

В (5.3) следует положить $\Delta = \delta^{9/8}$, тогда в терминах малого параметра Δ получим полное совпадение с нормировкой величин в четырехслойной теории [8]. В случае $\Delta = \mathrm{Re}^{-1/8}$ возвращаемся к классическому варианту [1–3] теории свободного взаимодействия.

Порядковое соотношение $|M_\infty^2 - 1| = O(\delta)$ в (5.3) делает очевидным выбор масштабов в (1.1), (1.5), (1.10), (2.2). Непрерывный переход через критическое число Маха в асимптотических уравнениях, полученных как следствие задаваемых (5.3) совместно с (5.2) при условии $K_\infty = O(1)$ оценок, связан с нестационарностью течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.

3. *Messiter A.F.* Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
4. *Messiter A.F., Feo A., Melnik R.E.* Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds // AIAA Journal. 1971. V. 9. № 6. P. 1197–1198.
5. *Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
6. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Advances in Applied Mechanics. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
7. *Рыжов О.С., Савенков И.В.* Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.
8. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
9. *Майлс Дж.У.* Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М.: Физматгиз, 1963. 272 с.
10. *Benjamin T.B.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. № 3. P. 559–592.
11. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 4. P. 1082–1091.
12. *Жук В.И., Попов С.П.* О решениях неоднородного уравнения Бенджамина–Оно // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 12. С. 1852–1862.
13. *Miloh T., Tulin M.P.* Periodic solutions of the DABO equation as a sum of repeated solitons // J. Phys. A: Mathem. and General. 1989. V. 22. № 7. P. 921–923.
14. *Wood W.W.* Boundary layers whose streamlines are closed // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. Pt. 1. P. 77–87.
15. *Жук В.И.* Асимптотика верхней ветви нейтральной кривой при до- и трансзвуковых скоростях внешнего потока // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 11. С. 1716–1730.

Москва

Поступила в редакцию
28.II.1992