

УДК 532.526

© 1993 г. В.А. Батищев

**ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ КАСАТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

Изучаются пространственные стационарные течения несжимаемой жидкости в пограничных слоях вблизи свободной поверхности при заданных поверхностных касательных напряжениях. В условиях осевой симметрии и в предположении плоской свободной границы численно строятся автомодельные решения трехмерных уравнений пограничного слоя. Для малых и больших значений нагрузки получены асимптотические решения.

1. Для уравнений Навье – Стокса при малой вязкости рассматривается нелинейная стационарная задача о течении несжимаемой жидкости в неограниченной области  $D$  под действием систем касательных напряжений  $T(x, y, z)$  заданных на заранее неизвестной свободной границе  $\Gamma$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$p = 2\nu\rho\Pi\mathbf{n} + \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (1.2)$$

$$2\nu\rho[\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}] = \mathbf{T}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (x, y, z) \in \Gamma$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ;  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$  – орт оси  $z$ ,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho$  – плотность жидкости  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ ,  $\Pi$  – тензор скоростей деформации  $k_1$  и  $k_2$  – главные кривизны поверхности  $\Gamma$  (заранее не известны),  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $p_*$  и  $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$  – заданные нормальные и касательные напряжения на  $\Gamma$ . Предполагается, что поле скоростей на бесконечности исчезает. Касательные напряжения  $\mathbf{T}$  на свободной границе жидкости могут быть вызваны, например, ветром.

Известна эмпирическая формула [1]

$$\mathbf{T} = c_D \rho_a U_a |\mathbf{U}_a| \quad (1.3)$$

где  $\rho_a$  – плотность воздуха,  $c_D$  – эмпирический коэффициент, имеющий порядок  $2 \cdot 10^{-3}$ ,  $U_a$  – скорость воздуха в воздушном потоке на расстоянии  $\delta$  над поверхностью жидкости (воды). Формула (1.3) получается из известной формулы Прандтля для касательных напряжений при свободной турбулентности  $T \approx \rho c_D |U_a - U_m| dU/dy \approx \rho c |U_a - U_m| (U_a - U_m)$ , где  $\delta$  – толщина пограничного слоя в воздухе,  $U_m$  – скорость воздуха на свободной поверхности жидкости. Учитывая, что  $U_m \ll U_a$ , получаем квадратичный закон трения по скорости  $U_a$  (1.3) (отметим, что  $U_m/U_a = O(10^{-2})$ ) [1].

В идеальной жидкости поверхностных касательных напряжений быть не может и краевые условия для  $\mathbf{T}$  не ставятся. В жидкости малой вязкости вблизи свободной границы возникает пограничный слой, который компенсирует невязку, вызванную

касательными напряжениями. Отметим результаты [2–4] изучения уравнений стационарного пограничного слоя вблизи свободной границы при заданных поверхностных касательных напряжениях, вызванных нагревом границы ( $T = \nabla_{\Gamma} \sigma$ ,  $\nabla_{\Gamma} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}$  – градиент вдоль  $\Gamma$ , а  $\sigma$  – известный переменный коэффициент поверхностного натяжения). Была доказана [3] разрешимость плоской задачи о продолжении пограничного слоя вблизи  $\Gamma$ .

Задачу (1.1), (1.2) приведем к безразмерному виду. Пусть  $L$  и  $T_*$  – характерные масштабы длины и касательной нагрузки. Безразмерное давление  $p'$  определим соотношением  $p = T_* p' - \rho g z$ . Обозначим через  $U$  характерный масштаб скорости. Переходим в уравнениях Навье – Стокса к безразмерным переменным и, умножая обе части уравнений на  $LU^{-2}$ , находим, что коэффициент перед оператором Лапласа равен  $\nu/(UL)$ , который обозначим  $\varepsilon^2$ . Сделав преобразование растяжения в пограничном слое и приравнявая порядки вязких и инерционных членов, находим, что толщина пограничного слоя имеет порядок  $\varepsilon$ . Теперь переходим к безразмерным переменным в краевых условиях для касательных напряжений и учитываем преобразование растяжения. Приравнявая порядки главных членов в этих условиях, выводим соотношение  $T_* = \rho \nu U / (\varepsilon L)$ . Отсюда находим характерный масштаб скорости в пограничном слое  $U = (LT_*^2 \rho^{-2} \nu^{-1})^{1/3}$ . Теперь малый параметр  $\varepsilon$  представим в виде  $\varepsilon = (\rho \nu^2 L^{-2} T_*^{-1})^{1/3}$ . Малым  $\varepsilon$  соответствуют малые значения коэффициента вязкости. Отметим, что зависимость  $\varepsilon \sim \nu^{2/3} T_*^{-1/3}$  была получена [2] для пограничных слоев Марангони (где следует положить  $T_* = A|\sigma|$ ,  $A$  – масштаб градиента температуры, а  $\sigma$  – известный коэффициент в соотношении  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma|(\theta - \theta_0)$ ,  $\theta$  – температура).

Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  строим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon(\mathbf{h}_1 + \mathbf{v}_1) + \dots \\ p' &\sim q_0 + \varepsilon(q_1 + p_1) + \dots, \quad \zeta \sim \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $z = \zeta(x, y)$  – уравнение свободной границы, заранее не известной. Обозначим через  $D_{\Gamma}$  область пограничного слоя. Тогда  $\mathbf{h}_k, q_k$  – функции типа решений задачи пограничного слоя в  $D_{\Gamma}$ . Решение задачи вне  $D_{\Gamma}$  определяют функции  $\mathbf{v}_1, p_1$ , которые описывают невязкое течение и удовлетворяют уравнениям Эйлера.

2. Сформулируем задачу для главных членов асимптотики (1.4)  $\mathbf{h}_0$  и  $q_0$ , определяющих течение в области пограничного слоя. Вблизи поверхности  $\Gamma$  введем локальные ортогональные координаты  $\xi, \varphi, \theta$ , где  $\xi$  – расстояние от точки  $N(x, y, z)$  до поверхности  $\Gamma$ , а  $\varphi, \theta$  – криволинейные координаты на  $\Gamma$  основания нормали, опущенной из точки  $N$ . Пользуясь терминологией [5] применим к (1.1), (1.2) второй (внутренний) итерационный процесс. Пусть  $h_{\varphi k}, h_{\theta k}, h_{\xi k}$  – компоненты вектора  $\mathbf{h}_k$  в локальных координатах. Подставляем (1.4) в (1.1), (1.2) вводим преобразование растяжения  $s = \xi/\varepsilon$  и разлагаем  $\mathbf{v}_1$  в ряд Тейлора по степеням  $\xi$ . Приравнявая нулю коэффициенты при  $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$  находим, что  $h_{\xi 0} = 0$ , а

$h_{\varphi 0}$ ,  $h_{\theta 0}$ ,  $h_{\xi 1}$  удовлетворяют безразмерным уравнениям пограничного слоя, совпадающим с уравнениями Прандтля (отметим, что толщина пограничного слоя вблизи твердой стенки имеет порядок  $\nu^{1/2}$ , а вблизи свободной границы в данном случае – порядок  $\nu^{2/3}$ )

$$g_{\varphi}^{-1} h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + g_{\theta}^{-1} h_{\theta 0} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \theta} + H_{\xi 1} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} + \delta^{-1} \frac{\partial g_{\varphi}}{\partial \theta} h_{\varphi 0} h_{\theta 0} - \delta^{-1} \frac{\partial g_{\theta}}{\partial \varphi} h_{\theta 0}^2 = \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2} \quad (2.1)$$

$$g_{\varphi}^{-1} h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial \varphi} + g_{\theta}^{-1} h_{\theta 0} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial \theta} + H_{\xi 1} \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} + \delta^{-1} \frac{\partial g_{\theta}}{\partial \varphi} h_{\varphi 0} h_{\theta 0} - \delta^{-1} \frac{\partial g_{\varphi}}{\partial \theta} h_{\varphi 0}^2 = \frac{\partial^2 h_{\theta 0}}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (g_{\theta} h_{\varphi 0}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (g_{\varphi} h_{\theta 0}) + \frac{\partial}{\partial s} (\delta H_{\xi 1}) = 0; \quad H_{\xi 1} = h_{\xi 1} + v_1 n|_{\Gamma}$$

при краевых условиях на свободной границе и на бесконечности

$$\partial h_{\varphi 0} / \partial s = -T_{\varphi}, \quad \partial h_{\theta 0} / \partial s = -T_{\theta}$$

$$H_{\xi 1} = 0, \quad (s = 0); \quad h_{\varphi 0} = h_{\theta 0} = 0 \quad (s = \infty)$$

Здесь  $g_{\varphi}$ ,  $g_{\theta}$  – коэффициенты Ламе поверхности  $\Gamma$ ,  $\delta = g_{\varphi} g_{\theta}$ . Для высших приближений получаются линейные краевые задачи, которые здесь не приводятся. Ниже строится только первое приближение.

Главный член в асимптотическом разложении (1.4) для давления получается в виде

$$q_0 = -k_1 \int_s^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds - k_2 \int_s^{\infty} h_{\theta 0}^2 ds$$

Краевая задача для функций  $v_1$ ,  $p_1$ ,  $\zeta_0$ , определяющих течение вне области пограничного слоя и асимптотическую форму свободной границы получается применением первого (наружного) итерационного процесса [5] к системе (1.1), (1.2). Уравнение поверхности  $\Gamma_0$  ( $z = \zeta_0$ ) с точностью до малых высшего порядка получается интегрированием соотношения в размерном виде

$$\sigma(k_{10} + k_{20}) + k_{10} \int_0^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds + k_{20} \int_0^{\infty} h_{\theta 0}^2 ds = \rho g z + p, \quad (2.2)$$

где  $k_{10}$ ,  $k_{20}$  – главные кривизны поверхности  $\Gamma_0$ .

Невязкое течение вне пограничного слоя определяется путем решения краевой задачи

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 n|_{\Gamma_0} = H_{\xi 1}|_{\xi=\infty}, \quad \mathbf{v}_1 = 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 = \infty)$$

Полученная система допускает потенциальное течение жидкости. Обозначив через  $\Phi$  потенциал течения ( $\mathbf{v}_1 = \nabla \Phi$ ), для определения  $\Phi$  приходим к задаче Неймана

$$\Delta \Phi = 0$$

$$\partial\Phi/\partial n|_{\Gamma_0} = H_{\xi_1}|_{\xi=\infty}, \quad \nabla\Phi = 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 = \infty)$$

Были приведены [4] результаты расчетов свободной границы по формуле (2.2). Отметим, что в плоском и осесимметричном случае уравнение (2.2) значительно упрощается. Например, в плоской задаче полагаем  $h_{\theta 0} = k_2 = T_{\theta} = 0$ ,  $g_{\theta} = 1$ , интегрируем первое уравнение (2.1) по  $s$  на полуоси  $[0, \infty]$ , применяем интегрирование по частям, учитываем краевые условия и, интегрируя полученное уравнение по  $\varphi$ , выводим соотношение

$$\int_0^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T_{\varphi} g_{\varphi} d\varphi + \int_0^{\infty} f_0^2(s) ds \quad (2.3)$$

где  $f_0(s) = h_{\varphi 0}(s, \varphi_0)$  – профиль скорости в пограничном слое в сечении  $\varphi = \varphi_0$ . Заметим, что удобно выбирать такое  $\varphi_0$ , при котором известно значение  $f_0$ . Подставляя (2.3) в формулу (2.2), находим

$$k_{10} \left( \sigma + \int_{\varphi_0}^{\varphi} T_{\varphi} g_{\varphi} d\varphi + \int_0^{\infty} f_0^2(s) ds \right) = \rho g z + p_* \quad (2.4)$$

При отсутствии касательной нагрузки ( $T_{\varphi} = f_0 = 0$ ) из уравнения (2.4) получаем известное уравнение свободной границы покоящейся идеальной жидкости  $k_{10}\sigma = \rho g z + p_*$ .

Определим форму свободной поверхности в случае, когда на ней заданы касательные и нормальные напряжения. Уравнение (2.4) запишем в декартовых координатах

$$\frac{\zeta_0''}{(1 + \zeta_0'^2)^{3/2}} \left[ \sigma + \int_0^x T_{\varphi} (1 + \zeta_0'^2)^{1/2} dx + \int_0^{\infty} f_0^2 ds \right] = \rho g \zeta_0 + p_* \quad (2.5)$$

Функция  $\zeta_0$  на бесконечности затухает. Уравнение (2.5) интегрируем численно при заданных  $T_{\varphi}$  и  $p_*$ , например: при симметричных нагрузках  $p_* = \exp(-x^2)$ ,

$T_{\varphi} = \lambda x \exp(-x^2)$  и несимметричных нагрузках  $p_* = -\exp[4(1 - 2x^2)]$ ,  $T_{\varphi} = \lambda \delta(x)$  ( $\delta(x)$  – дельта-функция). При  $T_{\varphi} = 0$  свободная граница представляет собой впадину или горб. С ростом амплитуды касательной нагрузки  $\lambda$  глубина впадины и высота горба уменьшаются и стремятся к нулю при больших  $\lambda$ , т.е. касательные напряжения сглаживают свободную поверхность.

3. Рассмотрим задачу о трехмерном пограничном слое вблизи свободной поверхности. Предположим, что  $p_* = 0$ . Тогда уравнение свободной границы (2.2) имеет решение:  $z = 0$ ,  $k_{10} = k_{20} = 0$ , т.е. если на свободной границе отсутствуют поверхностные нормальные напряжения, то с точностью до  $O(\epsilon)$  свободная поверхность может быть плоской. Далее рассмотрим случай плоской свободной поверхности, на которой задана касательная нагрузка с компонентами

$$T_r = -\lambda_1 r^n, \quad T_{\theta} = -\tau r^n$$

Здесь  $r, \theta, z$  – цилиндрические координаты. Знак минус выбран из соображений удобства, так как в соответствии с векторной формулой (1.3) направление

компонент  $T_r$ ,  $T_\theta$  совпадает с направлением соответствующих компонент вектора скорости  $U_a$  и может иметь любой знак. Степенная нагрузка может быть создана ветром с распределением скоростей  $|U_a| = c\varphi^{n/2}$  в (1.3).

Предполагая течение жидкости осесимметричным, положим  $h_0 = h_0(z/\varepsilon, r)$ . Система уравнений пограничного слоя (2.1) в цилиндрических координатах ( $\varphi = r$ ,  $g_\varphi = 1$ ,  $g_\theta = r$ ) имеет автомодельное решение

$$\begin{aligned} h_{r0} &= r^{(2n+1)/3} F_1(s_1), & h_{\theta 0} &= r^{(2n+1)/3} G_1(s_1) \\ H_{z1} &= r^{(n-1)/3} H_1(s_1), & s_1 &= zr^{(n-1)/3} / \varepsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

Учитывая, что функции (3.1) не зависят от координаты  $\theta$  находим, что система (2.1) инвариантна относительно замены функций  $h_{\varphi 0}$ ,  $h_{\theta 0}$ ,  $H_{z1}$ ,  $T_\varphi$ ,  $T_\theta$  на  $h_{\varphi 0}$ ,  $-h_{\theta 0}$ ,  $H_{z1}$ ,  $T_\varphi$ ,  $-T_\theta$ . Поэтому ограничимся случаем  $\tau \geq 0$ . Произведем замену переменных

$$\eta = \tau^{1/3} s_1, \quad G = \tau^{2/3} G_1, \quad F = \tau^{2/3} F_1, \quad H = \tau^{1/3} H_1, \quad \lambda = \lambda_1 \tau^{-1}$$

Подставив (3.1) в систему (2.1), для определения функций  $F$ ,  $G$ ,  $H$  получаем краевую задачу (штрих – производная по  $\eta$ ):

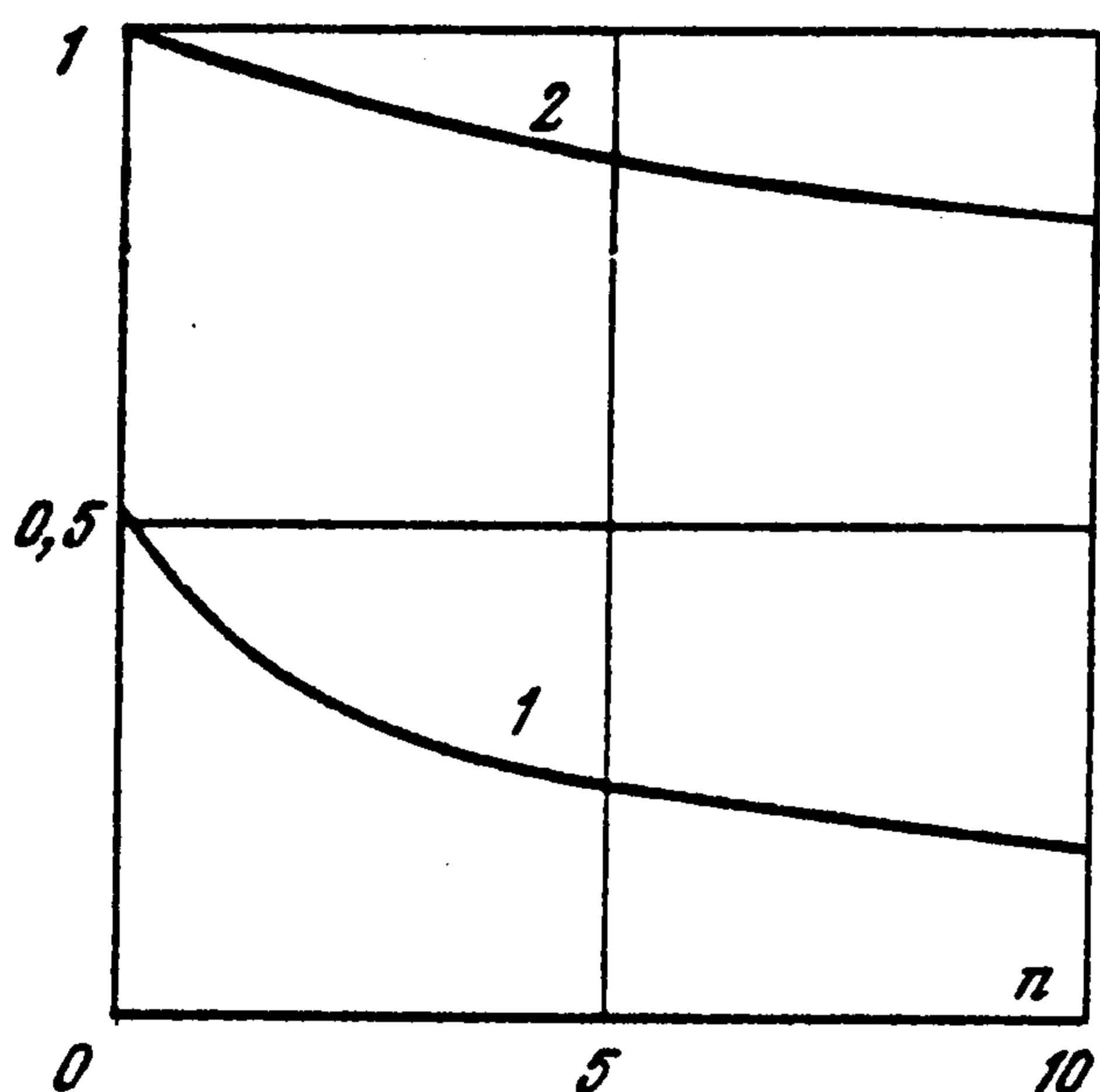
$$\begin{aligned} F'' + G^2 - \frac{2n+1}{3} F^2 - HF' + \frac{1-n}{3} \eta FF' &= 0 \\ G'' - HG' - \frac{2n+4}{3} FG' + \frac{1-n}{3} \eta FG' &= 0 \\ H' + \frac{2n+4}{3} F + \frac{n-1}{3} \eta F' &= 0 \\ G'(0) = 1, \quad F'(0) = \lambda, \quad H(0) = F(\infty) = G(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При  $n = 1$  задача (3.2) отличается от известной задачи о пограничном слое, возникающем вблизи диска, который вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости этого диска (жидкость вдали от диска покоится), крайвыми условиями: в задаче о диске при  $s = 0$  заданы функции  $F(0)$  и  $G(0)$ , а в (3.2) – производные  $F'(0)$ ,  $G'(0)$ .

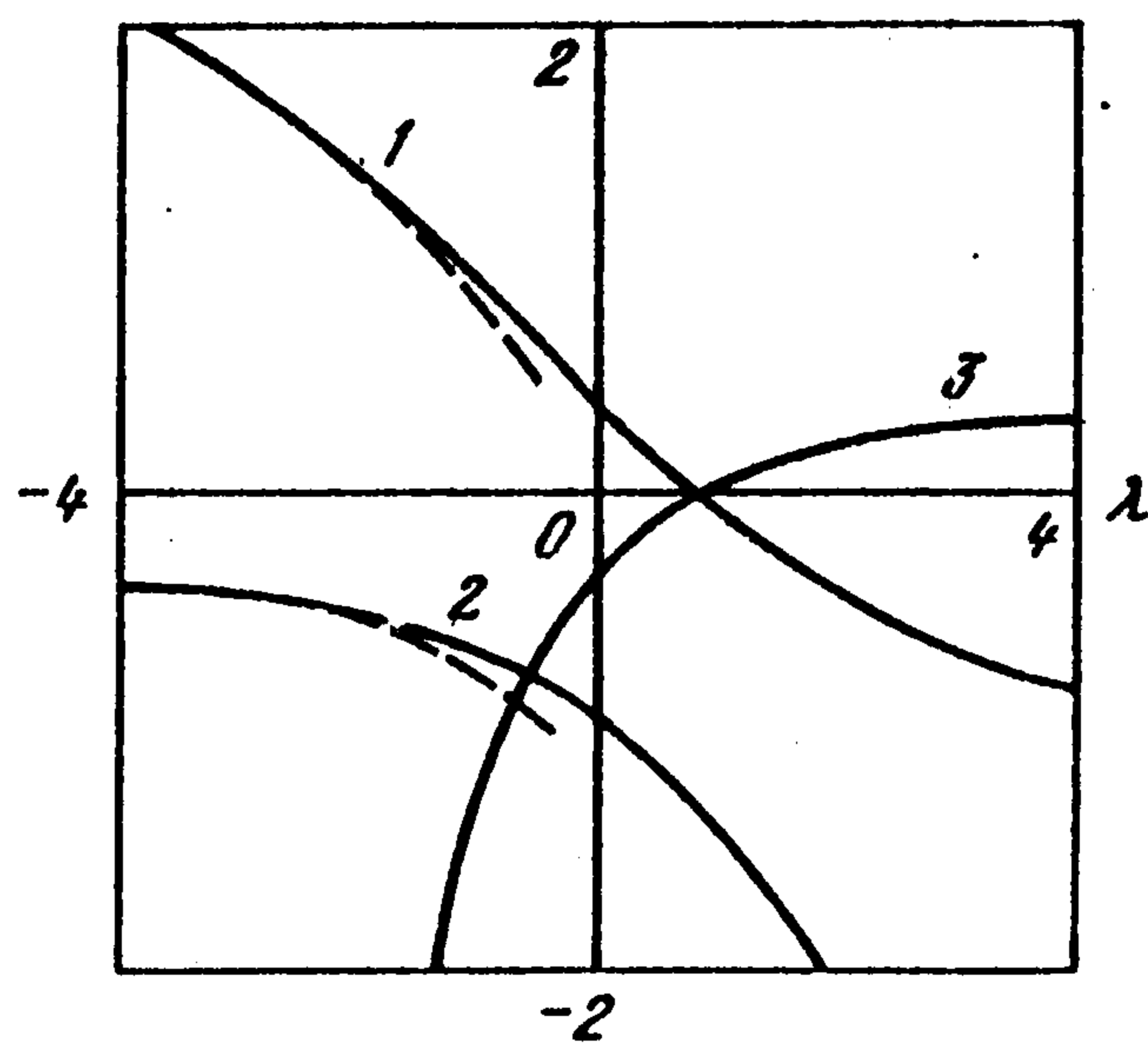
Система (3.2) численно интегрировалась при различных значениях параметров  $n$ ,  $\lambda$ . При  $\lambda = 0$  касательная нагрузка интерпретирует "смерч", а при  $\lambda \neq 0$  на смерч накладываются радиальные касательные напряжения. Параметр  $\lambda$  принимает как положительные, так и отрицательные значения, что определяется направлением радиальной компоненты нагрузки к центру или от центра смерча.

На фиг. 1 изображены зависимости функций  $F(0)$  и  $G(0)$  (пропорциональных радиальной и окружной компонентам скорости на свободной границе) от параметра  $n$ . Кривые 1 и 2 – графики функций  $F(0)$  и  $-G(0)$  при  $\lambda = 0$ . С ростом параметра  $n$  модули радиальной и окружной компонент скорости уменьшаются.

На фиг. 2 кривые 1–3 изображают соответственно графики изменения функций  $F(0)$ ,  $G(0)$  и  $F(0)/G(0)$  в зависимости от параметра  $\lambda$  при  $n = 2$ . Обе функции  $F(0)$  и  $G(0)$  монотонно убывают с ростом  $\lambda$  и стремятся к  $-\infty$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Отношение  $F(0)/G(0)$  определяет тангенс угла между вектором скорости на свободной границе и окружным направлением. Этот угол изменяется в пределах от  $-90^\circ$  ( $\lambda = -\infty$ ) до  $23,06^\circ$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . В отличие от задачи о диске все



Фиг. 1



Фиг. 2

компоненты скорости (3.1) монотонно зависят от координаты  $s$  при  $n = 1, n = 2$  и  $\lambda \leq 0$ . Немонотонная зависимость  $F$  и  $s$  проявляется только при положительных  $\lambda$ .

Приведем асимптотические решения системы (3.2) при  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Введем переменную  $t = (-\lambda)^{1/3} \eta$  и представим функции  $F, G, H$  в виде разложений

$$F = (-\lambda)^{2/3} f_0(t) + \dots, \quad G = (-\lambda)^{-1/3} g_0(t) + \dots, \quad H = (-\lambda)^{1/3} h_0(t) + \dots$$

Главные члены  $f_0, g_0, h_0$  определяются путем решения краевой задачи

$$\begin{aligned} f_0'' &= \frac{2n+1}{3} f_0^2 + h_0 f_0' + \frac{n-1}{3} t f_0 f_0' \\ g_0'' &= \frac{2n+4}{3} f_0 g_0 + h_0 g_0' + \frac{n-1}{3} t f_0 g_0'; \quad h_0' = -\frac{2n+4}{3} f_0 + \frac{1-n}{3} t f_0' \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f_0'(0) = -1, \quad g_0'(0) = 1, \quad h_0(0) = 0, \quad f_0(\infty) = g_0(\infty) = 0$$

Численный расчет показывает, что  $f_0(0) = 1,0564, g_0(0) = -0,7763$  и  $h_0(\infty) = -1,4705$  при  $n = 0$ . С ростом  $n$  значения  $f_0(0), |g_0(0)|$  монотонно убывают. Функция  $f_0(t)$  монотонно убывает, а  $g_0(t)$  возрастает с ростом  $t$  на полуоси  $[0, \infty)$  при фиксированном  $n$ . Приведем формулы для вычисления скорости на свободной границе при  $n = 2$

$$F(0) \sim 0,8052(-\lambda)^{2/3} + \dots, \quad G(0) \sim -0,6833(-\lambda)^{-1/3} + \dots \quad (\lambda \rightarrow -\infty)$$

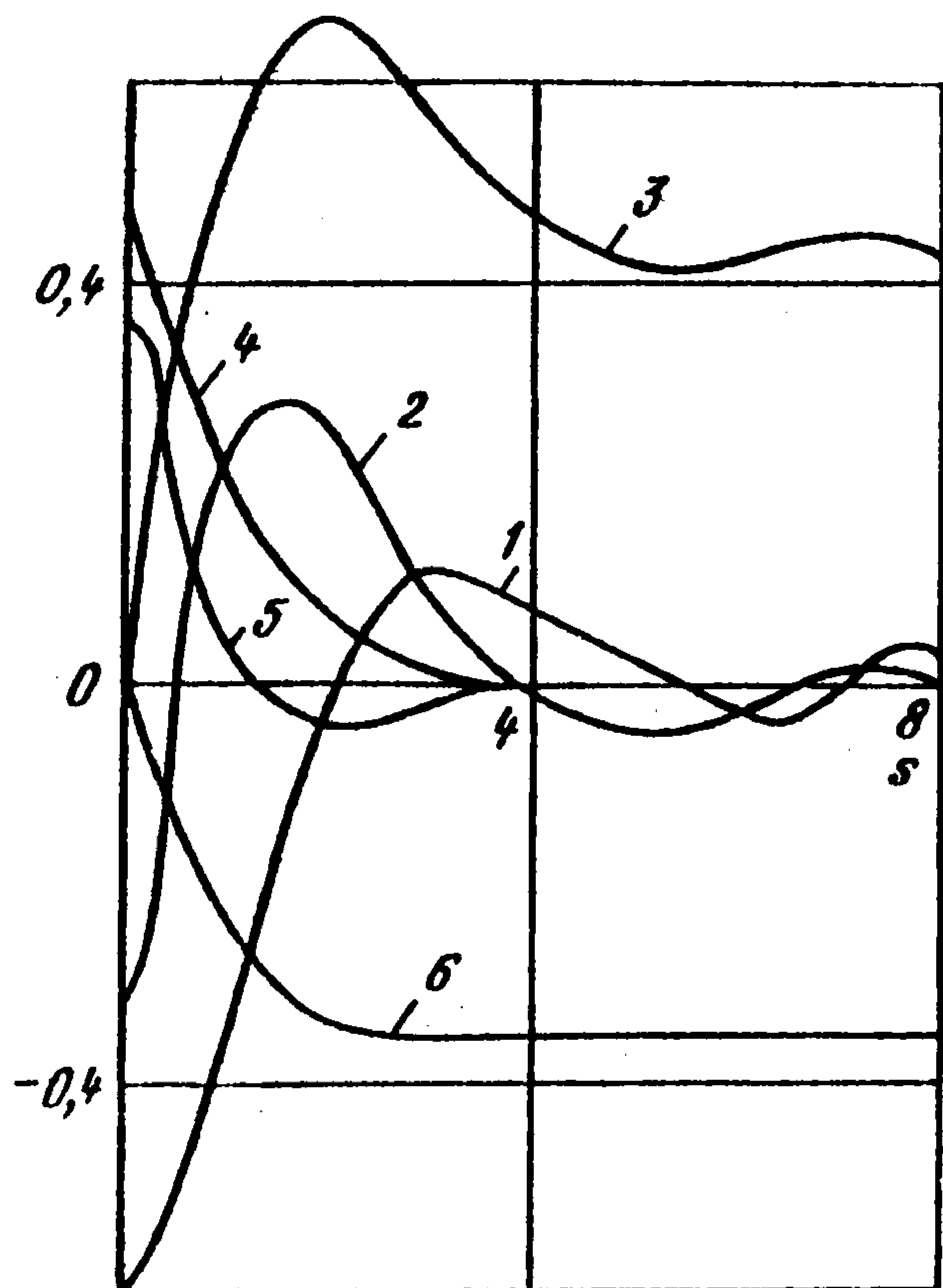
На фиг. 2 штрихами изображено асимптотическое решение при  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

Асимптотическое решение системы (3.2) при  $\lambda \rightarrow +\infty$  строится по формулам

$$F \sim \lambda^{2/3} f(\eta_1) + \dots, \quad G \sim \lambda^{2/3} g(\eta_1) + \dots, \quad H \sim \lambda^{1/3} h(\eta_1) + \dots, \quad \eta_1 = \lambda^{1/3} \eta$$

Функции  $f, g, h$  находятся из краевой задачи, отличающейся от (3.3) лишь тем, что в правой части первого уравнения следует прибавить член  $-g^2$ , а краевые условия для производных заменить следующими:  $f'(0) = 1, g'(0) = 0$ .

При  $n = 2$  приведем численные значения  $f(0) = -0,4768, g(0) = -1,1202$ . С ростом параметра  $n$  функция  $f(0)$  монотонно возрастает и достигает значения  $-0,3396$  при  $n = 10$ , а  $g(0)$  монотонно убывает до  $-1,3510$  при  $n = 10$ . На полуоси  $[0, \infty)$  функция  $g(\eta_1)$  монотонно возрастает, а  $f$  и  $h$  имеют по одной точке



Фиг. 3

экстремума. Отметим, что функции  $f, g, h$  определяют решение задачи о трехмерном пограничном слое вблизи свободной границы при отсутствии окружной компоненты касательной нагрузки ( $T_\theta = 0$ ) и при радиальной компоненте, направленной к центру смерча  $T_\varphi < 0$ . В случае же  $T_\varphi > 0$  пограничный слой оказывается двумерным:  $g = h_{\theta 0} = 0$  (система имеет решение при  $f'(0) = -1$ ).

Рассмотрим трехмерное течение в пограничном слое вблизи плоской свободной границы, вызванное касательной нагрузкой в случае, когда в отличие от рассмотренной выше задачи жидкость на бесконечности вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\omega$ :

$v_{r0} = v_{z0} = 0, v_{\theta 0} = \omega r, p_0 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + c$   
 $(z \rightarrow -\infty)$ . Скорость в пограничном слое и во внешнем потоке имеет одинаковый порядок, поэтому асимптотические разложения в отличие от (1.4) надо строить в виде

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{h}_0 + \mathbf{v}_0 + \varepsilon(\mathbf{h}_1 + \mathbf{v}_1) + \dots$$

$$p \sim q_0 + p_0 + \varepsilon(q_1 + p_1) + \dots, \quad \zeta = O(\varepsilon)$$

Построим автомодельное решение, считая, что вектор  $\mathbf{h}_0$  не зависит от координаты  $\theta$ . Компоненты вектора  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{h}_0 + \mathbf{v}_0$  удовлетворяют системе (2.1), в которой необходимо к правой части первого уравнения прибавить слагаемое  $-dp_0/dr$ . Зададим касательную нагрузку на свободной границе  $T_r = 0, T_\theta = \tau r$  (эта нагрузка может быть создана ветром с полем скоростей  $\mathbf{U}_a$ , имеющим компонен-

ты  $U_{ar} = 0, U_{a\theta} = \pm \sqrt{|\tau| r} / (c_D \rho_a)$  в соответствии с (1.3)). Решение задачи представим в виде

$$w_{r0} = rF(s), w_{\theta 0} = rG(s), w_{z0} = 0, w_{z1} = H(s), s = z/\varepsilon$$

Функции  $F, G, H$  находятся путем решения краевой задачи

$$F'' - F^2 - HF' + G^2 - \omega^2 = 0$$

$$G'' - HG' - 2FG = 0, H' + 2F = 0$$

$$G'(0) = \tau, F'(0) = H(0) = F(\infty) = 0, G(\infty) = \omega$$

(3.4)

Полученная система численно интегрировалась при  $\omega = 1$  и разных значениях  $\tau$ . Результаты расчетов приведены на фиг. 3. Кривые 1-3 изображают графики функций  $F, G_1 = G - \omega$  и  $H/2$  в зависимости от  $s$  при  $\tau = 1$ , а кривые 4-6 - при  $\tau = -1$  соответственно. Отметим, что знак параметра  $\tau$  может быть как положительным, так и отрицательным, и при  $T_r = 0$  в векторной формуле (1.3) определяется направлением окружной компоненты скорости воздуха  $U_{a\theta}$ . В отличие от покоящейся на бесконечности жидкости при удалении от свободной границы компоненты вектора скорости изменяются не монотонно. С увеличением  $\omega$  толщина пограничного слоя растет. При  $|\tau| \ll 1$  система (3.4) линеаризуется и ее асимптотическое решение строится по явным формулам

$$F(s) = -\tau\sqrt{2/\omega} \sin(s\sqrt{\omega} + \pi/4) \exp(-s\sqrt{\omega}) + O(\tau^2)$$

$$G(s) = \omega + \tau\sqrt{2/\omega} \sin(s\sqrt{\omega} - \pi/4) \exp(-s\sqrt{\omega}) + O(\tau^2) \quad (\tau \rightarrow 0)$$

Приведем еще главные члены асимптотики системы (3.4) при больших значениях угловой скорости и  $\tau = O(1)$ . Имеем

$$F = -\tau^{2/3} \Omega^{-1/2} \cos(\eta\sqrt{\Omega/2} - \pi/4) \exp(-\eta\sqrt{\Omega/2}) + O(1/\Omega) \quad (3.5)$$

$$\Omega = 2\omega\tau^{-2/3}, \quad \eta = s\tau^{1/3} \quad (\Omega \rightarrow \infty)$$

Выражение для  $G$  отличается от (3.5) заменой  $\cos$  на  $-\sin$ .

Система (3.4) численно интегрировалась при  $\tau = 0$  и заданной радиальной составляющей касательной нагрузки  $F'(0) = \lambda$ . Так же как и в рассмотренном случае, вектор скорости осциллирует при удалении от границы. При малых  $\lambda$  асимптотическое решение получается из (3.5) заменой  $F$ ,  $\eta$ ,  $\tau^{2/3}$ ,  $\Omega$  соответственно на  $-F$ ,  $s$ ,  $\lambda$ ,  $2$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17698).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.
2. Napolitano L.G. Marangoni boundar layers // Proc. 3rd Europ. Sym. on Material Science in Space. Grenoble, 1979. D. 313-345.
3. Кузнецов В.В. О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1984. Вып. 67. С. 68-75.
4. Батищев В.А. Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 425-432.
5. Вишик М.А., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
23.XI.1992