ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 5, 1993

УДК 532.5:534.1

© 1993 г. Р.Р. Гадыльшин

О КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Строятся полные асимптотики по малому параметру (линейному размеру отверстия) полюсов функции Грина резонатора Гельмгольца, сходящихся к нулевому собственному значению "закрытого" резонатора. Получены главные члены асимптотик решений соответствующих задач рассеяния и излучения.

Акустический резонатор Гельмгольца представляет собой поверхность, получающуюся из границы конечного объема вырезанием малого отверстия [1–3]. Было показано [4, 5], что, если $k_0^2 \neq 0$ – собственное значение невозмущенной задачи, то для некоторых частот k, близких к k_0, при падении плоской волны поле, отраженное от резонатора Гельмгольца, отличается от поля, рассеянного на "закрытом" резонаторе, на величину порядка единицы при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon^2 \ll 1$ – линейный размер отверстия). В квазистационарном же случае $(k_0 = 0)$ ситуация существенно иная: поле, отраженное от резонатора Гельмгольца, отличается в пиковом режиме от поля, рассеянного на "закрытом" резонаторе, уже на величину $O(\varepsilon^{-1})$.

Такое различие объясняется следующим. Если k_0^2 – простое собственное значение "закрытого" резонатора (а минимальное собственное значение $k_0^2 = 0$ является именно таким), то функция Грина невозмущенной внутренней задачи при k, близких к k_0, представима в виде

$$G^{\text{in}}(x,y,k) = (k_0^2 - k^2)^{-1}\psi(x)\psi(y) + \tilde{G}(x,y,k) \tag{0.1}$$

где $\tilde{G}(x,y,k)$ – регулярная в некоторой окрестности k_0 функция, ψ – соответствующая, ортонормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, Ω – внутренность резонатора. Если $k_0 \neq 0$, то, как видно из (0.1), это значение является полюсом первого порядка функции $G^{\text{in}}(x, y, k)$. В этом случае функция Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$ резонатора Гельмгольца имеет единственный полюс τ_ε первого порядка, стремящийся к k_0 при $\varepsilon \to 0$ и для k, близких к k_0, справедливо представление [6]

$$G_\varepsilon(x,y,k) = (\tau_\varepsilon^2 - k^2)^{-1}\Psi_\varepsilon(x)\Psi_\varepsilon(y) + \tilde{G}_\varepsilon(x,y,k) \tag{0.2}$$

где при $\varepsilon \to 0$ квазисобственная функция $\Psi_\varepsilon \to \psi$ в $W_2^1(\Omega)$, $\Psi_\varepsilon \to 0$ в $W_2^1(K \setminus \overline{\Omega})$, K – любой компакт в $\mathbf{R}^3$. Всюду в дальнейшем сходимость функций понимается в указанных нормах.

Значение же $k_0 = 0$ есть уже полюс второго порядка по k функции $G^{\text{in}}(x, y, k)$. Следствием этого является существование у функции Грина резонатора Гельмгольца двух полюсов $\tau_\varepsilon^{(j)} \to 0$ первого порядка, связанных равенством $\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon^{(1)} = -\overline{\tau}_\varepsilon^{(2)}$:

$$G_\varepsilon(x,y,k) = (2\operatorname{Re}\tau_\varepsilon)^{-1}((\tau_\varepsilon - k)^{-1}\Psi_\varepsilon(x)\Psi_\varepsilon(y) + (\overline{\tau}_\varepsilon + k)^{-1}\overline{\Psi}_\varepsilon(x)\overline{\Psi}_\varepsilon(y)) + \tilde{G}_\varepsilon(x,y,k) \tag{0.3}$$

где $\Psi_\varepsilon \to \psi \equiv \operatorname{mes}^{-1/2}\Omega$ в Ω и $\Psi_\varepsilon \to 0$ вне Ω [6, 7].

Первое слагаемое в правой части (0.2), так же как и первые два слагаемых в правой части (0.3), являются членами, вызывающими резонансные явления. Присутствие же в (0.3) множителя $(2\operatorname{Re}\tau_\varepsilon)^{-1}$ влечет отличие квазистационарного режима от случая $k_0 \neq 0$. Так как $\tau_\varepsilon \to 0$, $\operatorname{Im}\tau_\varepsilon \to 0$, $\Psi_\varepsilon \to 0$ вне резонатора при $\varepsilon \to 0$, то для получения главных членов асимптотик соответствующих краевых задач необходимо знать асимптотики τ_ε и Ψ_ε. Построение указанных разложений будет проведено ниже.

1. Постановка задачи и основные утверждения. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ имеет достаточно гладкую границу Γ_0, а Γ_ε получено из Γ_0 вырезанием отверстия ω_ε с линейными размерами $O(\varepsilon^2)$ (акустический резонатор Гельмгольца). Если пространство заполнено однородной и изотропной жидкостью или газообразной средой, то потенциал u_ε ее скорости $\mathbf{v}_\varepsilon = \operatorname{grad} u_\varepsilon$ является решением следующей краевой задачи:

$$(\Delta + k^2)u_\varepsilon = 0,\ x \in \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon,\ \partial u_\varepsilon / \partial \mathbf{n} = f,\ x \in \Gamma_\varepsilon \tag{1.1}$$

$$\partial u_\varepsilon / \partial r - iku_\varepsilon = o(r^{-1}),\ r \to \infty \tag{1.2}$$

удовлетворяющим условию Мейкснера на кромке поверхности Γ_ε. Здесь и всюду далее $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Ω, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = |x|$. Если функция f – произвольная, то поверхность Γ_ε можно рассматривать как излучающую. К решению краевой задачи (1.1), (1.2) сводится и задача нахождения рассеянного поля u_ε, возникающего при отражении внешнего поля u^{out} от идеального жесткой поверхности Γ_ε. В этом случае в (1.1) надо положить $f = -\partial u^{\text{out}}/\partial\mathbf{n}$.

Пусть $u_0(x,k) = U^{\text{ex}}(x,k)$ – решение задачи Неймана для оператора Гельмгольца вне Ω, а $U^{\text{in}}(x, k)$ – регулярная часть решения задачи Неймана в Ω. Выражение решения краевой задачи (1.1), (1.2) через функцию Грина (0.3) дает для него следующее представление [6, 7]:

$$u_\varepsilon(x,k) = \frac{1}{2\operatorname{Re}\tau_\varepsilon}\left(\frac{\Psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon - k}\int\limits_{\Gamma_0}\{\Psi_\varepsilon\} f ds + \frac{\overline{\Psi}_\varepsilon(x)}{\overline{\tau}_\varepsilon + k}\int\limits_{\Gamma_0}\{\overline{\Psi}_\varepsilon\} f ds\right) + U_\varepsilon(x,k) \tag{1.3}$$

$$\{\Psi_\varepsilon(x)\} = \lim_{y \to x}\Psi_\varepsilon(y) - \lim_{z \to x}\Psi_\varepsilon(z)\quad (x \in \Gamma_0,\ y \in \Omega,\ z \notin \overline{\Omega}) \tag{1.4}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0}\{\Psi_\varepsilon\} f ds \to \psi a_f = \psi \int\limits_{\Gamma_0} f ds$$

где $U_\varepsilon \to U^{\text{ex,in}}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по k, квазисобственная функция $\Psi_\varepsilon(x)$ – решение краевой задачи (1.1) при $k = \tau_\varepsilon$.

В предположении, что Ω в окрестности начала координат совпадает с полупространством $x_3 > 0$, ω – двумерная область с гладкой границей на плоскости $x_3 = 0$, а $\omega_\varepsilon = \{x\colon x\varepsilon^{-2} \in \omega\}$, в следующем параграфе будет показано, что:

$$\tau_\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\tau_j,\quad \tau_1 = \psi(\pi c_\omega)^{1/2},\quad \tau_2 = 0 \tag{1.5}$$

$$\tau_3 = -\frac{1}{2}\psi(\pi c_\omega)^{3/2}(g_{00}^{\text{in}}(0,0) + g_{00}^{\text{ex}}(0,0)),\quad \operatorname{Im}\tau_4 = -\frac{1}{2}(\pi\psi c_\omega)^2\sigma$$

где c_ω – емкость "пластины" ω [8, 9], σ – поперечное сечение [2, 10] функции Грина $G^{\text{ex}}(x, y, 0)$ задачи Неймана для оператора Лапласа вне Ω при $y = 0$, $g_{00}^{\text{in,ex}}(x,k)$ – регулярные части функций $G^{\text{in,ex}}(x,0,k)$ Так как наряду с полюсом

$\tau_\varepsilon^{(1)} = \tau_\varepsilon$ существует и полюс $\tau_\varepsilon^{(2)} = -\bar{\tau}_\varepsilon$, то знак $\mathrm{Re}\,\tau_\varepsilon > 0$ выбран для определенности.

Для квазисобственной функции $\psi_\varepsilon(x)$ справедливо разложение:

$$\psi_\varepsilon(x) = -k^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j R_{[j/2]}^{(j)}(D_y) G^{\mathrm{in}}(x,0,k), \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon), \quad R_0^{(0)} = \psi^{-1}$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \upsilon_j\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right), \quad x \in S(2\varepsilon), \quad \upsilon_0(\xi) = \psi Y(\xi), \quad \upsilon_1(\xi) = 0 \tag{1.6}$$

$$\psi_\varepsilon(x) = k^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j R_{[j/2]}^{(j)}(D_y) G^{\mathrm{ex}}(x,0,k), \quad x \notin \Omega \cup S(\varepsilon)$$

$$Y(\xi) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\tilde{Y}(\xi), & \xi_3 > 0 \\ \dfrac{1}{2}\tilde{Y}(\xi), & \xi_3 < 0 \end{cases}$$

где $k = \tau_\varepsilon$, $S(t)$ – шар радиуса t с центром в начале координат, $R_j^{(q)}(D_y)$ – дифференциальные многочлены j-го порядка по переменной y с постоянными коэффициентами $\tilde{Y}(\xi) \in W_{2,\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R}^3)$ – гармоническая вне $\overline{\omega}$ функция, убывающая на бесконечности и равная единице на ω. Заметим, что квазисобственные функции $\psi_\varepsilon(x)$ и $\Psi_\varepsilon(x)$, фигурирующие в (1.6) и в (0.3), (1.3), равны с точностью до скалярного множителя $1 + o(1)$.

Из представления (1.3) видно, что резонансные явления в наибольшей степени наблюдаются для вещественных $k = k(\varepsilon)$ в пиковых режимах: $k = \tau_\varepsilon + O(\mathrm{Im}\,\tau_\varepsilon)$, $k = -\bar{\tau}_\varepsilon + O(\mathrm{Im}\,\tau_\varepsilon)$. Не ограничивая общности, в дальнейшем рассмотрим лишь первый из них. Т.е. будем считать, что вещественное $k = k(\varepsilon)$ имеет вид

$$k = \varepsilon\tau_1 + \varepsilon^3\tau_3 + \varepsilon^4(k_4 + o(1)) \tag{1.7}$$

Для излучающей поверхности Γ_ε, в случае общего положения, $a_f \neq 0$. Подставляя асимптотические разложения (1.5), (1.6) в (1.3) и учитывая (1.4), для решения краевой задачи (0.1), (0.2) получаем представление

$$u_\varepsilon(x;k) \sim \varepsilon^{-5} A_f, \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon); \quad u_\varepsilon(x;k) \sim \varepsilon^{-5} A_f Y(\xi), \quad x \in S(2\varepsilon)$$

$$u_\varepsilon(x;k) \sim A_f \varepsilon^{-3} \pi c_\omega G^{\mathrm{ex}}(x,0,k), \quad x \notin \Omega \cup S(\varepsilon) \tag{1.8}$$

$$A_f = \tfrac{1}{2} a_f \psi (\tau_4 - k_4)^{-1} (\pi c_\omega)^{-1/2}, \quad \xi = x/\varepsilon^2$$

При отыскании рассеянного поля u_ε, возникающего при дифракции u^{out} на идеально жесткой поверхности Γ_ε, ситуация несколько иная, так как в этом случае $a_f = 0$. Пусть $u_0(x; k)$ – рассеянное поле, возникающее вне Ω при отражении внешнего поля $u^{\mathrm{out}}(x; k)$ от Γ_0 (решение задачи Неймана вне Ω при $f = -\partial u^{\mathrm{out}} / \partial \mathbf{n}$), а $u = u_0 + u^{\mathrm{out}}$ в $\mathbf{R}^3 \setminus \Omega$. Можно показать [5, 6], что в пиковом режиме (1.7)

$$\int_{\Gamma_0} \{\psi_\varepsilon(x)\} \frac{\partial u^{\text{out}}(x;k)}{\partial \mathbf{n}} ds \sim -\varepsilon^2 \tau_1^2 R_0^{(0)} u(0,0) \tag{1.9}$$

Подставляя (1.5), (1.6), (1.9) в (1.3), получаем главные члены асимптотик для рассеянного поля

$$u_\varepsilon(x;k) \sim \varepsilon^{-3} b, \quad x \in \Omega \setminus S(\varepsilon); \quad u_\varepsilon(x;k) \sim \varepsilon^{-3} b Y(\xi), \quad x \in S(2\varepsilon)$$

$$u_\varepsilon(x;k) \sim \varepsilon^{-1} b \pi c_\omega G^{\text{ex}}(x,0,k), \quad x \notin \Omega \cup S(\varepsilon) \tag{1.10}$$

$$b = \tfrac{1}{2} \psi (\pi c_\omega)^{1/2} (\tau_4 - k_4)^{-1} u(0,0), \quad \xi = x/\varepsilon^2$$

2. Построение асимптотик полюсов и квазисобственных функций. Покажем справедливость соотношений (1.5), (1.6). Ряды (1.6) строятся методом сращиваемых асимптотических разложений. Краевые задачи для коэффициентов второго ряда (1.6) получаются следующим образом [5, 11]. Этот ряд, а также ряд (1.5) подставляем в (1.1) при $f = 0$, переходим в уравнении и граничных условиях к переменным $\xi = x\varepsilon^{-2}$, выписываем отдельно равенства при одинаковых степенях ε и переходим к формальному пределу при $\varepsilon \to 0$. Получим

$$\Delta_\xi \upsilon_j = -\sum_{i=2}^{j-4} \lambda_j \upsilon_{j-i-4}, \quad \xi \notin \bar{\gamma}, \quad \partial \upsilon_j / \partial \xi_3 = 0, \quad \xi \in \gamma, \quad \gamma = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\omega} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{R}^2$ – плоскость $\xi_3 = 0$, λ_i – коэффициенты ряда τ_ε^2.

При $t \geqslant 1$ дифференциальные многочлены будем искать в виде

$$R_j^{(t)}(D_y) = \sum_{i=1}^{j} P_i^{(t)}(D_y), \quad P_i^{(t)}(D_y) = \sum_{q=0}^{i} a_{qi}^{(t)} \frac{\partial^i}{\partial^q y_1 \partial^{i-q} y_2}$$

где $a_{ji}^{(q)}$ – некоторые постоянные. Обозначим через $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x,k)$ и $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x,k)$ первый и третий ряды (1.6) соответственно, где величина k не заменена на τ_ε. Тогда асимптотики соответствующей квазисобственной функции $\psi_\varepsilon(x)$ имеют вид $\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,\tau_\varepsilon)$. По определению, коэффициенты рядов $\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,k)$ аналитичны в некоторой окрестности нуля, удовлетворяют нулевому граничному условию Неймана на $\Gamma_0 \setminus 0$, являются решениями уравнения Гельмгольца в Ω и вне $\overline{\Omega}$ соответственно, а при вещественных k коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x,k)$ удовлетворяют и условию излучения (1.2). При $r \to 0$, $k \to 0$ для функций Грина предельных задач и их производных имеем

$$P_i^{(j)}(D_y) G^{\text{in,ex}}(x,0,k) = (-1)^i (2\pi)^{-1} P_i^{(j)}(D_x)(r^{-1} \cos kr) + g_{ji}^{\text{in,ex}}(x,k), \quad j \geqslant 1,$$

$$G^{\text{ex}}(x,0,k) = (2\pi)^{-1} r^{-1} \cos kr + g_{00}^{\text{ex}}(x,k) \tag{2.2}$$

$$G^{\text{in}}(x,0,k) = (2\pi)^{-1} r^{-1} \cos kr - k^{-2} \psi^2 + g_{00}^{\text{in}}(x,k)$$

$$\operatorname{Im} G^{\text{in}}(x,0,k) \equiv 0, \quad k \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{Im} G^{\text{ex}}(0,0,k) \sim \operatorname{Re} k\sigma, \quad k \to 0 \tag{2.3}$$

где функции $g_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,k)$ бесконечно дифференцируемы по переменной x и аналитичны по переменной k. Справедливость последнего равенства показана в [5].

На суммах $U(x,\varepsilon)$ вида $\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,\tau_\varepsilon)$ определим оператор K_q следующим образом [6, 11]. Коэффициенты ряда $U(x,\varepsilon)$ разлагаем в ряды при $r \to 0$ и переходим к переменным $\xi = x\varepsilon^{-2}$. В полученном двойном ряду возьмем сумму членов вида $\varepsilon^j \phi(\xi)$ при $j \leqslant q$, которую и назовем $K_q(U(x,\varepsilon))$.

Два асимптотических степенных ряда $V^{+,-}(\xi)$ назовем сопряженными, если их сумма – многочлен. Пусть функции τ_ε и ряды $\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,k)$ имеют асимптотики, определяемые формулой (1.5), первой и третьей (1.6), а коэффициенты τ_j, $R_0^{(0)}$ и дифференциальные полиномы $P_i^{(j)}(D_y)$ – произвольны, но $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 = P_j^{(2j+1)}(D_y) = 0$. Тогда из представлений (2.2) следует, что для любого целого $N \geqslant 0$

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,\tau_\varepsilon)) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i V_i^{\text{in,ex}}(\xi)$$

ряды $V_i^{\text{in,ex}}(\xi)$ – сопряженны, являются формальными асимптотическими решениями краевых задач (2.1) при $\rho = |\xi| \to \infty$, где функции $\upsilon_i(\xi)$ заменены на $V_i^{\text{in,ex}}(\xi)$, и для них справедливы представления:

$$\begin{gathered} V_0^{\text{in}}(\xi) = R_0^{(0)}\psi^2 - (2\pi)^{-1}\tau_1^2(R_0^{(0)}\rho^{-1} + \Sigma_0) \\ V_0^{\text{ex}}(\xi) = (2\pi)^{-1}\tau_1^2(R_0^{(0)}\rho^{-1} + \Sigma_0) \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$V_1^{\text{in}}(\xi) = V_1^{\text{ex}}(\xi) \equiv 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} V_j^{\text{in,ex}}(\xi) = \tilde{V}_j^{\text{in,ex}}(\xi) + 2\tau_1^{-1}\tau_{j+1}(V_0^{\text{in,ex}}(\xi) - \tilde{V}_0^{\text{in,ex}}) \mp (2\pi)^{-1}\tau_1^2\Sigma_j, \quad j \geqslant 2, \\ \tilde{V}_0^{\text{in}} = R_0^{(0)}\psi^2, \quad \tilde{V}_0^{\text{ex}} = 0 \\ \Sigma_q = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i P_i^{(2i+q)}(D_\xi)\rho^{-1} \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $j \geqslant 2$, $\tilde{V}_0^{\text{in}} = R_0^{(0)}\psi^2$, $\tilde{V}_0^{\text{ex}} = 0$, а ряды $\tilde{V}_j^{\text{in,ex}}(\xi)$ не зависят от τ_{q+1}, $P_i^{(2i+q)}(D_y)$ при $q \geqslant j$. Если к тому же $\operatorname{Im}\tau_1 = \operatorname{Im} R_0^{(0)} = 0$, то

$$\tilde{V}_2^{\text{in,ex}}(\xi) = \mp\tau_1^2 R_0^{(0)} g_{00}^{\text{in,ex}}(0,0), \quad \operatorname{Im}\tilde{V}_3^{\text{in}}(\xi) \equiv 0, \quad \operatorname{Im}\tilde{V}_3^{\text{ex}}(\xi) = \tau_1^3 R_0^{(0)}\sigma \tag{2.7}$$

в силу (2.2), (2.3).

Таким образом, задача сращивания рядов (1.6) свелась к нахождению решений $\upsilon_j(\xi) \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\gamma})$ краевых задач (2.1), имеющих при $\rho \to \infty$ асимптотики, совпадающие при $\xi_3 \gtrless 0$ с рядами $V_j^{\mathrm{in,ex}}(\xi)$ соответственно. Достигаться указанное совпадение будет выбором постоянных τ_{j+1} и полиномов $P_i^{(2i+j)}(D_y)$.

Так как $-k^2R_0^{(0)}G^{\mathrm{in}}(x,0,k)\to R_0^{(0)}\psi^2$, $k^2R_0^{(0)}G^{\mathrm{ex}}(x,0,k)\to 0$ при $k\to 0$ в силу (2.2), а функция $\Psi_\varepsilon \to \psi$ в Ω, $\Psi_\varepsilon \to 0$ вне Ω при $\varepsilon\to 0$, то, выбран $R_0^{(0)}$ в соответствии с первым выражением (1.6), получаем

$$-\tau_\varepsilon^2R_0^{(0)}G^{\mathrm{in}}(x,0,\tau_\varepsilon)\to\psi,\quad \tau_\varepsilon^2R_0^{(0)}G^{\mathrm{ex}}(x,0,\tau_\varepsilon)\to 0$$

Краевая задача (2.1) для $\upsilon_0(\xi)$ имеет вид

$$\Delta_\xi\upsilon_0=0,\quad \xi\notin\bar\gamma,\quad \partial\upsilon_0/\partial\xi_3=0,\quad \xi\in\gamma \tag{2.8}$$

По определению, гармоническая вне $\bar\gamma$ функция $Y(\xi)$ имеет при $\rho\to\infty$ асимптотики

$$Y(\xi)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}X(\xi), & \xi_3\geqslant 0\\ \frac{1}{2}X(\xi), & \xi_3\leqslant 0\end{cases},\quad X(\xi)=\frac{1}{2}c_\omega\rho^{-1}+\sum_{i=1}^{\infty}Z_i(\xi)\rho^{-1-2i}$$

и ее производная по ξ_3 равна нулю на γ; $Z_i(\xi)$ – однородные гармонические полиномы степени i. Положим $\upsilon_0(\xi)=R_0^{(0)}\psi^2Y(\xi)$. Функция $\upsilon_0\in W_{2,\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R}^3\setminus\bar\gamma)$ является решением краевой задачи (2.8) и в силу (2.4) при $\rho\to\infty$ справедливы равенства

$$\upsilon_0(\xi)-V_0^{\mathrm{in,ex}}(\xi)=R_0^{(0)}((2\pi)^{-1}\tau_1^2-\tfrac{1}{2}\psi^2c_\omega)\rho^{-1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}((2\pi)^{-1}\tau_1^2(-1)^iP_i^{(2i)}(D_\xi)\rho^{-1}-Z_i(\xi)\rho^{-1-2i}),\quad \xi_3\gtrless 0$$

Приравнивая в правой части последнего равенства коэффициент при ρ^{-1} нулю, получаем значение (1.5) для τ_1. Приравнивая же нулю коэффициенты при остальных степенях ρ, находим $P_i^{(2i)}(D_y)$. Заметим, что, определив $P_1^{(2)}(D_y)$, окончательно находим $R_1^{(2)}(D_y)$. Таким образом, проделан "нулевой" шаг сращивания.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. На j-м шаге, приравнивая асимптотики на бесконечности решения $\upsilon_j(\xi)$ задачи (2.1) к рядам (2.6), определяем коэффициенты τ_{j+1} и полиномы $P_i^{(2i+j)}(D_y)$, а следовательно, и многочлены $R_{[j/2]+1}^{(j+2)}(D_y)$. Равенства

$$\tau_2=\upsilon_1(\xi)=0,\quad \upsilon_2(\xi)=\tau_1^2R_0^{(0)}(g_{00}^{\mathrm{ex}}(0,0)Y(\xi_1,\xi_2,-\xi_3)-g_{00}^{\mathrm{in}}(0,0)Y(\xi))R_0^{(0)}$$

и (1.5) для τ_3 следуют из (2.5)–(2.7).

Равенство (1.5) справедливо и для $\mathrm{Im}\,\tau_4$.

Действительно, взяв мнимую часть от (2.1) получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi\,\mathrm{Im}\,\upsilon_3=0,\quad \xi\notin\bar\gamma,\quad \partial\,\mathrm{Im}\,\upsilon_3/\partial\xi_3=0,\quad \xi\in\gamma \tag{2.9}$$

В силу (2.6), (2.7) при $\rho \to \infty$

$$\operatorname{Im}\upsilon_3(\xi)=O(\rho^{-1}),\quad \xi_3 \geqslant 0,\quad \operatorname{Im}\upsilon_3(\xi)=\tau_1^3 R_0^{(0)}\sigma+O(\rho^{-1}),\quad \xi_3 \leqslant 0 \tag{2.10}$$

Функция $\operatorname{Im}\upsilon_3(\xi)=\tau_1^3 R_0^{(0)}\sigma Y(\xi_1,\xi_2,-\xi_3)$, очевидно, является решением краевой задачи (2.9) и имеет при $\rho \to \infty$ асимптотики (2.10). Приравнивая коэффициенты при ρ^{-1} в ряде $\operatorname{Im}V_3^{\text{in}}(\xi)$ и в асимптотике функции $\operatorname{Im}\upsilon_3(\xi)$ при $\xi_3>0$, определяем $\operatorname{Im}\tau_4$.

В результате проведенной процедуры для любого целого $N \geqslant 0$ при $\rho \to \infty$ имеем

$$K_N(\psi_\varepsilon^{\text{in,ex}}(x,\tau_\varepsilon))=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\upsilon_i(\xi),\quad \xi_3 \gtrless 0,\quad \upsilon_i(\xi)=O(\rho^{[i/2]}) \tag{2.11}$$

Частичные суммы

$$\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in,ex}}(x,k)=\mp k^2\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j R_{[j/2]}^{(j)}(D_y)G^{\text{in,ex}}(x,0,k)$$

продолжим нулем вне $\overline{\Omega}$ и в Ω соответственно, через $\upsilon_{\varepsilon,N}(\xi)$ обозначим частичную сумму второго ряда (1.6), а через $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, тождественно равную нулю при $t<1$ и единице при $t>2$. В силу определения функция

$$\psi_{\varepsilon,N}(x,k)=\chi(r\varepsilon^{-1})(\psi_{\varepsilon,N}^{\text{in}}(x,k)+\psi_{\varepsilon,N}^{\text{ex}}(x,k))+(1-\chi(r\varepsilon^{-1}))\upsilon_{\varepsilon,N}(\xi)$$

принадлежит $W_{2,\text{loc}}^1(\mathbf{R}^3\setminus\overline{\Gamma}_\varepsilon)$, аналитична по k в некоторой окрестности нуля, является решением краевой задачи

$$(\Delta+k^2)\psi_{\varepsilon,N}=f_{\varepsilon,N},\quad x\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{\Gamma}_\varepsilon,\quad \frac{\partial\psi_{\varepsilon,N}}{\partial\mathbf{n}}=0,\quad x\in\Gamma_\varepsilon$$

где функция $f_{\varepsilon,N}(x,k)$ аналитична по k, $\operatorname{supp}f_{\varepsilon,N}(x,k)\subset S(2\varepsilon)$. Функция $\psi_{\varepsilon,N}(x,k)$ удовлетворяет условию излучения (1.2) при вещественных k. В силу же (2.1), (2.11) норма $f_{\varepsilon,N}(x,\tau_\varepsilon)$ в $L_2(\mathbf{R}^3)$ имеет порядок ε^{N_1}, где N_1 растет неограниченно при $N\to\infty$ (см. например, [16]). Асимптотические разложения τ_ε, $\psi_\varepsilon(x)$ построены. Их обоснование следует из [6, 7].

Условие уплощение резонатора в окрестности отверстия не влияет на значения τ_1, $\operatorname{Im}\tau_{2,3,4}$, $R_0^{(0)}$ и представления (1.8), (1.10), что связано с асимптотиками $G^{\text{in,ex}}(x,0,k)$ [12, 13]. В случае, когда Ω – шар, а проекция отверстия ω_ε на касательную плоскость – круг, значение τ_1 совпадает со значением этой величины, полученным нестрогими методами Релеем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh O.M.* The theory of Helmholtz' resonator // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1916. V. 92. № 638. P. 265–275.
2. *Miles J.W.* Scattering by a Spherical cap // J. Acoust. Soc. America. 1971. V. 50. № 3. Pt 2. P. 892–903.

3. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotics Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
4. *Гадыльшин Р.Р.* Об амплитуде колебаний для резонатора Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 5. С. 1094–1097.
5. *Гадыльшин Р.Р.* Метод сращиваемых асимптотических разложений в задаче об акустическом резонаторе Гельмгольца // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 412–418.
6. *Гадыльшин Р.Р.* Поверхностные потенциалы и метод согласования асимптотических разложений в задаче о резонаторе Гельмгольца // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. Вып. 2. С. 88–115.
7. *Гадыльшин Р.Р.* О квазисобственных частотах резонатора Гельмгольца // Асимптотические решения задач математической физики / Уфа; БНЦ УрО АН СССР. 1990. С. 33–49.
8. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 380 с.
9. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.
10. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
11. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
12. *Ильин А.М., Сулейманов Б.И.* Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка вблизи границы области // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 6. С. 1322–1339.
13. *Попов И.Ю.* Теория расширений и локализация резонансов для областей ловушечного типа // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1366–1390.

Уфа

Поступила в редакцию
10.IV.1992