

УДК 532.5

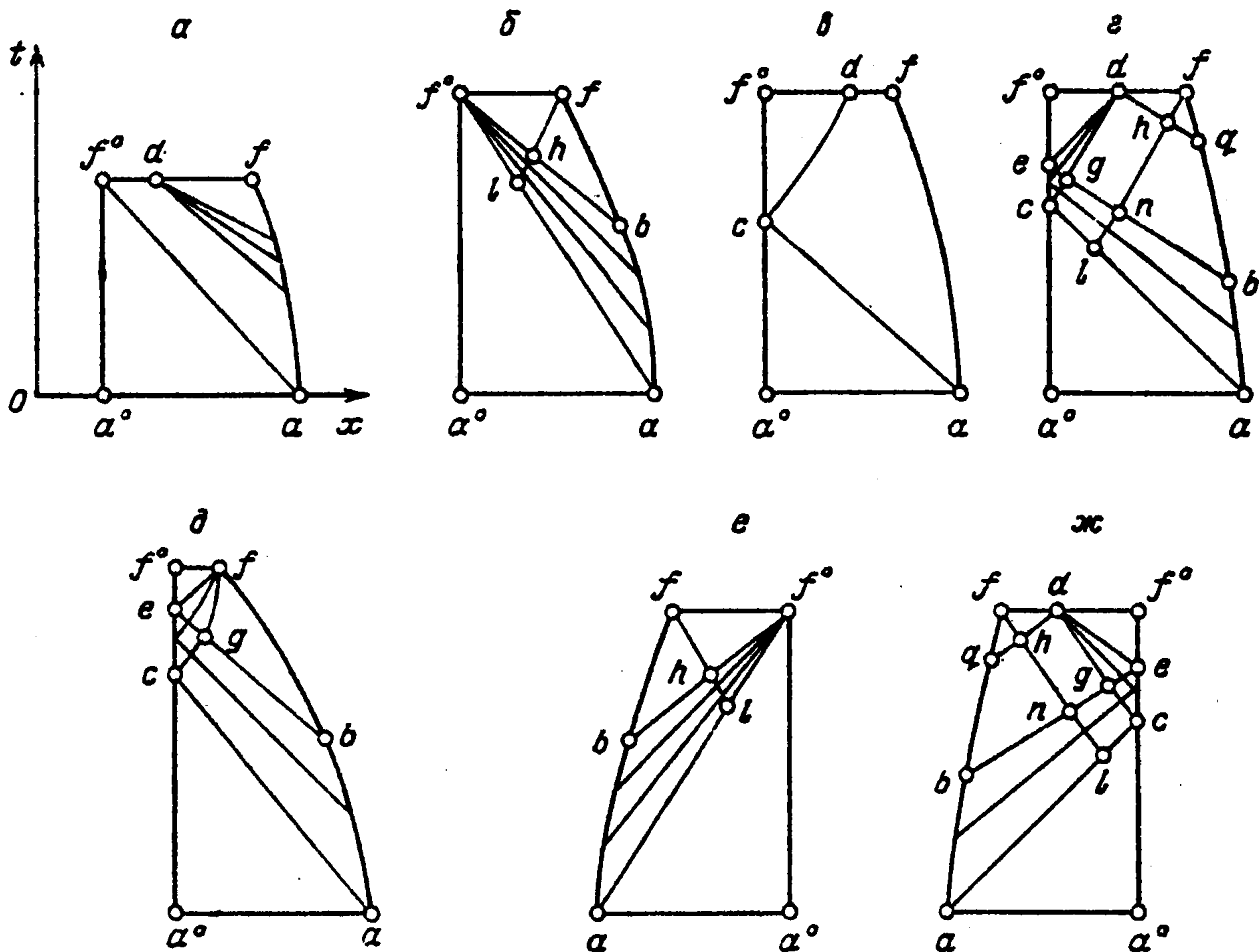
© 1993 г. А.Н. Крайко

## ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОБ ОДНОМЕРНОМ ИЗЭНТРОПИЧЕСКОМ СЖАТИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Рассматривается вариационная задача об одномерном безударном сжатии идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа плоским ( $\nu = 0$ ), цилиндрическим ( $\nu = 1$ ) и сферическим ( $\nu = 2$ ) поршнем. Как и в [1, 2], минимизируется работа поршня при заданном его перемещении за фиксированное время  $t_f$ . При постановке задачи важную роль играет время  $\tau_0$  прохождения звуковой волной отрезка  $x_a - x_{a^0}$ , где  $x$  – декартова, цилиндрическая или сферическая координата, а  $x_a$  и  $x_{a^0}$  отвечают поршню (при  $t = 0$ ) и неподвижной стенке (для  $\nu = 1$  и 2, возможно, – оси или центру симметрии). Если не оговорено особо,  $x_{a^0} < x_a$ , и поршень в плоскости  $xt$  движется влево. По постановке задачи в газе при  $t < t_f$  не допускаются ударные волны. Поэтому, если  $t_f < \tau_0$ , то слева от "начальной"  $c^-$ -характеристики газ невозмущен и может быть исключен из рассмотрения, т.е. случай  $t_f < \tau_0$  сводится к случаю  $t_f = \tau_0$  с меньшим  $\tau_0$  и большим  $x_{a^0}$ . В отличие от [1, 2], где газ при  $t = 0$  предполагался покоящимся и однородным, далее при нулевой  $x$ -компоненте скорости допускается переменность начальной энтропии, а для  $\nu = 1$  – и радиально уравновешенной начальной закрутки.

В [1, 2] был рассмотрен только случай  $t_f < \tau_0$ , для которого при  $\nu = 0$  задача решена точно, а при  $\nu \neq 0$  приближенно (в рамках использования плоского течения типа "простой волны"). Ниже время  $t_f$  может быть любым. Для  $t_f = \tau_0$  точное решение методом неопределенного контрольного контура [3] найдено для всех  $\nu$ . Здесь под точным решением понимается сведение исходной задачи построения оптимальной траектории поршня к численному решению нескольких задач одномерной нестационарной газовой динамики методом характеристик (МХ). В одной из решаемых МХ задач известно распределение параметров на концевом участке "экстремальной"  $c^+$ -характеристики, приходящей в концевую точку траектории поршня. Условие экстремума, определяющее указанный участок, оказалось таким же, как в задаче об оптимальном расширении поршня [4].

В случае  $t_f > \tau_0$  условия еще одной решаемой МХ задачи ставятся на примыкающем к неподвижной стенке отрезке горизонтали  $t = t_f$ , где газ либо покоится, либо (при наличии закрутки для  $\nu = 1$ ) радиально уравновешен. При некотором времени  $t_f = \tau_m > \tau_0$  покоится или радиально уравновешен весь оптимально сжатый газ. Для  $t_f > \tau_m$  такое сжатие (с одинаковой работой) реализуется бесконечным числом способов. Оптимальное сжатие при  $t_f \geq \tau_m$  требует существенно меньшей работы, чем при  $t_f = \tau_0$ .



Фиг. 1

1. Пусть в начальный момент  $t = 0$  идеальный газ находится в плоском, цилиндрическом или сферическом объеме:  $x_{a^0} \leq x \leq x_a$ . Далее, как правило, индексы  $a, a^0, \dots$  приписывается параметрам в точках  $a, a^0, \dots$  плоскости  $xt$  (фиг. 1). Начальным распределениям параметров припишем нулевой индекс. В общем случае они могут быть функциями  $x$ . В частности, допускается произвольная начальная неравномерность удельной энтропии  $s_0(x)$ . Переменность начального давления  $p_0$  далее допускается только для  $v = 1$  как следствие закрутки потока — отличной от нуля окружной компоненты  $v_0(x)$  скорости газа. Ее  $x$ -компонента  $u$  предполагается в момент  $t = 0$  отсутствующей для всех  $v$ , а для  $v = 1$  и  $v_0(x) \neq 0$  принимается, что  $p_0(x)$  удовлетворяет условию "радиального равновесия"

$$\frac{dp_0}{dx} = \rho_0 v_0^2 / x \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — плотность газа. Отличные от  $p$  и  $s$  термодинамические параметры ( $\rho$ , удельный объем  $\omega = 1/\rho$ , удельные внутренняя энергия  $e$  и энтальпия  $h = e + p/\rho$ , абсолютная температура  $T$ , скорость звука  $a$  и т.п.) считаются заданными функциями  $p$  и  $s$ , причем

$$h = h(p, s), \quad \omega = \omega(p, s) = h_p, \quad T = T(p, s) = h_s$$

$$a^{-2} = a^{-2}(p, s) = \rho_p = -\omega_p / \omega^2 = -h_{pp} / h_p^2, \quad h_{ppp} = \omega_{pp} > 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $h(p, s)$  — известная функция  $p$  и  $s$ , нижние значки  $p$  и  $s$  означают соответствующее частное дифференцирование, выражения для  $\omega$  и  $T$  — следствия термодинамического равенства:  $Tds = dh - \omega dp$ , а неравенство  $\omega_{pp} > 0$  — определение "нормального" газа. Только при его выполнении поршень,двигающийся в газ, образует волну сжатия, в которой могут пересечься бегущие от поршня характеристики [5, 6]. В этом смысле неравенство из (1.2),

т.е. рассмотрение лишь газов, названных выше "нормальными", для дальнейшего принципиально.

Последующее исследование остается справедливым и при ненулевых и даже зависящих от  $x$  начальных распределений проекций вектора скорости на оси  $y$  и  $z$  для  $v = 0$  и осевой компоненты скорости для  $v = 1$ . Эти компоненты, "сохраняясь в частице", не влияют на остальные параметры. При  $v = 2$  отличные от  $u$  компоненты вектора скорости отсутствуют в силу предположения о сферической симметрии.

Если в момент  $t = 0$  поршень, до этого неподвижный, начинает вдвигаться в идеальный газ, то при сформулированных выше условиях в газе возникает нестационарное течение с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами, определяемое условием непротекания на стенке и на поршне и уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho a^2 \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\rho u a^2}{x} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - v(2-v) \frac{v^2}{x} = 0 \\ \frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0 \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \Gamma = x^v v \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первое из этих уравнений – следствие уравнения неразрывности

$$\partial(x^v \rho) / \partial t + \partial(x^v \rho u) / \partial x = 0 \quad (1.4)$$

преобразованного с учетом (1.2) и третьего уравнения той же системы. Второе уравнение из (1.3) – проекция уравнения движения на ось  $x$ . Свободный член в нем существен только при  $v = 1$ , что обеспечивается множителем  $v(2-v)$ . Третье и четвертое уравнения (1.3) – условия сохранения энтропии и "момента количества движения"  $\Gamma$  в частице. Последнее существенно лишь для  $v = 1$ .

Уравнение неразрывности (1.4) допускает введение переменной Лагранжа  $\psi$ , такой, что вдоль любой кривой плоскости  $xt$

$$d\psi = K x^v \rho (dx - u dt) \quad (1.5)$$

с произвольным нормирующим множителем  $K$ , который для дальнейшего удобно взять положительным. Согласно (1.5),  $\psi$  – постоянна вдоль траекторий частиц (в частности, вдоль траекторий неподвижной стенки  $x = x_a$  и поршня). Введение  $\psi$  позволяет проинтегрировать два последних уравнения системы (1.3)

$$s = s_0(\psi), \quad x^v v \equiv \Gamma = \Gamma_0(\psi) \quad (1.6)$$

Первый интеграл – "интеграл энтропии" справедлив только при отсутствии в рассматриваемом течении ударных волн. Это, если не оговорено особо, далее предполагается.

Первые два уравнения системы (1.3) можно заменить характеристическими уравнениями, содержащими производные соответственно только вдоль  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристик. Вместе с уравнениями характеристик в плоскостях  $xt$  и  $\psi t$  они эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} dx = (u \pm a) dt, \quad d\psi = \pm K x^v \rho a dt \\ du \pm \frac{1}{\rho a} dp \pm \frac{v}{x} [au \mp (2-v)v^2] dt = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь верхние (нижние) знаки отвечают  $c^+$  ( $c^-$ )-характеристикам. Согласно второму равенству (1.7), при движении вдоль  $c^+$  ( $c^-$ )-характеристики в направлении роста  $t$  переменная Лагранжа  $\psi$  монотонно растет (убывает).

Работа  $A$ , совершаемая поршнем при его движении за время  $t_f$  из точки  $a$  в точку  $f$ , координата которой  $x_f < x_a$ , с точностью до несущественного для вариационной задачи положительного множителя равна

$$A = -K \int_0^{t_f} p x^\nu u dt = -K \int_{x_a}^{x_f} p x^\nu dx \quad (1.8)$$

Множитель  $K > 0$ , тот же, что и в (1.5), введен сюда из соображений удобства.

Сформулируем вариационную задачу. При заданных согласно сказанному выше начальных параметрах газа при  $t = 0$ ,  $x_{a^0} \leq x \leq x_a$  и неподвижной "внутренней" стенке  $x \equiv x_{a^0} \geq 0$  (в плоскости  $xt$  ее траектория – вертикаль  $a^0 f^0$ ) требуется найти такое движение поршня из фиксированной точки  $a$ :  $x = x_a$ ,  $t = 0$  в фиксированную точку  $f$ :  $x = x_f < x_a$ ,  $t = t_f$ , т.е. зависимость скорости поршня  $u$  в (1.8) от  $t$  или от  $x$ , чтобы при безударном для  $t < t_f$  течении работа  $A$  была минимальна. Требование безударности означает, в частности, что  $u_a = 0$ , а область возмущенного течения в плоскости  $xt$  ограничена снизу  $c^-$ -характеристикой, идущей из точки  $a$ . Так как  $u_0(x) \equiv 0$ , то упоминавшееся выше время  $\tau_0$ , согласно (1.7), равно

$$\tau_0 = - \int_a^{a^0} \frac{dx}{a_0(x)} = - \int_a^{a^0} \frac{d\psi}{K x^\nu \rho_0(\psi) a_0(\psi)}$$

В соответствии со сказанным ранее здесь  $t_f \geq \tau_0$ , а в [1, 2] случай  $t_f = \tau_0$  рассмотрен для  $a_0 \equiv \text{const}$ .

При решении сформулированной выше вариационной задачи наряду с (1.8) будут использоваться выражения для  $A$ , являющиеся следствиями интегрального закона сохранения энергии. Последний вместе с интегральным законом сохранения массы можно записать так

$$\begin{aligned} & K \oint \left\{ x^\nu \rho \left[ \frac{u^2}{2} + h + \nu(2-\nu) \frac{\Gamma^2}{2x^2} \right] (dx - u dt) - x^\nu p dx \right\} \equiv \\ & \equiv \oint \left\{ \left[ \frac{u^2}{2} + h + \nu(2-\nu) \frac{\Gamma^2}{2x^2} \right] d\psi - K x^\nu p dx \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\oint d\psi \equiv K \oint x^\nu \rho (dx - u dt) = 0$$

где интегрирование ведется вдоль произвольного замкнутого контура в плоскости  $xt$ ,  $x\psi$  или  $\psi t$ . Слагаемые с  $\nu^2 = \Gamma^2/x^2$  существенны в (1.9) только при  $\nu = 1$ , что, как и в (1.3), отражает множитель  $\nu(2-\nu)$ . Законы сохранения в интегральной форме (1.9) вместе с интегральными законами сохранения количества движения (или эквивалентными им законами сохранения момента количества движения) первичны, а дифференциальные уравнения (1.3) и (1.4) следуют из них в подобластях непрерывности параметров.

Для последующего анализа удобно использовать функции  $R(u, p, s)$  и  $L(u, p, s)$ , которые при  $\nu = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$  сохраняются соответственно вдоль  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристик, т.е. являются в этом случае инвариантами ("инвариантами Римана" [5, 6]) характеристической системы (1.7). В общем случае  $R$  и  $L$  введем

равенствами

$$2R = u + \Phi(p, s), \quad 2L = u - \Phi(p, s), \quad \Phi(p, s) = \int_{p_0(\psi)}^p \frac{dp}{\rho a}$$

где интеграл, определяющий  $\Phi(p, s)$ , берется при постоянном  $s = s_0(\psi)$ , а следовательно, и  $\psi$ . При  $s_0 \neq \text{const}$  и  $v \neq 0$  функции  $R$  и  $L$  не являются инвариантами. Несмотря на это, в соответствии с их определением

$$u = R + L, \quad \Phi(p, s) = R - L \quad (1.10)$$

При фиксированном  $\psi$  или, что то же —  $s$ , в силу определения  $R, L$  и  $\Phi$  и равенств (1.2) справедливы следующие выражения для частных производных:

$$\begin{aligned} u_R = u_L = 1, \quad \Phi_R = -\Phi_L = 1, \quad p_\Phi = \rho a, \quad p_{\Phi\Phi} = \frac{1}{2} \rho^4 a^4 \omega_{pp} \\ e_p = \frac{p}{\rho^2 a^2}, \quad e_{pp} = \frac{1}{\rho^2 a^2} - p \omega_{pp}, \quad h_{pp} = -\frac{1}{\rho^2 a^2} \\ \rho_{pp} = \frac{2}{\rho a^4} - \rho^2 \omega_{pp}, \quad a_p = -\frac{1}{\rho a} + \frac{1}{2} \rho^2 a^3 \omega_{pp} \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. В общем случае минимизируемый функционал (1.8) в согласии с (1.9) можно выразить через разность энергий газа при  $t = t_f$  и  $t = 0$ . В результате с точностью до несущественного при решении вариационной задачи постоянного слагаемого

$$A = \int_{f^0}^{f^1} \left[ e + \frac{u^2}{2} + v(2-v) \frac{\Gamma^2}{2\xi} \right] d\psi \quad (\xi = x^{1+v}) \quad (2.1)$$

В силу равенства (1.5), вводящего  $\psi$ , при  $t = \text{const}$  имеем ( $\xi' = d\xi/d\psi$ )

$$L \equiv \xi' - (1+v)/(K\rho) = 0 \quad (2.2)$$

Чтобы учесть эту связь, составим вспомогательный функционал

$$I = A + \int_{f^0}^f \mu(\psi) L d\psi$$

с подлежащим определению переменным множителем Лагранжа  $\mu(\psi)$ . Любые допустимые вариации  $\delta R, \delta L$  и  $\delta \xi$ , т.е. разности исходных и проварьированных значений  $R, L$  и  $\xi$  при фиксированном  $\psi$ , а следовательно, согласно (1.1) и (1.6), — при фиксированных  $p_0(\psi), s(\psi)$  и  $\Gamma(\psi)$ , должны удовлетворять дифференциальной связи (2.2). Поэтому вариации  $I$  и  $A$  совпадают. Проведя необходимые выкладки и учтя (1.2) и (1.11), найдем

$$\begin{aligned} \delta A = (F_- - F_+)_d \Delta \psi_d + (\mu_- - \mu_+)_d \delta \xi_{d-} + \int_{f^0}^f \left\{ (u + \chi) \delta R + (u - \chi) \delta L - \right. \\ \left. - \left[ \mu' + v(2-v) \frac{\Gamma^2}{2x^4} \right] \delta \xi + (\delta R)^2 + (\delta L)^2 - \frac{1}{4} \chi \rho^3 a^3 \omega_{pp} (\delta R - \delta L)^2 + \Omega (\delta \xi)^2 \right\} d\psi \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$F = e + \frac{u^2}{2} - \frac{1+v}{K\rho} \mu_+, \quad \chi = \frac{p}{\rho a} + \frac{1+v}{K\rho a} \mu, \quad \Omega = v(2-v) \frac{\Gamma^2}{2x^6}$$

При выводе (2.3) допускалось, что в распределениях параметров на  $f^0 f^1$  возможен разрыв в точке  $d$ . Параметрам слева (справа) от  $d$  приписан индекс "минус" ("плюс"), а через  $\Delta \psi_d$  обозначено возможное приращение  $\psi$  точки

разрыва. Поскольку скачки уплотнения при  $t < t_f$  запрещены постановкой вариационной задачи, то разрывы параметров на  $f^o f$  могут вызываться лишь фокусировкой в  $d$  одноименных характеристик. Если точек разрыва несколько, то в (2.3) предполагается суммирование по всем ним.

При любых (необязательно оптимальных) распределениях параметров на  $f^o f$  множитель  $\mu(\psi)$  можно, пользуясь произволом в его выборе, определить из условия обращения в нуль коэффициента при  $\delta\xi$  на  $f^o f$ , т.е. потребность, чтобы на каждом отрезке непрерывности параметров

$$\mu' + v(2-v)\Gamma^2 / (2x^4) = 0 \quad (2.4)$$

Поскольку (2.4) – дифференциальное уравнение первого порядка, то в дополнение к нему можно в точке (или точках) разрыва параметров положить

$$\mu_{d+} = \mu_{d-} = \mu_d \quad (2.5)$$

т.е. сделать множитель  $\mu$  непрерывным. Тогда выражение (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} \delta A = (F_- - F_+)_{d} \Delta \psi_d + \int_{f^o}^f \left[ (u + \chi) \delta R + (u - \chi) \delta L + (\delta R)^2 + \right. \\ \left. + (\delta L)^2 - \frac{1}{4} \chi \rho^3 a^3 \omega_{pp} (\delta R - \delta L)^2 + \Omega (\delta \xi)^2 \right] d\psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Во всех случаях, когда  $v(2-v)\Gamma \equiv 0$ , множитель  $\mu$ , выбранный в соответствии с (2.4) и (2.5), постоянен. Последнее естественно, ибо в таких ситуациях  $\xi$  не входит явно в выражение (2.1) для  $A$ . Поэтому здесь вместо дифференциального уравнения (2.2) можно учесть его следствие – изопериметрическое условие

$$X \equiv \xi_{f^o} - \xi_f = -\frac{1+v}{K} \int_{f^o}^f \frac{d\psi}{\rho} \quad (2.7)$$

Данное условие включается во вспомогательный функционал  $I = A + \lambda X$  постоянным множителем Лагранжа  $\lambda$ , который совпадает с  $\mu \equiv \text{const}$ .

Пусть теперь  $t_f = \tau_0$ . Тогда точки разрыва могут быть результатом фокусировки только  $c^-$ -характеристик, как показано на фиг. 1,а. В плоском изэнтропическом случае ( $v = 0$ ,  $s_0 \equiv \text{const}$ ), для которого в [1, 2] найдено точное решение вариационной задачи, в треугольнике  $af^o f$  реализуется простая волна с  $R \equiv 0$  и прямолинейными  $c^-$ -характеристиками. Так как здесь  $\delta R \equiv 0$ ,  $\Omega \equiv 0$ , а  $\xi = x$ , то из (2.3) и (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta A = (F_- - F_+)_{d} \Delta \psi_d + (\mu_- - \mu_+)_{d} \delta x_{d-} + \int_{f^o}^f \left[ (u - \chi) \delta L + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{4} \chi \rho^3 a^3 \omega_{pp}\right) (\delta L)^2 \right] d\psi \left( F = e + \frac{u^2}{2} - \frac{\mu_+}{K\rho}, \chi = \frac{p}{\rho a} + \frac{\mu}{K\rho a} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

с  $\mu \equiv \text{const}$  по крайней мере на каждом участке непрерывности параметров. Задание  $x_f$  и учет этого обстоятельства с помощью уравнения (2.2), интегрируемого от фиксированного  $x_{f^o}$ , дает способ определения указанных констант.

Для этого на каждом таком участке вводится "компенсирующая" точка  $k$ , в котором за счет произвола в выборе  $\mu$  обращается в нуль коэффициент при  $\delta L$

в (2.8). Это дает

$$(\rho a)_k (u - \chi)_k \equiv (\rho a u - p - \mu / K)_k = 0$$

Теперь, варьируя  $L$  в окрестности любой отличной от  $k$  точки соответствующего участка, будем одновременно так варьировать  $L$  в окрестности  $k$ , чтобы не изменялась координата  $x$  правой границы этого участка. Тогда при неварьируемых  $L$  на прочих участках будет обеспечена неизменность всех  $\psi_d$ ,  $x_d$  и заданного  $x_f$ . Благодаря этому вариации  $\delta L$  можно считать независимыми и, следовательно, на каждом участке непрерывности параметров

$$\rho a (u - \chi) \equiv \rho a u - p - \mu / K = 0 \quad (2.9)$$

В рассматриваемом случае течение в  $a^{\circ}f$  – простая волна. Поэтому параметры газа в (2.9) – функции одного из них, например  $u \equiv L$ . Следовательно, на каждом участке непрерывности параметров они постоянны, а оптимальная траектория поршня может состоять только из отрезков постоянной скорости и участков разгона, обеспечивающих фокусировку идущих от них  $c^-$ -характеристик на  $f^{\circ}f$ . Покажем, что точка фокусировки характеристик единственная и что она совпадает с  $f^{\circ}$ , как изображено на фиг. 1,б (на ней и далее оси  $x$  и  $t$  не приводятся). Взяв "самую правую" из таких точек, вычислим в ней коэффициент при  $\Delta\psi_d$  из (2.8). Подставив в него  $\mu_+$ , определенный из (2.9), и временно опуская индекс "d", найдем

$$\varphi \equiv F_- - F_+ = e_- + u_-^2 / 2 + (p - \rho a u)_+ / \rho_- - h_+ - u_+^2 / 2 + a_+ u_+ \quad (2.10)$$

Данная разность – функция  $L_-$  и  $L_+$ , равная нулю при  $L_+ = L_-$ . Согласно (1.2) и (1.11)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial L_+} = 2a_+ \left( 1 - \frac{\rho_+}{\rho_-} \right) \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right)_+$$

При фокусировке волн сжатия от разгоняющегося поршня, движущегося влево,  $u_+ < 0$ ,  $\rho_+ / \rho_- > 1$ , а  $L_+ \equiv u_+ < L_- \equiv u_-$ . Поскольку  $\omega_{pp} > 0$ , то отсюда найдем, что  $\partial \varphi / \partial L_+ < 0$ ,  $(F_- - F_+)_{d} \equiv \varphi_d > 0$  и при  $\Delta\psi_d < 0$  вариация  $\delta A < 0$ .

Отрицательные  $\Delta\psi_d$  для  $x_d > x_{f^{\circ}}$  получаются сдвигом соответствующего участка разгона поршня "вниз" (т.е. уменьшением момента начала разгона) с замедлением на нем поршня (по модулю скорости) с тем, чтобы точка пересечения идущих от поршня  $c^-$ -характеристик сместилась по  $f^{\circ}f$  влево. Предшествующие участки траектории при этом не варьируются. Поэтому слева от рассматриваемого разрыва  $\delta L \equiv 0$ ,  $\delta x \equiv 0$ , а следовательно, и в исследуемой точке  $d$ :  $\delta x_d = 0$ . Равны нулю и все приращения  $\Delta\psi_d$  прочих точек разрыва (если таковые имеются). Участок траектории, примыкающий к  $f$ , при этом хотя и корректируется для обеспечения прихода поршня в заданную конечную точку, но в силу (2.9) не вносит в  $\delta A$  линейного по  $\delta L$  вклада. Можно показать, что вклад  $(\delta L)^2$  при описанном способе варьирования имеет более высокий порядок малости, чем  $\Delta\psi_d$ . Из сказанного следует справедливость нашего утверждения. В случае фиг. 1,б поршень после разгона движется с постоянной скоростью. Для такой траектории с учетом (2.9) вместо (2.8) будем иметь

$$\delta A = \varphi_d \Delta\psi_d + \int_{d=f^{\circ}}^f \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right) (\delta L)^2 d\psi \quad (2.11)$$

с  $\varphi_d > 0$ , где  $\varphi_d$  вычисляется по (2.10), причем  $e_- = e_0$ , а  $u_- = 0$ . В (2.11) точка  $d$

совпадает с  $f^\circ$  и теперь допустимые  $\Delta\psi_d$  в отличие от внутренних точек фокусировки неотрицательны. Это обеспечивается "поднятием" разгонного участка  $ab$  с одновременным увеличением на нем скорости поршня (по модулю). Обозначим через  $\delta^\circ L \equiv \delta^\circ u$  вариации  $L$  и  $u$  на траектории при  $t = \text{const}$ . Тогда при таком способе варьирования траектории  $\delta^\circ u > 0$  вблизи точки  $a$  и, наоборот,  $\delta^\circ u < 0$  при  $t < t_b$  в окрестности точки  $b$ , т.е. на  $ab$  допустимые  $\delta^\circ u$  отнюдь не знакопостоянны, как полагалось в [1, 2]. При использовании (2.11) существенно не знакопостоянство  $\delta^\circ u$  на  $ab$ , а неотрицательность  $\Delta\psi_d$ . Так как наряду с  $\varphi_d > 0$  в рассматриваемой задаче  $\omega_{pp}u < 0$ , то, согласно (2.11), любое допустимое варьирование построенной траектории ( $\Delta\psi_d \geq 0$ ,  $\delta L$  на  $df \equiv f^\circ f$  произвольны) увеличивает работу. Следовательно, она оптимальна.

Неэквивалентность подходов, опирающихся на выражения для  $A$  в форме (1.8) и (2.1), обусловлена тем, что при "постановке на траектории" исходная задача только на первый взгляд является задачей оптимального управления с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Дело в том, что условие отсутствия в  $af^\circ f$  ударных волн для течения, описываемого уравнениями в частных производных, при этом не удается заменить простым ограничением на скорость поршня (или на знак  $\delta^\circ u$ ) на разгонном участке траектории. Подобная ситуация типична для газовой динамики, где разные записи оптимизируемых функционалов обычно дополняют друг друга.

3. В свете последнего замечания рассмотрение случая  $t_f > \tau_0$  начнем с постановки задачи на искомой траектории для плоского поршня и  $s_0 \equiv \text{const}$ . Работу  $A$  возьмем в форме (1.8), а изопериметрическое условие – задание разности координат поршня

$$X \equiv x_a - x_f = - \int_a^f u dt$$

введем во вспомогательный функционал  $I = A + \lambda X$  постоянным множителем Лагранжа  $\lambda$ . Пусть (фиг. 1, в,  $cd - c^+$ -характеристика) заданное  $t_f$  таково, что  $x_d \leq x_f$ . Тогда в  $acdf$  будет простая волна с  $R \equiv 0$  и  $L = u$ , и с учетом этого

$$\delta A = K \int_a^f \left[ \left( \rho a u - p - \frac{\lambda}{K} \right) \delta^\circ u + \rho a \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right) (\delta^\circ u)^2 \right] dt \quad (3.1)$$

Забыв на время соображения разд. 2 о формулировке условия отсутствия при  $t < t_f$  ударных волн, на основе анализа (3.1) можно прийти к оптимальной траектории, реализующей течение, изображенное на фиг. 1, г. На ней, как и на фиг. 1, б, к разгонному участку  $ab$  примыкает участок, на котором поршень движется с постоянной скоростью. Теперь, однако, в точке  $d$  фокусируются  $c^+$ -характеристики, идущие от стенки как отражение  $c^-$ -характеристик, пришедших от  $ab$ . В  $bgdf$  параметры газа постоянны, в частности  $u \equiv \text{const} < 0$ , а в треугольнике  $ef^\circ d$  газ покоится, затормозившись в простой волне сжатия  $edg$ . На  $bf$

$$\varphi(u) \equiv \rho a u - p - \lambda / K = 0 \quad (3.2)$$

а на  $ab$ :  $\varphi > 0$ . Последнее есть следствие того, что согласно (1.2) и (1.11)

$$d\varphi / du = 2\rho a \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right) > 0$$

$\varphi_b = 0$  и  $u > u_b$  при  $t < t_b$ . В силу этого же неравенства на  $bf$  не может быть "внутренних разгонных участков" таких, что  $c^-$ -характеристики, идущие от них, фокусировались бы на  $f^\circ f$  без отражения или с отражением от стенки.

С точностью до замены  $f^{\circ}f$  на траекторию  $af$  условие (3.2) получается аналогично совпадающему с ним равенству (2.9). При этом, взяв компенсирующую точку на  $af$ , нужно проварьировать траекторию всеми допустимыми способами. Можно, например, наряду с окрестностью  $k$  изменять  $u$  в окрестности еще только одной точки разгонного участка. При таком варьировании  $\delta^{\circ}u$  на  $ab$  положительны, ибо для  $\delta^{\circ}u < 0$  часть  $c^+$ -характеристик пучка пересеклась бы вблизи  $d$  при  $t < t_f$ . Для  $\delta^{\circ}u > 0$  на  $ab$  положительность  $\varphi$  на разгонном участке дает  $\delta A > 0$ , чем, вроде бы, доказывается оптимальность построенной траектории. К сожалению, однако, здесь, как и в анализе [1, 2] для  $t_f = \tau_0$ , не учитывается возможность  $\delta^{\circ}u < 0$  на  $ab$  при описанном в разд. 2 варьировании с "поднятием"  $ab$ . С другой стороны, при произвольном варьировании  $u = L$  на  $bq$  возмущения, идущие по  $c^-$ -характеристикам, деформируют пучок  $c^+$ -характеристик, что может вызвать их пересечение при  $t < t_f$ . Следовательно, вариации  $\delta^{\circ}u$  на этом отрезке не произвольны и в этом смысле условие (3.2), обращающее в нуль линейное слагаемое в (3.1), является излишне сильным. При  $v = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$  последнее, правда, в отличие от общего случая (разд. 6) не вредит построенному решению. Эти соображения, а также желание перенести схему фиг. 1,2 на общий случай оправдывают исследование ее с помощью перехода к сечению  $f^{\circ}f$ .

После перехода к  $f^{\circ}f$ , т.е. к выражению (2.6) для течения с  $u \equiv 0$  на  $f^{\circ}d$  при любых  $v, s_0$  и  $\Gamma$  получим

$$\begin{aligned} \delta A = & (F_- - F_+)_d \Delta \Psi_d + \int_{f^{\circ}}^d \left\{ \chi \left[ 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} (\delta R - \delta L) \right] (\delta R - \delta L) + \right. \\ & + (\delta R)^2 + (\delta L)^2 + \Omega (\delta \xi)^2 \left. \right\} d\psi + \int_d^f \left[ (u + \chi) \delta R + (u - \chi) \delta L + (\delta R)^2 + \right. \\ & \left. + (\delta L)^2 - \frac{1}{4} \chi \rho^3 a^3 \omega_{pp} (\delta R - \delta L)^2 + \Omega (\delta \xi)^2 \right] d\psi \end{aligned} \quad (3.3)$$

В плоском изэнтропическом случае, когда  $\Omega \equiv 0$ , а  $\delta R \equiv R \equiv 0$  на  $df$ , как и в разд. 2,  $L \equiv u \equiv \text{const}$  на  $df$  и в треугольнике  $dfq$  определяется условием (2.9) с  $\mu \equiv \text{const}$ . В соответствии с ним выражение (3.3) несколько упрощается

$$\begin{aligned} \delta A = & (F_- - F_+)_d \Delta \Psi_d + \int_{f^{\circ}}^d \left\{ \chi \left[ 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} (\delta R - \delta L) \right] (\delta R - \delta L) + \right. \\ & \left. + (\delta R)^2 + (\delta L)^2 \right\} d\psi + \int_d^f \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right) (\delta L)^2 d\psi \end{aligned} \quad (3.4)$$

В исследуемом течении  $u \equiv 0, a \equiv a_{f^{\circ}}$  в  $ef^{\circ}d$ , а в пучке  $edg$  все  $c^+$ -характеристики прямолинейны. При отражении от стенки, где  $u = R + L = 0$ , возмущения  $R$  отражаются возмущениями  $L$  противоположного знака. С учетом этих обстоятельств можно показать, что одинаковые вариации  $L$  или  $-R$  в  $\varepsilon$ -окрестности произвольной точки  $f^{\circ}d$ , которые будем характеризовать величиной

$$\sigma = \int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \delta L d\psi \quad \vee \quad - \int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \delta R d\psi$$

вызывают одинаковую деформацию пучка. При анализе с переходом на  $f^{\circ}f$  разрыв в точке  $d$  смещается, не размазываясь (если оптимальное распределение параметров на  $f^{\circ}f$  непрерывно, то разрыв не вводится изначально!). Поэтому связанное с  $\sigma \neq 0$  размазывание пучка должно компенсироваться коррекцией начального участка траек-

тории, такой, чтобы пересечение всех характеристик пучка происходило при заданном  $t = t_f$ . Можно показать, что это вызовет смещение пучка, пропорциональное  $\sigma$ . Наряду с этим допустимо независимое варьирование разгонного участка с его "поднятием" и со смещением  $d$  влево. Следовательно  $\Delta\psi_d = \Delta\psi_{d0} + N\sigma$ , где  $N$  – некоторый, зависящий от течения в пучке  $edc$  коэффициент, а  $\Delta\psi_{d0} \leq 0$ .

Напомним, что "рассмотрение на траектории" оставило открытым лишь вопрос о варьировании с "поднятием" ее начального участка, чему в приведенном выше выражении для  $\Delta\psi_d$  отвечает  $\Delta\psi_{d0}$ . Имея в виду лишь это обстоятельство, вместо (3.4) получим

$$\delta A = (F_- - F_+)_d \Delta\psi_{d0} + \dots \quad (3.5)$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, обусловленные  $\sigma \neq 0$  на  $f^\circ d$  и  $(\delta L)^2$  на  $df$ . Для решения интересующего нас вопроса достаточно определить знак  $\varphi \equiv (F_- - F_+)_d$ , причем теперь в отличие от (2.10)  $\varphi = \varphi(R_-, R_+)$ , но аналогично (2.10)  $\varphi(R_-, R_-) = 0$ . С учетом (2.9) и того, что в рассматриваемом случае  $u_- = 0$ , временно опустив индекс " $d$ ", найдем

$$\varphi = h_- - h_+ - \frac{u_+^2}{2} + \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho_-}\right) a_+ u_+ + \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_-} \quad (3.6)$$

В исследуемом случае  $\rho_+ < \rho_-$ ,  $\rho_+ < \rho_-$  и  $u_+ < 0$ , в силу чего все слагаемые правой части (3.6), кроме первого, отрицательны. Этого, конечно, недостаточно для отрицательности  $\varphi$ , в частности,  $h_- - h_+ > 0$ . Помня, что  $\varphi(R_-, R_-) = 0$  и  $R_+ < R_-$ , найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R_+} = - \left[ 2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{\rho_-} - 1 \right) \rho^3 a^4 \omega_{pp} \right]_+ u_+ = - \left[ 2 + \frac{\kappa + 1}{2} \left( \frac{\rho_+}{\rho_-} - 1 \right) \right] u_+ > \frac{\kappa - 3}{2} u_+$$

где второе равенство и неравенство справедливы для совершенного газа с показателем адиабаты  $\kappa$ . Отсюда по крайней мере для совершенного газа с  $\kappa \leq 3$  заведомо следует, что  $\varphi < 0$  и в согласии с (3.5)  $\delta A \geq 0$  при  $\Delta\psi_{d0} \leq 0$ . При этом, как и в разд. 2, можно показать, что при "поднятии" разгонного участка траектории слагаемые, обозначенные в (3.5) многоточием, имеют более высокий порядок малости, чем  $\varphi \Delta\psi_{d0}$ .

4. Для  $v = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$  сочетание постановок вариационной задачи на траектории и в сечении  $t = t_f$  позволило доказать, что траектории, реализующие схемы течения фиг. 1,б и г, действительно обеспечивают минимум  $A$ . При произвольных  $v$ ,  $s_0$  и  $\Gamma$  столь же полного анализа провести не удастся, что типично для вариационных задач газовой динамики. Более того, постановка на траектории в общем случае просто не проходит, так как несправедливо решение с  $R \equiv 0$  ("простая волна"). Сужаются и возможности перехода к сечению  $t = t_f$ . С другой стороны, требование отсутствия ударных волн при  $t < t_f$  указывает на то, чтобы схемы фиг. 1,б и г (разумеется, с  $u \neq \text{const}$  на  $bf$  и с криволинейными характеристиками пучков) были "проверены на оптимальность" для любых  $v$ ,  $s_0$  и  $\Gamma$ . Указанная "проверка" особенно проста в том частном случае схемы фиг. 1,г, когда точки  $d$  и  $f$  совпадают (фиг. 1,д). Подобное может произойти при  $t_f \geq \tau_m$ , где упоминавшееся ранее время  $\tau_m$  определяется в процессе решения.

Опираясь на (3.3), т.е. на переход к  $f^\circ f$ , покажем, что при  $t_f \geq \tau_m$  в общем случае оптимально решение с  $u \equiv 0$  на  $f^\circ f$  и как следствие – в  $ef^\circ f$ . При  $u \equiv 0$  на  $f^\circ f$  (3.3) сводится к

$$\delta A = \varphi \Delta \psi_d + \int_f^f \left\{ \chi \left[ 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} (\delta R - \delta L) \right] (\delta R - \delta L) + \right. \\ \left. + (\delta R)^2 + (\delta L)^2 + \Omega (\delta \xi)^2 \right\} d\psi \quad (4.1)$$

причем допустимые  $\Delta \psi_d \leq 0$ , при вычислении  $\varphi = (F_- - F_+)_d$  в согласии с (2.5)  $\mu_+ = \mu_-$ , а параметры с индексами "+" и "-" связаны условиями:  $L_+ = L_-$  и  $R_+ < R_-$ . Эти условия отвечают варьированию траектории с "поднятием" ее разгонного участка, когда точка фокусировки  $c^+$ -характеристик смещается по  $f^o f$  влево. Если  $t_f > \tau_m$ , то возможен и такой способ варьирования, при котором в  $d$  для проварьированной траектории придет пучок отраженных от нее  $c^-$ -характеристик. В этом случае в  $d$ :  $R_+ = R_-$ , а  $L_+ < L_-$ . При любом допустимом способе варьирования  $\Delta \psi_d \leq 0$  и единственным линейным слагаемым, которому не запрещается быть знакопеременным, является  $\chi(\delta R - \delta L)$ . Поэтому, исследуя схему течения фиг. 1,  $\delta$  с  $u \equiv 0$  на  $f^o f$  на минимум  $A$ , естественно приравнять к нулю множитель  $\chi$  и посмотреть, что это дает. Итак, пусть на  $f^o f$ :

$$\rho \alpha \chi \equiv p + (1 + \nu) \mu / K = 0 \quad (4.2)$$

Напомним, что входящий сюда множитель  $\mu$  с точностью до задания, например  $\mu_{f^o}$ , определяется дифференциальным уравнением (2.4). Если в согласии с (4.2) положить  $\mu_{f^o} = -K p_{f^o} / (1 + \nu)$ , то (2.4) и (4.2) определяют  $\mu$  и  $p$  на всем отрезке  $f^o f$ .

Дифференцируя (4.2) по  $x$  и исключив  $\mu_x = \mu' \psi_x = K x^\nu \rho \mu'$  с помощью (4.2), найдем что на  $f^o f$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nu(2 - \nu) \frac{\rho v^2}{x} \quad (4.3)$$

т.е. либо  $p \equiv \text{const}$ , либо (при  $\nu = 1$  и  $\Gamma \neq 0$ ) поток радиально уравновешен. Согласно (1.3) и то, и другое обеспечивает  $u \equiv 0$  и  $p \equiv \text{const}$ , а при  $\nu = 1$  и  $\Gamma \neq 0$  – радиальное равновесие потока во всем треугольнике  $ef^o f$ .

В силу (4.2) вместо (4.1) получим

$$\delta A = \varphi \Delta \psi_d + \int_f^f [(\delta R)^2 + (\delta L)^2 + \Omega (\delta \xi)^2] d\psi \quad (4.4)$$

Так как  $\Omega \geq 0$ , а  $\Delta \psi_d \leq 0$ , то остается определить знак  $\varphi$  для описанных выше способов варьирования траектории. Выразив из (4.2)  $\mu$  через  $p_-$  и, как и ранее, опустив индекс " $d$ ", найдем, что теперь

$$\varphi = h_- - e_+ - \frac{p_-}{\rho_+} - \frac{u_+^2}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial R_+} = -u_+ + \frac{p_- - p_+}{\rho_+ a_+} > 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial L_+} = -u_+ + \frac{p_+ - p_-}{\rho_+ a_+} > 0$$

Здесь  $\partial \varphi / \partial R_+$  определено для ситуации, в которой влево сдвигается пучок  $c^+$ -характеристик, а  $\partial \varphi / \partial L_+$  – пучок идущих от траектории  $c^-$ -характеристик. В обоих случаях  $u_+ < 0$ , однако в первом из них  $p_- > p_+$ , а во втором; наоборот,  $p_- < p_+$ . Кроме того, как уже отмечалось,  $\varphi(R_-, R_+)$  и  $\varphi(L_-, L_+)$  обращается в нуль соответственно при  $R_+ = R_-$  и  $L_+ = L_-$ , а  $R_+ < R_-$  и  $L_+ < L_-$ . Поэтому в обеих

ситуациях  $\varphi < 0$  и при любом допустимом варьировании траектории поршня ( $\Delta\psi_a \leq 0$ , знаки  $\delta R$ ,  $\delta L$  и  $\delta\xi$  на  $f^0f$  произвольны)  $\delta A$  в силу (4.4) неотрицательна. Следовательно, найденное решение реализует минимум  $A$ .

5. Практическое построение оптимальной траектории, отвечающей схеме фиг. 1, д, и определение интервала  $\tau_m$  сводится к численному решению следующих задач. Сначала по заданным распределениям параметров при  $t = 0$  вычисляются общая масса газа

$$M = \int_{a^0}^a x^\nu \rho_0(x) dx$$

и нормирующий множитель  $K = 1/M$ . При таком выборе  $K$  и  $\psi_{a^0} = 0$  на поршне:  $\psi_a = 1$ . Затем по тем же начальным распределениям из (1.5) с  $dt = 0$  рассчитывается  $\psi = \psi_0(x)$  и как результат этого определяются правые части (1.6) и  $p_0(\psi)$ , удовлетворяющее условию радиального равновесия (1.1). После этого отличные от  $u \equiv 0$  параметры газа на  $f^0f$  находятся с использованием (1.6) численным интегрированием уравнения (2.2), в котором  $\rho = \rho[p, s_0(\psi)]$ , и уравнения радиального равновесия (4.3). Последнее удобно использовать в форме

$$p' \equiv \frac{\partial p}{\partial \psi} = \nu(2 - \nu) \frac{\Gamma^2}{K\xi^2}$$

Произвол в выборе давления  $p_{f^0} > p_0(0)$  используется при этом для удовлетворения условия:  $\xi(1) = \xi_f = x_f^{1+\nu}$  с заданным  $x_f < x_a$ . Как уже отмечалось, рассчитанное таким способом радиально уравновешенное течение (или для  $\nu(2 - \nu)\Gamma \equiv 0$  – покоящийся газ, в котором  $p \equiv p_{f^0}$ ) сохраняется во всем треугольнике  $ef^0f$ , ограниченном снизу  $c^+$ -характеристикой  $ef$ . Далее расчет ведется от сечения  $f^0f$  в направлении уменьшения времени, начало отсчета которого на данном этапе удобно совместить с указанным сечением, положив  $t_f = 0$ . Характеристика  $ef$  строится интегрированием второго уравнения системы (1.7) со знаком "плюс" и  $p_a$  – известной функцией  $\psi$ . Интегрирование ведется от точки  $f$ , в которой  $\psi = 1$  и  $t = 0$ . Зависимость  $x$  от  $\psi$  на  $ef$  та же, что на  $f^0f$ , а "условие совместимости" – третье уравнение системы (1.7), которое для  $u \equiv 0$  в  $ef^0f$  сводится к условию радиального равновесия, при этом удовлетворяется автоматически.

По данным на  $ef$  и условию непротекания  $u = 0$  на неподвижной стенке ( $\psi = 0$ ,  $x = x_{f^0}$ ,  $t < t_e$ ) расчет пучка  $c^+$ -характеристик (при счете в направлении уменьшения  $t$  – пучка волн разрежения) выполняется до такой точки  $s$ , где давление, непрерывно падая с уменьшением времени, станет равным заранее известной величине  $p_0(0) < p_e = p_{f^0}$ . Построение "начальной"  $c^-$ -характеристики  $sa$ , ограничивающей покоящийся или радиально уравновешенный газ в треугольнике  $a^0sa$ , проводится аналогично построению  $c^+$ -характеристики  $ef$  при уже известных множителе  $K$  и справедливых на  $sa$  зависимостях  $\psi = \psi_0(x)$  или  $x = x_0(\psi)$ . В результате такого расчета найдется время  $t_a < 0$ , а по нему и  $\tau_m = -t_a > \tau_0$  (в типичных ситуациях  $\tau_m > 2\tau_0$ ). Изменив после определения  $t_a$  начало отсчета  $t$ , решив задачу Гурса с данными на характеристиках  $fs$  и  $sa$  и выделив при ее решении линию  $af$ , на которой  $\psi = 1$ , получим искомую траекторию поршня. Найденное  $\tau_m$  является минимальным временем, при котором возможно заданное безударное сжатие покоящегося или радиально равно-

вешенного газа до такого же состояния с большей средней плотностью. Обеспечивающая такое сжатие траектория поршня единственна. При  $t_f > \tau_m$  указанная задача имеет бесчисленное множество решений.

Тем же способом, взяв  $\psi_d < 1$  и  $x_d < x_0(\psi_d)$ , можно рассчитать течение, реализующее на фиг. 1,2, вплоть до  $c^-$ -характеристики  $qd$  и найти участок траектории  $aq$ . Однако в общем случае  $v \neq 0$  или  $s_0 \neq \text{const}$ , когда  $u \neq \text{const}$  на  $bf$ , данных на найденной при этом характеристике  $qd$  недостаточно, чтобы построить конечный участок траектории  $qf$ . Аналогично положение для схемы фиг. 1,б, с тем отличием, что здесь счет методом характеристик при  $v \neq 0$  и  $x_a = 0$  необходимо дополнить автомодельным решением, описывающим фокусировку характеристик в  $f^\circ$ . В этой схеме после определения течения на  $c^-$ -характеристике  $af^\circ$  и расчета от точки  $f^\circ$  пучка волн сжатия и начинающейся в точке  $a$  траектории ( $\psi = 1$ ) удастся построить лишь ее разгонный участок ранее неизвестной протяженности. Для построения конечного участка оптимальной траектории в случае фиг. 1,б и 2 при  $v \neq 0$  или  $s_0 \neq \text{const}$ , нужна дополнительная информация.

6. Информацию, необходимую для построения при  $v \neq 0$  или  $s_0 \neq \text{const}$  конечных участков оптимальной траектории в схемах фиг. 1,б и 2, получим, как упоминалось, методом неопределенного контрольного контура (МНК). Для этого, согласно (1.9), выразим  $A$  через интеграл по пока неопределенному, по фиксированному контрольному контуру  $alf$ . Интеграл по части контура, лежащей ниже  $c^-$ -характеристик  $af^\circ$  и  $ac$ , при варьировании траектории не изменяется. Поэтому при решении вариационной задачи важен лишь его отрезок  $lf$ . Если  $lf$  в плоскости  $\psi x$  задать уравнением  $x = x(\psi)$  и его следствием  $x' = x'(\psi)$ , то для  $A$  с учетом сказанного получим

$$A = \int_l^f \left[ h + \frac{u^2}{2} + v(2-v) \frac{\Gamma^2}{2x^2} - Kx^v x' p \right] d\psi$$

Аналогично задание  $t_f$  в силу (1.5) эквивалентно постоянству интеграла

$$\tau \equiv t_l - t_f = \int_l^f \left( \frac{1}{Kx^v \rho u} - \frac{x}{u} \right) d\psi$$

Для  $\psi_d < \psi_f$  и  $alf$ , имеющего с  $f^\circ f$  единственную общую точку  $f$ , параметры газа на  $lf$  непрерывны и для исследуемой, и для проварьированной траекторий. Поэтому, составив вспомогательный функционал  $I = A + \lambda \tau$  с постоянным множителем Лагранжа  $\lambda$ , после необходимых выкладок найдем, что

$$\begin{aligned} \delta A = \delta I = \int_l^f [r(1-\Lambda)\delta R + l(1+\Lambda)\delta L + (g+f)(\delta R)^2 + (g-k)(\delta L)^2 + \\ + 2(1-\Lambda-g+f)\delta R\delta L] d\psi \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$r = u + a - x'Kx^v \rho a, \quad l = u - a + x'Kx^v \rho a$$

$$g = (r - u + \Lambda u) \rho^3 a^3 \omega_{pp} / 4, \quad f = r\Lambda / u$$

$$k = l\Lambda / u, \quad \Lambda = \lambda / (Kx^v \rho a u^2)$$

Пользуясь произволом в выборе еще неопределенного контрольного контура, или, что то же, — функции  $x'(\psi)$ , обратим в нуль множитель  $r$  перед  $\delta R$ . В ре-

зультате получим

$$x' = (u + a) / (Kx^\nu \rho a) \quad (6.2)$$

т.е. согласно (1.7)  $lf$  – отрезок  $c^+$ -характеристики. Обращение в нуль коэффициента перед оставшимся после этого в (6.1) линейным слагаемым дает необходимое условие экстремума:  $\Lambda = -1$  или с учетом выражения для  $\Lambda$

$$x^\nu \rho a u^2 = \text{const} = -\lambda / K \quad (6.3)$$

Данное условие не может выполняться на всей характеристике  $lf$ , в частности в точке  $l$ , где  $u = 0$ , уже потому, что в этом случае из (6.3)  $u \equiv 0$  на  $lf$ . Последнее же возможно в непредставляющем интереса особом случае неподвижного поршня. В случае схем фиг. 1,б и г непостроенными оставались лишь концевые участки траектории поршня, которым отвечает отрезок  $hf$  характеристики  $lf$ . Поэтому (6.3) естественно использовать только на  $hf$ , замыкая, таким образом, задачу построения всей искомой траектории. В то же время для  $\tau_0 < t_f < \tau_m$  (фиг. 1,з) сохраняется соблазн распространить (6.3) и на отрезок  $nh$ , тем более что при  $v = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$  это, как и "постановка задачи на траектории", дает  $u \equiv \text{const}$  всюду в  $bgdf$  и  $u \equiv 0$  в  $ef^o d$ . Попытка распространить (6.3) на  $nh$  не выдерживает, однако, проверки оптимальным решением для  $t_f = \tau_m$  (фиг. 1,д). Действительно, при  $t_f \rightarrow \tau_m - 0$  отрезок  $nh$  становится участком  $qf$  (фиг. 1,д) "замыкающей" характеристики пучка  $c^+$ -характеристик, а на ней (6.3) заведомо несправедливо. Глубинной причиной незаконности распространения (6.3) на  $nh$  служит отмечавшаяся в разд. 3 произвольность варьирования  $u$  на участке  $bq$  траектории поршня и как следствие этого – варьирования  $L$  на  $nh$ .

С учетом (6.2), (6.3) и сказанного выше выражение (6.1) для  $\delta A$  принимает вид

$$\begin{aligned} \delta A = & 2 \int_l^h u(1 + \Lambda) \delta L d\psi + \int_h^f \left[ -\frac{1}{2} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u (\delta R)^2 + 2 \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right) (\delta L)^2 + \right. \\ & \left. + (4 + \rho^3 a^3 \omega_{pp} u) \delta R \delta L \right] d\psi \end{aligned} \quad (6.4)$$

В интеграле по  $lh$ , где  $1 + \Lambda \neq 0$ , квадратичные слагаемые несущественны.

При варьировании только концевого участка траектории  $qf$ , когда  $\delta L \equiv 0$  на  $lh$ , можно показать, что  $\delta R$  на  $hf$  имеет более высокий порядок малости, чем  $\delta L$ . Отсюда следует, что необходимым условием оптимальности указанного концевого участка (минимума  $A$ ) является неравенство  $1 - \rho^3 a^3 \omega_{pp} u / 4 > 0$ , заведомо выполняющееся в рассматриваемой задаче, в которой  $\omega_{pp} u < 0$ .

При анализе вклада интеграла по  $lh$  из (6.4) важен знак  $(1 + \Lambda)$ . Подставив в формулу для  $\Lambda$  константу  $\lambda$ , выраженную, согласно (6.3), через параметры в  $h$ , получим

$$1 + \Lambda = 1 - (x^\nu \rho a u^2)_h / (x^\nu \rho a u^2)$$

В силу (1.11) и (1.7) вдоль любой  $c^+$ -характеристики

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^\nu \rho a u^2) = & x^\nu \rho a \left( 1 - \frac{1}{4} \rho^3 a^3 \omega_{pp} u \right) \frac{du^2}{dt} + v x^\nu \rho a u^2 \left[ a - \left( \frac{1}{2} \rho^3 a^4 \omega_{pp} - 1 \right) u \right] + \\ & + \frac{v(2-v)}{2} x^{\nu-1} \rho^4 a^4 \omega_{pp} u^2 v^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Так как  $u \leq 0$ , то при  $v \neq 0$  второе и третье слагаемые правой части (6.5) положительны (хотя для второго слагаемого такое утверждение, возможно, излишне категорично, в случае совершенного газа с  $\kappa \geq 1$  это заведомо так). На  $hf$  левая часть (6.5) равна нулю. Следовательно, при  $v \neq 0$  на  $hf$  скорость газа по модулю уменьшается. На разгонных же участках (на  $lh$  и на  $ln$  соответственно для фиг. 1,б и г)

$u^2$  растет, а значит, растет и  $x^v \rho a u^2$ . В случае фиг. 1,б отсюда сразу следует, что на  $lh$ :  $1 + \Lambda \leq 0$ , а  $u(1 + \Lambda) \geq 0$ . Если траекторию поршня варьировать без "поднятия" ее разгонного участка, то можно показать, что для фиг. 1,б в самом общем случае на  $lh$  допустимые  $\delta L \geq 0$ , а следовательно,  $\delta A > 0$ . Варьирование с "поднятием" разгонного участка и более сложный случай фиг. 1,г требуют дополнительного исследования.

Для  $s_0 \equiv \text{const}$  и  $\Gamma \equiv \text{const}$  МНК применим и в плоскости  $xt$ . Здесь вместо (6.3) для определения отрезка  $hf$  экстремальной  $c^+$ -характеристики получим

$$2h + u^2 - 2au + v(2 - v)\Gamma^2 x^{-2} = \text{const} \quad (6.6)$$

На  $hf$  справедливо и условие (6.3), найденное для произвольных  $s_0$  и  $\Gamma$ . Как и в вариационных задачах стационарных сверхзвуковых течений [3], из (6.3) и (6.6) при  $s_0 \equiv \text{const}$  и  $\Gamma \equiv \text{const}$  следует условие совместности для  $c^+$ -характеристик, т.е. в данном случае на экстремальной характеристике (6.6) – интеграл (1.7). Уже отмечалось, что (6.3) и (6.6) с  $\Gamma \equiv 0$  тождественны условиям, определяющим "экстремальную" характеристику задачи об оптимальном расширении поршня, решенной для  $\Gamma \equiv 0$  в [4].

При  $v = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$ , когда схемы фиг. 1,б и г кроме волн сжатия, по построению фокусирующихся при  $t = t_f$  содержат только области постоянных параметров, отсутствие скачков при  $t < t_f$  гарантировано. Построение оптимальной траектории в случае фиг. 1,д после обращения  $t$  эквивалентно задаче профилирования сверхзвукового сопла, переводящего один параллельный оси поток в такой же поток с большей скоростью. Опыт профилирования таких сопел не выявил возникновения при их расчете "градиентной катастрофы" (ГК). Аналогично положение с построением "оптимального" течения слева от характеристик  $bf^o$  и  $qd$  на фиг. 1,б и г. Остающийся открытым (для  $v \neq 0$  и  $s_0 \neq \text{const}$ ) вопрос о возможности ГК справа от этих характеристик может быть решен только в процессе конкретных расчетов.

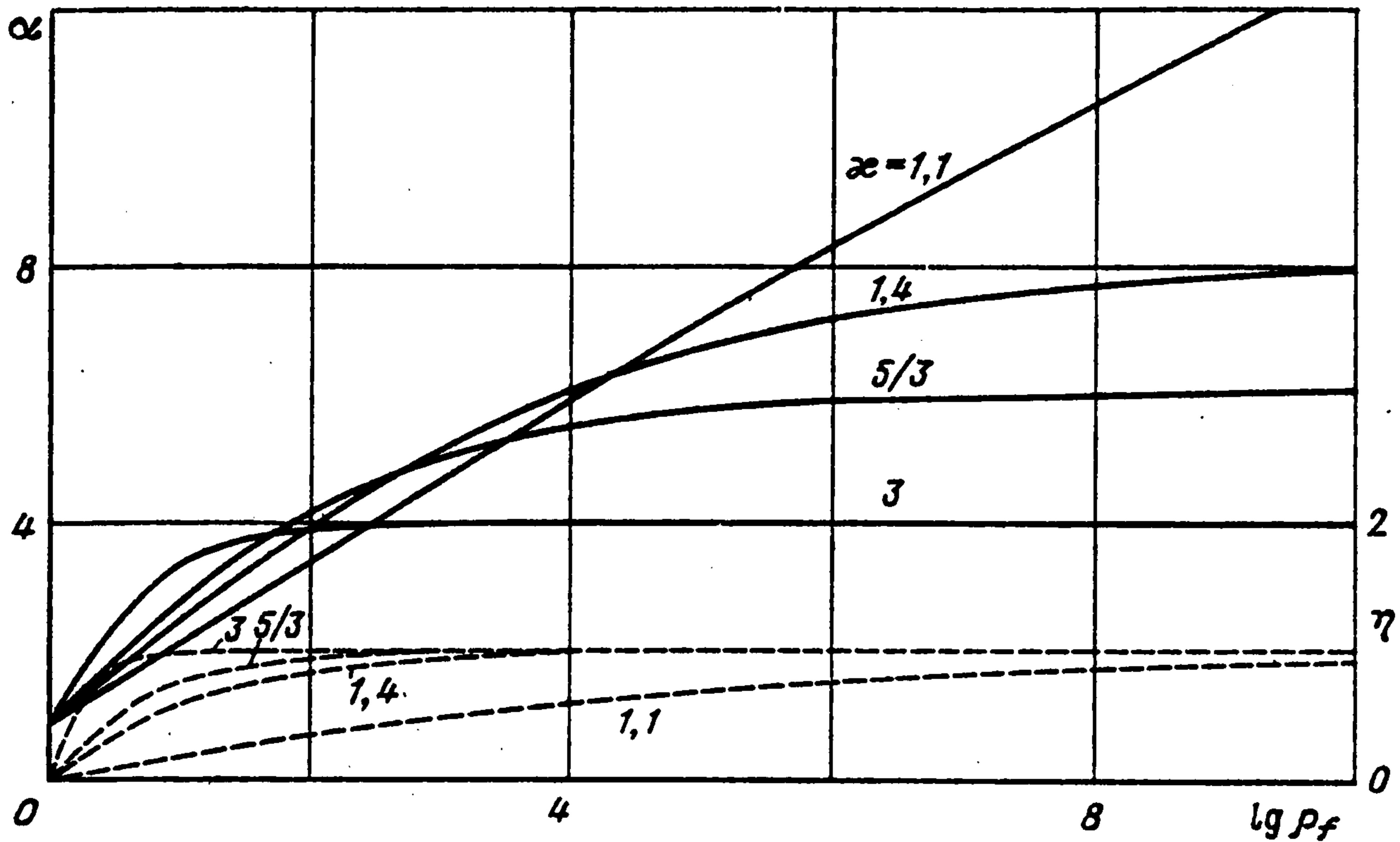
Выше ударные волны и рост  $s$  при  $t < t_f$  запрещала постановка задачи. С другой стороны, такой запрет может проистекать и из физических соображений, согласно которым рост  $s$  – это дополнительные потери, и, вроде бы, – увеличение  $A$ . Посмотрим, подтверждает ли эти соображения анализ выражения для  $\delta A$ , включающего рост  $s$  в скачках, возникших при  $t < t_f$ . Для схемы фиг. 1,д, если допустить, что  $s = s_0(\psi) + \delta s$  с  $\delta s \geq 0$ , то в  $\delta A$  появится дополнительное слагаемое

$$\delta A = \dots + \int_{f^o}^f T \delta s d\psi \quad (6.7)$$

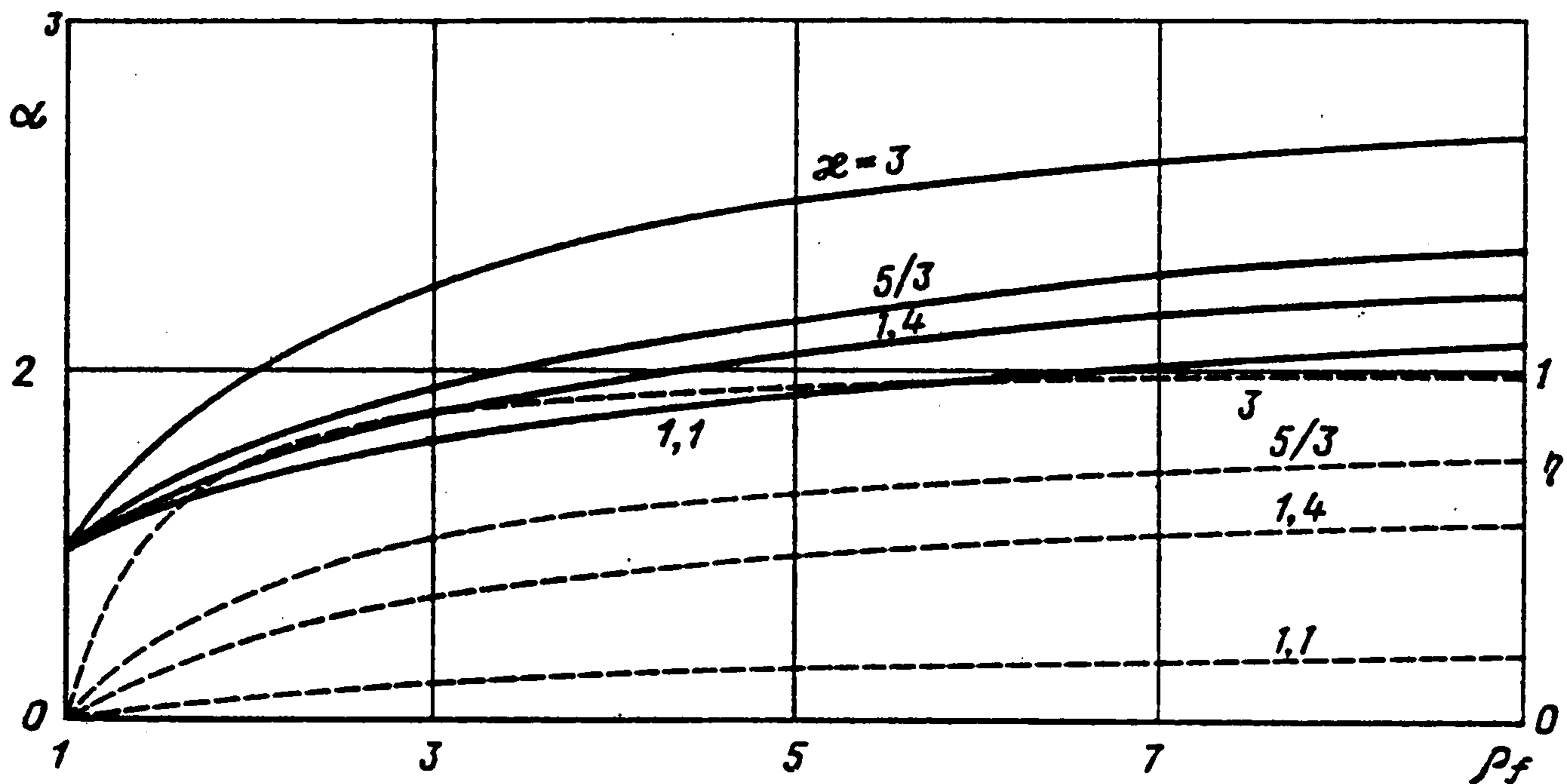
где многоточием обозначена правая часть (4.4). При получении (6.7) учтено, что  $h_s \equiv (\partial h / \partial s)_p = T$ , а в силу (4.2)  $\chi = 0$  на  $f^o f$ . При  $\delta s > 0$  слагаемое  $\delta s$  в (6.7) действительно увеличивает  $A$ . Для фиг. 1,б и г, т.е. для  $t_f < \tau_m$ , упомянутые выше "физические соображения" в общем случае не верны. Например, для  $v = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$  можно так увеличить скорость поршня на  $ab$ , что скачок, возникший в волне сжатия при  $t < t_f$ , не изменит  $R \equiv 0$  на  $af$ . В этом случае  $A$  уменьшится.

Все сказанное переносится и на случай  $x_a < x_{a^o}$ , когда поршень и стенка меняются местами (при  $v \neq 0$  стенка становится "внешней", а поршень расширяется "изнутри"). Схемы течения, заменяющие при этом схемы фиг. 1,б и г, даны на фиг. 1,е и ж. Главное отличие этого случая состоит в положительности скорости  $u$  и в перемене ролей  $c^+$ - и  $c^-$ -характеристик. В частности, теперь (6.3) выполняется на  $hf$  – отрезке  $c^-$ -характеристики, а вместо (6.6) при  $s_0 \equiv \text{const}$  и  $\Gamma \equiv \text{const}$  на  $hf$  в дополнение к (6.3) справедлива связь

$$2h + u^2 + 2au + v(2 - v)\Gamma^2 x^{-2} = \text{const}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Более принципиальна замена стенки вторым поршнем. Такая задача для  $t_f > \tau_0$  и произвольного положения точек  $f$  и  $f^0$  не сводится к суперпозиции схем фиг. 1,2 и ж.

7. Сравним работу  $A_0$ , затрачиваемую на оптимальное сжатие при  $t_f = \tau_0$ ,  $v = 0$  и  $s_0 \equiv \text{const}$ , с работой  $A_m$ , которая требует для оптимального сжатия того же газа при  $t_f = \tau_m$  по схеме фиг. 1,д, для которой результат не зависит от  $v$  (для  $v = 1$  – при отсутствии закрутки). Если за масштабы плотности и скорости взять начальные плотность и скорость звука, то  $\rho_0 = a_0 = 1$  и  $e_0 = 1/[\kappa(\kappa - 1)]$ . В сравниваемых случаях параметры газа при  $t = t_f$  не зависят от  $x$ . Поэтому, определяя  $A$  через разность энергий при  $t = t_f$  и  $t = 0$ , найдем для совершенного газа

$$A_0 = \frac{(3\kappa - 1)a_f^2 - 4\kappa a_f + \kappa + 1}{\kappa(\kappa - 1)^2} M, \quad A_m = \frac{a_f^2 - 1}{\kappa(\kappa - 1)} M$$

$$E_m = \frac{a_f^2 M}{\kappa(\kappa - 1)}, \quad \alpha \equiv \frac{A_0}{A_m} = \frac{(3\kappa - 1)a_f^2 - 4\kappa a_f + \kappa + 1}{(\kappa - 1)(a_f^2 - 1)} \quad (7.1)$$

$$\eta \equiv \frac{A_m}{E_m} = \frac{a_f^2 - 1}{a_f^2}, \quad a_f = \rho_f^{(\kappa-1)/2}$$

Здесь  $M$  – масса сжимаемого газа,  $E_m = Me$  – его полная энергия, а при получении  $A_0$  использована связь  $u_f$  с  $a_f$  для простой волны с  $R \equiv 0$ . В силу (7.1)  $\alpha \rightarrow 1$  при  $\rho_f \rightarrow 1$  и  $\alpha \rightarrow (3\kappa - 1)/(\kappa - 1)$  при  $\rho_f \rightarrow \infty$ , т.е. при бесконечном сжатии газа. В действительности, однако, несмотря на крайне простую зависимость  $\alpha$  от  $a_f$  и  $a_f$  от  $\rho_f$ , стремление  $\alpha$  к своему предельному значению для реальных  $\kappa \leq 1,4$  с ростом  $\rho_f$  происходит крайне медленно. Это демонстрирует фиг. 2, на которой для разных  $\kappa$  сплошными линиями даны значения  $\alpha$  в зависимости от  $\lg \rho_f$ . Видно, что, например, для  $\kappa = 1,1$  даже при  $\rho_f = 10^{10}$  отношение работ еще далеко от своего предельного значения. Тем не менее заметный выигрыш при сжатии за время  $t_f = \tau_m$  проявляется уже при умеренных  $\rho_f$ . Для  $1 \leq \rho_f \leq 9$  это хорошо видно из фиг. 3. Штриховыми кривыми и шкалой справа на фиг. 2 и 3 показана  $\eta$  – доля работы в конечной энергии газа.

Автор благодарит В.А. Вострецову и Н.И. Тилляеву за помощь в работе и А.И. Рылова за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А.Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 2. С. 283–287.
2. Сидоров А.Ф. Безударное сжатие баротропного газа // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 769–779. Письмо в редакцию // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 698.
3. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
4. Рылов А.И. Вариационная задача одномерной нестационарной газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 171–175.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.XI.1992