ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 5, 1993

УДК 531.01

© 1993 г. Н.А. Богатырева, Е.С. Пятницкий

МИНИМАКСНЫЙ ПРИНЦИП МЕХАНИКИ

Рассматриваются голономные механические системы, движение которых происходит в потенциальном силовом поле и описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Установлено, что решение произвольной задачи (с произвольными условиями) для уравнений Лагранжа второго рода является экстремалью некоторого функционала, структура которого определяется только лагранжианом и заданными условиями.

Принцип Гамильтона дает вариационное описание решений двухточечной краевой задачи для уравнений Лагранжа, когда задаются обобщенные координаты системы в начальный и конечный моменты времени. В то же время отсутствует вариационное описание решений иных задач для уравнений Лагранжа. В частности, неизвестно, являются ли, например, решения задачи Коши для уравнений Лагранжа экстремалями какого-либо функционала. В связи с этим существенный интерес представляют такие, вариационные принципы, с помощью которых можно выделить решение уравнений Лагранжа с произвольными граничными, начальными и промежуточными условиями, условиями типа включения. При наличии таких принципов для решения различных задач, и в частности задачи Коши для уравнений Лагранжа, открывается возможность использовать прямые методы вариационного исчисления, что позволяет заменить задачу интегрирования уравнений движения задачей определения соответствующей экстремали.

1. Постановка задачи. Рассматриваются голономные механические системы с n степенями свободы, движение которых происходит в потенциальном силовом поле. В независимых обобщенных координатах q_i (здесь и всюду далее $i = 1, 2, \dots, n$) движение системы можно описать системой дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,q^\cdot,t)}{\partial q_i^\cdot} - \frac{\partial L(q,q^\cdot,t)}{\partial q_i} = 0 \tag{1.1}$$

Уравнения (1.1), при надлежащей идеализации, могут описывать процессы в электрических и электромеханических системах [1].

Предполагается, что функция Лагранжа $L(q, q^\cdot, t)$ является сильно выпуклой функцией обобщенных скоростей $q^\cdot$, т.е. что при любых q, $q^\cdot$, ξ, t выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(q,q^\cdot,t)}{\partial q_i^\cdot \partial q_j^\cdot}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \alpha>0 \tag{1.2}$$

Для натуральных систем [1] неравенство (1.2) непосредственно вытекает из представления $L(q,q^\cdot,t) = T(q,q^\cdot,t) - \Pi(q,t)$, так как кинетическая энергия $T(q, q^\cdot, t)$ представляет собой многочлен второй степени относительно $q_i^\cdot$:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad T_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k(q,t)\, q^{\cdot}_k, \ T_0 = T_0(q,t)$$

$$T_2 = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2} a_{ik}(q,t)\, q^{\cdot}_i\, q^{\cdot}_k$$

где T_2 – положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей $q^{\cdot}_i$.

В некоторых задачах условие (1.2) может выполняться не при всех значениях обобщенных скоростей. Если для примера рассмотреть релятивистскую частицу, движущуюся в отсутствие поля [2], которая не является натуральной системой, то соответствующая этой системе функция Лагранжа

$$L = -mc^2\ [1 - (x_1^{\cdot 2} + x_2^{\cdot 2} + x_3^{\cdot 2}) / c^2]^{1/2}$$

будет выпуклой в области $\upsilon^2 = (x_1^{\cdot 2} + x_2^{\cdot 2} + x_3^{\cdot 2}) < c^2$. Для того чтобы учесть такие случаи, все результаты формулируются далее так, что они с надлежащими обобщениями могут быть перенесены на случай, когда неравенство (1.2) выполняется не для всех $q^{\cdot}$, а лишь для обобщенных скоростей из некоторой ограниченной области.

Уравнения Лагранжа (1.1) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\cdot}_j\, \partial q^{\cdot}_i} q^{\cdot\cdot}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q^{\cdot}_i} q^{\cdot}_j \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial q^{\cdot}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.3}$$

Неравенство нулю гессиана функции Лагранжа $(\det \| \partial^2 L / \partial q^{\cdot}_i \partial q^{\cdot}_j \|_{i,j=1}^{n} \neq 0)$, вытекающее из условия (1.2), позволяет привести систему уравнений (1.3) к нормальной форме Коши

$$q^{\cdot\cdot}_i = f_i(q, q^{\cdot}, t) \tag{1.4}$$

Как известно [1][1], решения двухточечной задачи для уравнений Лагранжа допускают вариационное описание при помощи принципа Гамильтона: на решениях системы (1.1), соединяющих точки (a, t_0) и (b, t_1) $(n + 1)$-мерного расширенного координатного пространства $\{q, t\}$

$$q_i^0 = q_i(t_0) = a_i; \quad q_i^1 = q_i(t_1) = b_i; \quad t_1 > t_0 \tag{1.5}$$

действие по Гамильтону

$$W[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\ q^{\cdot}(t), t)\, dt, \quad q(t) = \| q_i(t) \|_{i=1}^{n} \tag{1.6}$$

имеет стационарное значение по сравнению со значением действия на любых кривых класса C^1, проходящих через эти точки.

При установлении этого принципа существенно, что все допустимые кривые проходят через точки (a, t_0) и (b, t_1). В то же время интерес представляют вариационные принципы, позволяющие выделить решение системы (1.1) с

---

[1] См. также: *Румянцев В.В.* Об основных законах и вариационных принципах классической механики: Препринт № 257. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1985. 25 с.

произвольными граничными и промежуточными условиями. При помощи такого принципа можно было бы дать, в частности, вариационное описание решений задачи Коши для системы (1.1), задачи о периодических решениях этой системы и т.д. Если бы, например, иметь вариационное описание решений задачи Коши для уравнений движения (1.1), то использование прямых методов вариационного исчисления позволило бы заменить задачу интегрирования уравнений (1.1) задачей определения соответствующих экстремалей.

Цель работы – показать, что всякое решение $q(t)$ дифференциальных уравнений Лагранжа (1.1), удовлетворяющее условиям вида

$$F_j[q(t)] \leqslant 0 \quad (j=1,2,\dots,k) \tag{1.7}$$

где F_j – вообще говоря, нелинейные функционалы, одновременно является решением некоторой вариационной задачи. В форме неравенств (1.7) можно представить произвольные условия и, в частности, начальные условия, граничные условия, точечные условия общего вида

$$h_\nu(q(\tau), q^\cdot(\tau)) = 0, \quad t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \dots \leqslant \tau_m \leqslant t_1 \quad (\nu=1,2,\dots,r) \tag{1.8}$$

Условия (1.7) включают в себя также условия

$$\chi_p(q(t), q^\cdot(t)) \leqslant 0 \quad (p=1,2,\dots,s); \quad \{q(t),\ q^\cdot(t)\} \in D(t) \tag{1.9}$$

определяющие совокупность неравенств и включений, где через $D(t)$ обозначена зависящая от времени область фазового пространства $\{q, q^\cdot\}$.

2. Вариационный принцип при отсутствии сопряженных точек. С целью разъяснить основную идею установленного ниже вариационного принципа рассмотрим сначала случай, когда краевая задача для уравнений (1.1) с граничными условиями (1.5) имеет единственное решение при любых a, b, $t_1 > t_0$. Это условие означает, что всякий отрезок $[t_0, t_1]$ не содержит сопряженных точек Якоби (сопряженных кинетических фокусов) [1, 3] (см. также работу, цитируемую в сноске). Для таких систем (1.1) действие по Гамильтону (1.6) на решении $q(t)$ задачи (1.1), (1.5) достигает наименьшего значения по сравнению с значением действия на других кривых, соединяющих точки (a, t_0) и (b, t_1) расширенного координатного пространства $\{q, t\}$.

Каждой кривой $q(t)$ класса $C^1[t_0, t_1]$ поставим в соответствие множество $I\{q\} = I\{q(t)\}$ функций $z(t) = \| z_i(t)\|_{i=1}^n$

$$I\{q\} = \{z(t) \in C^1[t_0, t_1]:\ z(t_0) = q(t_0),\quad z(t_1) = q(t_1)\} \tag{2.1}$$

Множество $I\{q\}$ представляет собой пучок кривых $z(t)$ класса C^1, соединяющих точки $\{q(t_0), t_0\}$ и $\{q(t_1), t_1\}$ расширенного координатного пространства $\{q, t\}$. Очевидно, исходная кривая $q(t) \in I\{q(t)\}$ также будет элементом этого пучка.

Введем в рассмотрение функционал

$$\theta[q(t), z(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \{L(q(t), q^\cdot(t), t) - L(z(t), z^\cdot(t), t)\}\, dt \tag{2.2}$$

определенный для функций $q(t) \in C^1[t_0, t_1]$, $z(t) \in I\{q\}$. При помощи функционала $\theta[q(t), z(t)]$, используя принцип Гамильтона, определим неотрицательный функционал

$$V[q(t)] = \theta[q(t), z_q(t)] =$$

$$= \max\left\{\int_{t_0}^{t_1} \{L(q, q^{\cdot}, t) - L(z, z^{\cdot}, t)\} dt \mid z(t) \in I\{q\}\right\} \tag{2.3}$$

Существование максимума в правой части (2.3) обусловлено отсутствием сопряженных точек Якоби в силу предложения о существовании единственного решения краевой задачи $z_q(t) \in I\{q\}$ для системы (1.1), которую перепишем здесь в переменных z_i,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(z, z^{\cdot}, t)}{\partial z_i^{\cdot}} - \frac{\partial L(z, z^{\cdot}, t)}{\partial z_i} = 0, \quad z(t) \in I\{q\} \tag{2.4}$$

Условие $z(t) \in I\{q\}$ помимо условия $z(t) \in C^1[t_0, t_1]$ означает, что $z(t_0) = q(t_0)$, $z(t_1) = q(t_1)$.

При отсутствии сопряженных точек Якоби в системе существует [1] главная функция Гамильтона $W[b,\ t_1,\ a,\ t_0]$, выражающая значение функционала (1.6) через $a = q^0$, $b = q^1$, t_0, t_1 на решениях системы (2.4) при условиях (1.5). Обозначим $W[b,\ t_1,\ a,\ t_0] = W[q^1,\ t_1,\ q^0,\ t_0]$. Как известно [1], главная функция Гамильтона $W[q,\ t,\ q^0,\ t_0]$ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

$$\partial W/\partial t + H(q,\ \partial W/\partial q,\ t) = 0 \tag{2.5}$$

где гамильтониан в силу (1.2) определяется равенством [4]

$$H(q, p, t) = \max_{\xi \in R^n}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i - L(q, \xi, t)\right]. \tag{2.6}$$

Для любой функции $\varphi(t) \in I\{q\}$ (т.е. при $\varphi(t_0) = q^0$, $\varphi(t_1) = q^1$) имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dW[\varphi, t, q^0, t_0]}{dt} dt = W[\varphi(t_1), t_1, q^0, t_0] - W[\varphi(t_0), t_0, q^0, t_0] =$$

$$= W[q^1, t_1, q^0, t_0] - W[q^0, t_0, q^0, t_0] = W[q^1, t_1, q^0, t_0]$$

так как $W[q^0, t_0, q^0, t_0] = 0$. Через $z_q(t) \in I\{q\}$ обозначим решение $z(t)$ системы (2.4) с условиями (2.1). Тогда

$$W[z_q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(z_q, z_q^{\cdot}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dW[z_q, t, q^0, t_0]}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dW[\varphi, t, q^0, t_0]}{dt} dt$$

при $\varphi(t) \in I\{q\}$. При учете этих соотношений, а также (1.6), (2.5), (2.6) для любых функций $\varphi(t) \in I\{q\}$ будем иметь неравенство

$$\Delta W = W[\varphi(t)] - W[z_q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \{L(\varphi(t), \varphi^{\cdot}(t), t) - L(z_q(t), z_q^{\cdot}(t), t)\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(\varphi, \varphi^{\cdot}, t) - \frac{dW[\varphi, t, q^0, t_0]}{dt} \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(\varphi, \varphi^{\cdot}, t) - \frac{\partial W[\varphi, t, q^0, t_0]}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \varphi_i^{\cdot} \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ H\left(\varphi, \frac{\partial W}{\partial \varphi}, t\right) - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \varphi_i^{\cdot} - L(\varphi, \varphi^{\cdot}, t) \right] \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \max_{\xi \in R^n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \xi_i - L(\varphi, \xi, t) \right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} \varphi_i^{\cdot} - L(\varphi, \varphi^{\cdot}, t) \right] \right\} dt \geqslant 0 \qquad (2.7)$$

Из (2.3) следует, что

$$V[q(t)] = W[q(t)] - \min_{z(t) \in I\{q\}} W[z(t)] = W[q(t)] - W[z_q(t)]$$

Это значит, что $V[q(t)] \geqslant 0$, так $q(t) \in I\{q\}$. Поэтому величина функционала $V[q(t)] \geqslant 0$ характеризует разность действия по Гамильтону (1.6) на произвольной кривой $q(t)$ и на решении $z_q(t)$ системы (2.4), соединяющем те же самые граничные точки $q(t_0) = z(t_0)$ и $q(t_1) = z(t_1)$. Функционал (2.3) позволяет получить [5] вариационную характеристику решений $q(t)$ уравнений (1.1) с условиями (1.7).

Рассмотрим множество

$$\Gamma = \{q(t) \in C^1[t_0, t_1],\ F_j[q(t)] \leqslant 0,\ j = 1, 2, \dots, k\} \qquad (2.8)$$

всевозможных функций $q(t)$ класса $C^1[t_0, t_1]$, удовлетворяющих условиям (1.7).

Теорема 1 (принцип минимакса). Пусть лагранжиан $L(q, q^{\cdot}, t)$ – сильно выпуклая функция переменных $q_i^{\cdot}$ и краевая задача для уравнений (1.1) с условиями (1.5) – имеет единственное решение при любых q^0, q^1, $t_1 > t_0$. Тогда система (1.1) будет иметь решение $\tilde{q}(t)$, удовлетворяющее условиям (1.7) (т.е. решение $\tilde{q}(t) \in \Gamma$), в том и только в том случае, если выполнено условие

$$V[\tilde{q}(t)] = \min\{V[q(t)] \mid q(t) \in \Gamma\} = 0 \qquad (2.9)$$

или, что то же, условие минимакса

$$\min_{q(t) \in \Gamma} \max_{z(t) \in I\{q\}} \int_{t_0}^{t_1} \{L(q(t), q^{\cdot}(t), t) - L(z(t), z^{\cdot}(t), t)\} dt = 0$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\tilde{q}(t) \in \Gamma$ является решением уравнений (1.1), удовлетворяющим условиям (1.7). Тогда по условию теоремы $W[\tilde{q}(t)] = \min\{W[q(t)] \mid q(t) \in I[\tilde{q}(t)]\}$, откуда следует, что $V[\tilde{q}(t)] = 0$. Так как функционал $V[q(t)]$ неотрицателен то функция $\tilde{q}(t) \in \Gamma$ будет доставлять функционалу $V[q(t)]$ абсолютный минимум ($V[\tilde{q}(t)] = 0$), т.е. будет выполнено условие (2.9).

Достаточность. Если выполнено соотношение (2.9), то из этого равенства при учете выражения (2.3) для $V[q(t)]$ следует, что

$$W[\tilde{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\tilde{q}, \tilde{q}^{\cdot}, t)\,dt = \min\left\{\int_{t_0}^{t_1} L(q, q^{\cdot}, t)\,dt \,\middle|\, q(t) \in I\{\tilde{q}\}\right\}$$

Из принципа Гамильтона [1] в этом случае следует, что кривая $\tilde{q}(t)$ будет решением уравнений Лагранжа (1.1). Поскольку по условию $\tilde{q}(t) \in \Gamma$, то это решение уравнений (1.1) будет удовлетворять также условиям (1.7). Теорема 1 доказана.

В случае, когда условия (1.7) имеют вид равенства (1.5), функционал $V[q(t)]$ отличается от действия по Гамильтону на постоянную величину и принцип минимакса непосредственно переходит в принцип Гамильтона.

Заметим, что теорема 1 сохраняет силу не только для множеств Г, которые заданы неравенствами (1.7), но и условиями произвольного вида.

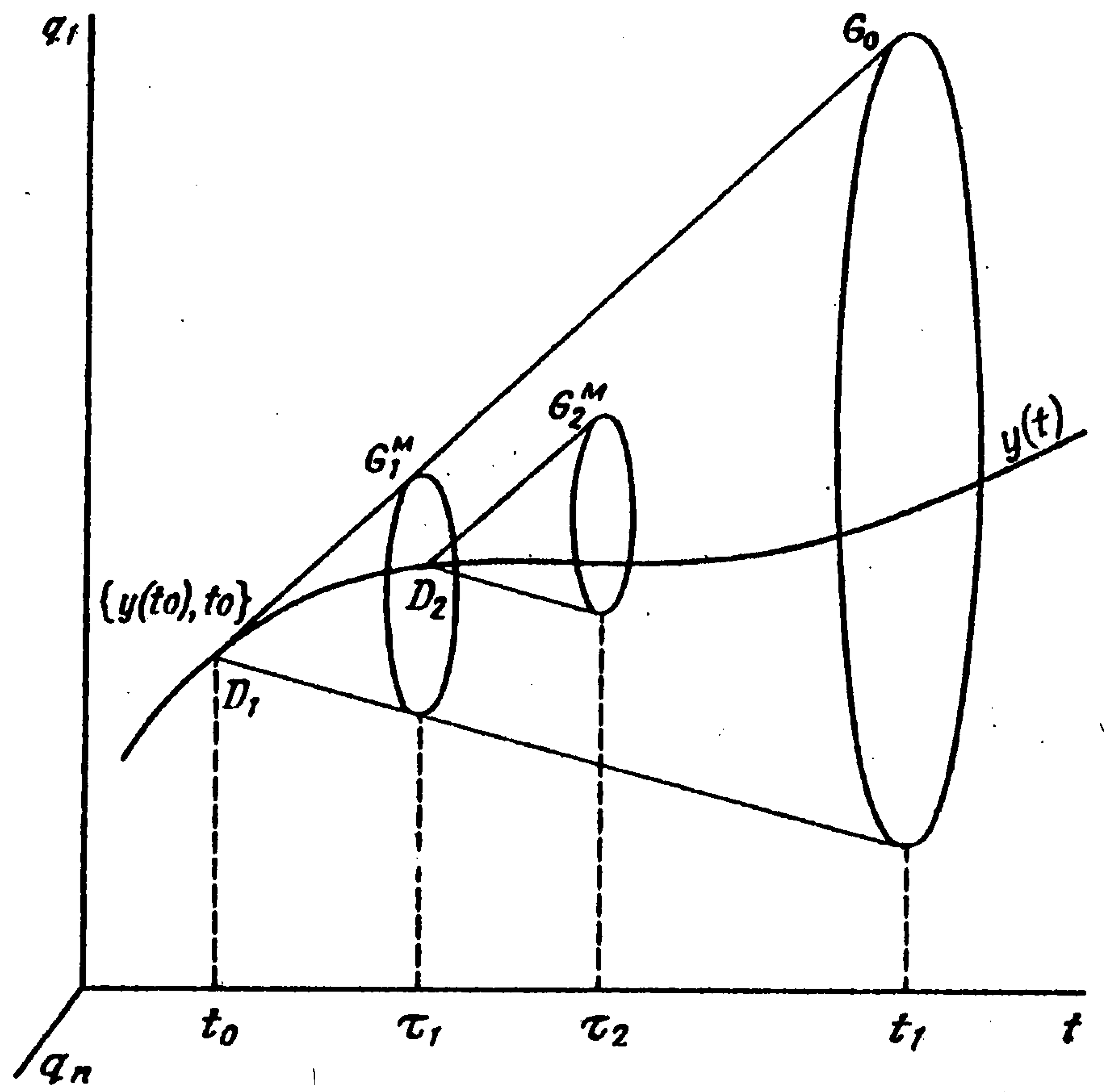
3. Принцип минимакса при наличии сопряженных точек Якоби. Рассмотрим общий случай механической системы (1.1), у которой на отрезке $[t_0, t_1]$ могут существовать сопряженные точки Якоби. В этом случае принцип наименьшего действия не имеет места и на решениях (1.1), (1.5) действие по Гамильтону (1.6) будет иметь стационарное значение. Поэтому при помощи соотношения (2.3) функционал $V[q(t)]$ определить нельзя. Для построения аналога функционала $V[q(t)]$ будет использована специальная конструкция, которая приводит к (2.3) в случае, если система (1.1) имеет единственное решение для краевых условий Лагранжа (1.5). Эта конструкция позволяет распространить принцип минимакса на механические системы, содержащие сопряженные точки Якоби, и дать вариационное описание решений уравнений Лагранжа (1.1) с произвольными условиями (1.7).

Теорема 2. Пусть для системы, описываемой уравнениями Лагранжа (1.1), $L(q, q^{\cdot}, t)$ – сильно выпуклая функция по переменным $q_i^{\cdot}$. Тогда для всякой функции $y(t) \in C^1[t_0, t_1]$ при некотором $M > 0$ можно построить систему из $N \geqslant N_0[y(t)]$ конусов G_s^M в $(n + 1)$-мерном расширенном координатном пространстве $\{q, t\}$

$$G_s^M = \{q, t: |q_i - y_i(\tau_s)| \leqslant M(t - \tau_s),\ \tau_s \leqslant t \leqslant \tau_{s+1}\ |\tau_{s+1} - \tau_s| \leqslant (t_1 - t_2)/N_0\}$$
$$(s = 1, 2, \dots, N) \tag{3.1}$$

с вершинами в точках $D_s(y(\tau_s),\ \tau_s)$ (фигура), таких, что внутри каждого конуса существует центральное поле, т.е. что внутри каждого конуса две точки $\{y(\tau_i), \tau_i\}$ и $\{y(t),\ t\}$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ можно соединить единственным решением $q(t)$ системы (1.1), причем это решение будет лежать внутри конуса G_s^M: $\|q^{\cdot}(t)\| \leqslant M$. Если точка $B \in G_j^M$ $(j = 1, 2, \dots, N)$, то ее можно соединить с вершиной конуса $D(y(\tau_j), \tau_j)$ единственным решением $q(t)$ системы (1.1), причем $\|q^{\cdot}(t)\| \leqslant M_1$, где M_1 – некоторое число $(M < M_1 < \infty)$.

Доказательству теоремы 2 предпошлем лемму 1, устанавливающую важное свойство уравнений Лагранжа (1.1). Если систему (1.1) разрешить относительно старших производных, т.е. привести ее к форме (1.4), то краевая задача для (1.4)



с условиями (1.5) будет сводиться к интегральному уравнению

$$q(t) = \frac{at_1 - bt_0}{t_1 - t_0} + \frac{b-a}{t_1 - t_0}t + \frac{t_0 - t}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} d\tau \int_{t_0}^{\tau} f(q(\xi),\, q^{\cdot}(\xi),\, \xi)d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} f(q(\xi),\, q^{\cdot}(\xi),\, \xi)d\xi.$$

После дифференцирования по t получим, что это интегральное уравнение переходит в уравнение

$$q^{\cdot} = R\{q^{\cdot}(t)\} \qquad (3.2)$$

$$R\{q^{\cdot}(t)\} = \frac{b-a}{t_1 - t_0} - \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} d\tau \int_{t_0}^{\tau} f\left(a + \int_{t_0}^{\theta} q^{\cdot}(\xi)d\xi,\, q^{\cdot}(\theta),\, \theta\right)d\theta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f\left(a + \int_{t_0}^{\theta} q^{\cdot}(\xi)d\xi,\, q^{\cdot}(\theta),\, \theta\right)d\theta$$

Функция $f(q, q^{\cdot}, t)$ определена правой частью системы (1.4), т.е. уравнениями Лагранжа, а постоянное слагаемое $(b-a)/(t_1 - t_0)$ – краевыми условиями (1.5). Оператор $R\{q^{\cdot}(t)\}$ будет рассматриваться далее для различных начальных точек (a, t_0) и конечных точек (b, t_1).

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для достаточно близких точек (a, t_0), (b, t_1) оператор $R\{q^{\cdot}(t)\}$, определенный в соответствии с (3.2), будет иметь единственную неподвижную точку $q^{\cdot}(t) = R\{q^{\cdot}(t)\}$ в шаре $\|q^{\cdot}(\cdot)\| \leq M$, где $M < \infty$ – некоторое число.

Доказательство леммы 1 основано на одной из модификаций принципа сжимающих отображений [6]. Выберем произвольное число $\alpha \in (0, 1)$ и число $M > 0$, такое, что

$$M \geqslant (1-\alpha)^{-1} \max\{\|R\{0\}\|, \|a-b\|/(t_1-t_0)\} \tag{3.3}$$

Для оператора $R\{q^{\cdot}(t)\}$ имеет место неравенство

$$\|R\{q_1^{\cdot}(t)\}-R\{q_2^{\cdot}(t)\}\| \leqslant 2(t_1-t_0)\|f(q_1(\cdot), q_1^{\cdot}(\cdot),\cdot)-f(q_2(\cdot), q_2^{\cdot}(\cdot),\cdot)\|_{[t_0,t_1]},$$

$$q(t) = a + \int_{t_0}^{t} q^{\cdot}(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

$$\|X(\cdot)\|_{[t_0,t_1]} = \max_{t\in[t_0,t_1]}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2(t)\right)^{1/2}$$

Функция $f(q, q^{\cdot}, t)$ в шаре $\|q^{\cdot}(\cdot)\| \leqslant M$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной

$$K(M) = \max_{\substack{\|q^{\cdot}(\cdot)\|\leqslant M,\ t_1\leqslant t\leqslant t_0 \\ \|q(\cdot)\|\leqslant\|a\|+(t_1-t_0)M}} \left\{\left\|\frac{\partial f(q,q^{\cdot},t)}{\partial q}\right\|, \left\|\frac{\partial f(q,q^{\cdot},t)}{\partial q^{\cdot}}\right\|\right\} \tag{3.5}$$

Поэтому на интервале

$$T = \tau_1 - t_0 \leqslant \alpha/[4K(t_1-t_0)] \tag{3.6}$$

краевая задача для системы (1.1) с граничными условиями

$$q(t_0) = a, \quad q(\tau_1) = b$$

имеет единственное решение. Действительно, в этом случае оператор $R\{q^{\cdot}(t)\}$ в силу (3.4) будет удовлетворять условию Липшица в шаре $B = \{\|q^{\cdot}(t)\|\leqslant M,\ t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1\}$ с постоянной $\alpha_1 \leqslant \alpha < 1$, т.е. будет выполнено неравенство

$$\|R\{q_1^{\cdot}(\cdot)\}-R\{q_2^{\cdot}(\cdot)\}\| \leqslant \alpha_1\|q_1^{\cdot}(\cdot)-q_2^{\cdot}(\cdot)\| \tag{3.7}$$

Покажем, что оператор $R\{q^{\cdot}(t)\}$ имеет единственную неподвижную точку $q^{\cdot} = R\{q^{\cdot}\}$ в шаре $B\{\|q^{\cdot}\| \leqslant M\}$.

С этой целью рассмотрим итерационную последовательность

$$q^{\cdot}_{p+1} = R\{q^{\cdot}_p\}, \quad q^{\cdot}_0 \equiv 0$$

В силу (3.3) первый член этой последовательности $q^{\cdot}_1$ принадлежит шару B, т.е. $q^{\cdot}_1 \in B$. Пусть для всех $m \leqslant s$ выполнено соотношение $q^{\cdot}_m \in B$. Можно показать, что тогда это включение будет справедливо и для $m = s + 1$.

Установим теперь сходимость последовательности $\{q^{\cdot}_m\}$. Для любого $p \geqslant 1$ в силу (3.7) имеем оценку

$$\|q^{\cdot}_{m+p}(t)-q^{\cdot}_m(t)\| \leqslant \alpha\|q^{\cdot}_{m+p-1}(t)-q^{\cdot}_{m-1}(t)\| \leqslant \alpha^m\|q^{\cdot}_p(t)\| \leqslant \alpha^m M \to 0, \quad m\to\infty$$

Отсюда следует, что последовательность $\{q^{\cdot}_m\}$ фундаментальна. Поэтому в полном метрическом пространстве непрерывных функций с равномерной нормой эта последовательность сходится к пределу, который будет неподвижной точкой оператора $R\{q^{\cdot}(t)\}$.

Так как $\lim_{m\to\infty} q_m^{\cdot}(t) = q^{\cdot}(t)$ и $\|q_m^{\cdot}(t)\| \leqslant M$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то в силу равномерной сходимости $\|q^{\cdot}(t)\| \leqslant M$, т.е. $q^{\cdot}(t) \in B\{\|q^{\cdot}\| \leqslant M\}$.

Единственность неподвижной точки вытекает из рассуждений от противного при учете условия Липшица (3.7) и неравенства $0 < \alpha < 1$.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что в условиях теоремы 2 можно построить систему конусов, покрывающих произвольную кривую $y(t) \in C^1[t_0, t_1]$, в каждом из которых выполняется условие принципа наименьшего действия, т.е. существует центральное поле экстремалей.

Пусть $\beta = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|y^{\cdot}(t)\|$. Для некоторого числа $\alpha \in (0, 1)$ выберем число $M \geqslant \beta$, которое удовлетворяет неравенству (3.3)

$$M \geqslant (1-\alpha)^{-1} \max\{\|R\{0\}\| \mid a = y(t_0),\ b = y(t_1)\}$$

В расширенном координатном пространстве $\{q, t\}$ построим вспомогательный конус G_0, целиком покрывающий кривую $y(t)$, такой, что

$$G_0 = \{q, t\colon\ t \in [t_0, t_1],\ |q_i(t) - a| \leqslant M(t - t_0)\} \qquad (3.8)$$

Определим постоянную

$$M_1 \geqslant (1-\alpha)^{-1} \max\{R\{0\} \mid a(t_0) = y(t_0),\ (b, t_1) \in G_0\}$$

В соответствии с леммой 1 на интервале $[t_0, \tau_1]$, удовлетворяющем оценке (3.6) при $K = K(M_1)$, можно построить конус (фигура)

$$G_1^M = \{q, t\colon\ t \in [t_0, \tau_1],\ |q_i(t) - a| \leqslant M(t - t_0)\} \qquad (3.9)$$

в котором существует центральное поле экстремалей. Вершину $D_1(y(t_0),\ t_0)$ конуса G_1^M можно соединить с любой точкой $\{b(\tau),\ \tau\} \in G_1^M$ $(\tau > t_0)$ единственным решением $z(t)$ системы Лагранжа (2.4) или соответствующего операторного уравнения $z^{\cdot}(t) = R\{z^{\cdot}(t)\}$. При этом функция $z(t)$ будет иметь равномерно ограниченную скорость

$$\|z^{\cdot}(t)\|_{[t_0,\tau_1]} \leqslant M_1$$

Если точка $B(b(\tau), \tau)$ лежит на кривой $y(t)$, то соответствующее решение $z(t)$ системы (2.4), соединяющее эту точку с вершиной $(y(t_0), t_0)$, будет удовлетворять условию $\|z^{\cdot}(t)\|_{[t_0,\tau_1]} \leqslant M$. Аналогично (3.9), используя утверждение леммы 1, можно построить конус G_2^M с вершиной в точке $D_1(y(\tau_1),\ \tau_1)$. Таким образом, получим N_0 конусов, целиком покрывающих кривую $y(t)$, где $N_0 = N_0[y(t)] = [(t_1 - t_0)/T]$, величина T определена неравенством (3.6). Теорема 2 доказана.

В конусах G_s^M $(s = 1, 2, \dots, N)$, образующих покрытие кривой $y = y(t)$, существует центральное (с центрами в D_s) поле экстремалей функционала (1.6) [3], и, следовательно, определена главная функция Гамильтона $W[y(\tau_s), \tau_s, q, t]$.

Поэтому в каждом конусе G_s^M справедлив принцип наименьшего действия

$$W[q^s(t)] = \min\{W[q(t)] \mid q(t) \in I_s\{y(t)\}\},$$

где множество путей $I_s\{y(t)\}$ определяется соотношением

$$I_s\{y(t)\} = \{q(t) \in C^1\colon\ q(\tau_{s-1}) = y(\tau_{s-1}) \tag{3.10}$$

$$q(\tau_s) = y(\tau_s),\ \ q(t) \in G_s^M\},\quad s = 1, 2, \ldots, N_0$$

Теперь все подготовлено для построения функционала, который будет далее играть ту же роль, что и функционал (2.3) при наличии сопряженных точек в системе.

Для всякой функции $q(t) \in C^1$ определим неотрицательный функционал

$$V^*[q(t)] = \sum_{s=1}^{N} \max\left\{ \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} \{L(q, q^{\cdot}, t) - L(z, z^{\cdot}, t)\}\, dt \ \middle|\ z(t) \in I_s\{q\} \right\} \tag{3.11}$$

где целое число $N \geqslant N_0[q(t)]$. Для функционала (3.11) имеет место аналог теоремы 1.

Теорема 3. Пусть функция Лагранжа $L(q^{\cdot}, q, t)$ системы (1.1) сильно выпукла по $q^{\cdot}_i$. Тогда решение $\tilde{q}(t) \in C^1[t_0, t_1]$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.7), существует в том и только том случае, если выполнено условие минимакса

$$V^*[\tilde{q}(t)] = \min\{V^*[q(t)] \mid q(t) \in \Gamma\} = 0 \tag{3.12}$$

где

$$N = \max\{N_0[q(t)]\} \tag{3.13}$$

или в развернутой форме

$$\min_{q(t)\in\Gamma} \sum_{s=1}^{N} \max_{z^s(t)\in I_s} \left[\int_{t_{s-1}}^{\tau_s} L(q(t),\ q^{\cdot}(t), t)\, dt - \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} L(z^s(t),\ z^{\cdot s}(t), t)\, dt \right] = 0$$

Число $N_0[q(t)]$ в (3.13) определено в теореме 2, а множество I_s строится в соответствии с (3.10) для каждого конуса G_s^M $(s = 1, 2, \ldots, N)$, совокупность которых для любой кривой $y(t) \in C^1$ определяется в соответствии с (3.1).

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме доказательства теоремы 1 с использованием теоремы 2.

Таким образом, любое решение $\tilde{q}(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.7), может быть задано соотношением

$$V^*[\tilde{q}(t)] = 0,\quad \tilde{q}(t) \in \Gamma$$

Это означает, что все эти решения лежат в пересечении множества функций Γ и множества нулей функционала V^*, определенного в (3.11). В случае, если система (1.1) не имеет фокусов Якоби, функционал V^* переходит в функционал V, определенный в (2.3).

При построении решения краевых задач для системы (1.1) условие минимакса (3.12) открывает возможность использовать прямые методы вариационного исчисления с последующим переходом к конечномерной минимаксной задаче.

Заметим, что в некоторых случаях области G_s^M, в которых не содержится сопряженных точек для системы (1.1), могут быть заданы не в форме конусов в расширенном фазовом пространстве, а иначе.

Например, если лагранжиан системы имеет вид

$$L(q, q^{\cdot}, t) = \sum_{i,k=1}^{n} \{a_{ik}(t) q_i^{\cdot} q_{ik}^{\cdot} + b_i(q, t) q_i^{\cdot}\} + C(q, t)$$

то правая часть уравнений (1.4), разрешенных относительно старших производных

$$q_i^{\cdot\cdot} = \sum_{s=1}^{N} d_{is}(t) q_s^{\cdot} + g_i(q, t)$$

будет линейной функцией переменных $q_s^{\cdot}$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$. Поэтому постоянная Липшица $K(M)$ в (3.5) определяется лишь ограничениями на область $G\{q, t\}$ в расширенном координатном пространстве и не зависит от $q^{\cdot}$.

Для гармонического осциллятора с лагранжианом

$$L(q, q^{\cdot}, t) = \tfrac{1}{2}(q^{\cdot 2} - \omega^2 q^2)$$

правая часть соответствующих уравнений (1.4) линейна по q и $q^{\cdot}$. Поэтому области $G_s = \{q, t\colon \tau_{s-1} \leqslant t \leqslant \tau_s,\ \tau_s - \tau_{s-1} < \pi/(2\omega)\}$ задаются в виде полос в пространстве $\{q, t\}$, ограниченных гиперплоскостями $\tau_s = \mathrm{const}$, $s = 1, 2, \ldots, N$ с интервалом $\pi/(2\omega)$.

Было установлено [7], что решение краевой задачи для системы $q_i^{\cdot\cdot} = F_i(q, t)$, при условиях (1.5) существует и единственно при $0 < t_1 \leqslant (\sqrt{2K}(n+1))^{-1}$, где $K = \max\limits_{i,k,q} \| \partial F_i / \partial q_k \|$. Из теоремы 3 можно получить аналогичную оценку $0 < t_1 \leqslant (2\sqrt{K(M)})^{-1}$, причем постоянная $K(M)$ определена в (3.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Физматгиз, 1960. 400 с.
3. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
4. *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. М.: Наука, 1980. 320 с.
5. *Богатырева Н.А., Пятницкий Е.С.* Минимаксный принцип механики и его применение к задачам оптимального управления // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 3. С. 533–537.
6. *Люстерник М.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982. 272 с.
7. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.VII.1992