УДК 531.38

© 1993 г. Е.В. Верховод, Г.В. Горр

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Исследуются условия существования изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой в случае, когда вспомогательные переменные описываются полиномиальными решениями типа Стеклова [1], Горячева [2], Ковалевского [3]. Найдены два новых случая изоконических движений в этой задаче.

Применение метода годографов прямого кинематического истолкования движения твердого тела с неподвижной точкой, основанного на известной теореме Пуансо и уравнениях П.В. Харламова [4], позволило не только получить представление о свойствах движения тела, но и открыть ряд новых классов движений. Среди них важное место занимает класс изоконических движений, для которых подвижный и неподвижный годографы угловой скорости симметричны относительно касательной к ним плоскости. Впервые такие движения рассматривал Фаббри [5], установив их существование в решении Стеклова [1]. Было получено [6] свойство изоконичности в этом решении и на основе метода годографов. Случаи изоконических движений в классической задаче о движении тяжелого твердого тела обнаружены также в решениях Лагранжа [7], Жуковского [8], Гесса–Сретенского [7], Гриоли [9]. В обобщенной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой изучены лишь изоконические движения с первым слоем (по терминологии П.В. Харламова) соответствующего инвариантного соотношения [10] и прецессионно-изоконические движения[1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой в поле потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, направление которого характеризуется единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$, электрических зарядов с электрическим полем и ньютоновским притяжением масс. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору $\boldsymbol{\nu}$. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды (в гиростате токи отсутствуют) и циклических движениях роторов в теле-носителе.

Уравнения движения рассматриваемой задачи запишем в векторном виде (см., например, [11])

$$A\boldsymbol{\omega}^{\cdot}=(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu}-\mathbf{s}) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\nu}^{\cdot}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}$$

Они допускают три первых интеграла

[1] *Верховод Е.В.* Прецессионно-изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой // Исследование прецессионных и управляемых движений твердого тела: Донецк, 1992. 11 с: Препринт № 08. Донецк, Ин-т прикл. математики и механики АН Украины. 1992. 49 с.

$$A\omega\cdot\omega-2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu})+C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=2E,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1 \tag{1.2}$$

$$(A\omega+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu}-\tfrac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей, $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент, $\mathbf{s}$ – вектор обобщенного центра масс, A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке, B и C – симметрические матрицы третьего порядка, точка над переменными обозначает относительную производную.

Необходимым и достаточным условием существования изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела является условие существования у системы (1.1) инвариантного соотношения [12]

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{c})=0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{c}$ – единичный вектор, неизменный по отношению к телу-носителю.

Пусть в (1.1), (1.2) матрицы A, B, C имеют диагональный вид, $\boldsymbol{\omega}=(p,q,r)$, $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $\mathbf{s}=(s,0,0)$, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,0,0)$. Тогда из (1.1), (1.2) получим:

$$\begin{gathered}
A_1p^{\cdot}=(A_2-A_3)qr+B_3\nu_3q-B_2\nu_2r+(C_3-C_2)\nu_2\nu_3\\
A_2q^{\cdot}=(A_3-A_1)rp-\lambda r+B_1\nu_1r-B_3\nu_3p-s\nu_3+(C_1-C_3)\nu_3\nu_1\\
A_3r^{\cdot}=(A_1-A_2)pq+\lambda q+B_2\nu_2p-B_1\nu_1q+s\nu_2+(C_2-C_1)\nu_1\nu_2\\
\nu_1^{\cdot}=r\nu_2-q\nu_3,\quad \nu_2^{\cdot}=p\nu_3-r\nu_1,\quad \nu_3^{\cdot}=q\nu_1-p\nu_2\\
A_1p^2+A_2q^2+A_3r^2-2s\nu_1+C_1\nu_1^2+C_2\nu_2^2+C_3\nu_3^2=2E\\
\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1\\
2(A_1p+\lambda)\nu_1+2A_2q\nu_2+2A_3r\nu_3-B_1\nu_1^2-B_2\nu_2^2-B_3\nu_3^2=2k
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Зададим решение уравнений (1.4) в виде

$$\begin{gathered}
q^2=Q(p)=\sum_{k=0}^{n}b_kp^k,\quad r^2=R(p)=\sum_{i=0}^{m}c_ip^i\\
\nu_1=\varphi(p)=\sum_{j=0}^{l}a_jp^j,\quad \nu_2=q\psi(p),\quad \nu_3=r\kappa(p)\\
\psi(p)=\sum_{i=0}^{n_1}g_ip^i,\quad \kappa(p)=\sum_{j=0}^{m_1}f_jp^j
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где n, m, n_1, m_1, l – натуральные числа или нули, b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – некоторые параметры, которые подлежат определению. В классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой известны три решения такой структуры [1–3]. Рассматривая условия существования квадратичных инвариантных соотношений в задаче о движении гиростата в поле силы тяжести, П.В. Харламов [4] обобщил решения Стеклова и Ковалевского и показал, что решение Горячева обобщения не допускает.

Подставим (1.5) в соотношения (1.4):

$$p^{\cdot}=(\varphi'(p))^{-1}(\psi(p)-\kappa(p))(Q(p)R(p))^{1/2} \tag{1.6}$$

$$(Q(p)\psi^2(p))'=2\varphi'(p)\psi(p)(p\kappa(p)-\varphi(p))(\psi(p)-\kappa(p))^{-1} \tag{1.7}$$

$$(R(p)\kappa^2(p))' = 2\varphi'(p)\kappa(p)(\varphi(p) - p\kappa(p))(\psi(p) - \kappa(p))^{-1}$$

$$A_1(\psi(p) - \kappa(p)) = \varphi'(p)[(C_3 - C_2)\psi(p)\kappa(p) + B_3\kappa(p) - B_2\psi(p) + A_2 - A_3]$$

$$A_2Q'(p)(\psi(p) - \kappa(p)) = 2\varphi'(p)[(C_1 - C_3)\varphi(p)\kappa(p) - \tag{1.8}$$

$$-\kappa(p)(B_3p + s) + B_1\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda]$$

$$A_3R'(p)(\psi(p) - \kappa(p)) = 2\varphi'(p)[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) +$$

$$+\psi(p)(B_2p + s) - B_1\varphi(p) + (A_1 - A_2)p + \lambda]$$

$$\varphi^2(p) + Q(p)\psi^2(p) + R(p)\kappa^2(p) - 1 = 0$$

$$Q(p)(C_2\psi^2(p) + A_2) + R(p)(C_3\kappa^2(p) + A_3) + C_1\varphi^2(p) - \tag{1.9}$$

$$-2s\varphi(p) + A_1p^2 - 2E = 0, \quad Q(p)\psi(p)(B_2\psi(p) - 2A_2) +$$

$$+R(p)\kappa(p)[B_3\kappa(p) - 2A_3] + B_1\varphi^2(p) - 2A_1p\varphi(p) - 2\varphi(p)\lambda + 2k = 0$$

Штрихом обозначена производная по p. Уравнение (1.6) устанавливает зависимость p от t. Отметим, что уравнения (1.6), (1.7) получены из кинематических уравнений, уравнения (1.8) – из динамических уравнений, соотношения (1.9) – из интегралов уравнений движения.

При рассмотрении условий существования изоконических движений гиростата будем предполагать, что вектор **с** в соотношении (1.3) будет направлен по оси, несущей центр масс гиростата. Класс изоконических движений, обладающий таким свойством, не пустой, так как можно показать, что он имеет место, например, в решении [1]. Тогда на основании (1.5) из (1.3) найдем

$$p[\varphi(p) - c_1^*] + Q(p)\psi(p) + R(p)\kappa(p) = 0 \tag{1.10}$$

где $c_1^* = \pm 1$.

2. Случай $\psi(p) = g_0$, $\kappa(p) = f_0$. Одна из первоначальных задач – оценка максимальных степеней полиномов в (1.5), т.е. значений n, m, n_1, m_1, l. На первом этапе эту оценку удобно получить из первого уравнения системы (1.8). При этом возникает ряд особых случаев. Пусть $\psi(p) = g_0$, $\kappa(p) = f_0 (n_1 = 0,\ m_1 = 0)$. Тогда из указанного уравнения в силу $g_0 - f_0 \neq 0$ (в противном случае p = const и гиростат вращается равномерно) имеем

$$\varphi(p) = a_1p + a_0 \tag{2.1}$$

Из первого уравнения системы (1.9) и уравнения (1.10) определим

$$Q(p)\psi(p)[\psi(p) - \kappa(p)] = p\kappa(p)[\varphi(p) - c_1^*] - \varphi^2(p) + 1 \tag{2.2}$$

$$R(p)\kappa(p)[\psi(p) - \kappa(p)] = p\psi(p)[c_1^* - \varphi(p)] + \varphi^2(p) - 1$$

Таким образом, максимальные степени полиномов $Q(p)$ и $R(p)$ не превосходят двух

$$Q(p) = b_2p^2 + b_1p + b_0, \quad R(p) = c_2p^2 + c_1p + c_0 \tag{2.3}$$

Требование того, чтобы (2.1), (2.3) удовлетворяли уравнениям (1.7)–(1.9), приводит к системе алгебраических уравнений на параметры, из которой получим следующие условия:

$$
\begin{aligned}
& b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad a_0 = c_1^* \\
& a_1 = A_1(g_0 - f_0)[(C_3 - C_2)g_0 f_0 + B_3 f_0 - B_2 g_0 + A_2 - A_3]^{-1} \\
& b_1 = 2a_0 a_1 g_0^{-1}(f_0 - g_0)^{-1}, \quad c_1 = 2a_0 a_1 f_0^{-1}(g_0 - f_0)^{-1} \\
& b_2 = a_1(f_0 - a_1)g_0^{-1}(g_0 - f_0)^{-1}, \quad c_2 = a_1(a_1 - g_0)f_0^{-1}(g_0 - f_0)^{-1} \\
& g_0(f_0 s + \lambda) = a_0[g_0 f_0(C_1 - C_3) + A_2 + g_0 B_1] \\
& f_0(g_0 s + \lambda) = a_0[g_0 f_0(C_1 - C_2) + A_3 + f_0 B_1] \\
& g_0 f_0(C_3 - C_2)[A_2 f_0 + g_0(A_1 - A_3) + g_0 f_0 B_3] - \\
& - g_0 f_0 A_1(C_1 - C_3)(g_0 - f_0) = A_1(g_0 - f_0)(A_2 + g_0 B_1) - \\
& -(B_3 f_0 - B_2 g_0 + A_2 - A_3)[A_2 f_0 + g_0(A_1 - A_3) + g_0 f_0 B_3] \\
& g_0 f_0(C_3 - C_2)[g_0(A_3 - A_1) - f_0(A_2 - 2A_1) + g_0 f_0 B_2] - \\
& - g_0 f_0 A_1(C_1 - C_3)(g_0 - f_0) = A_1(g_0 - f_0)(A_3 + f_0 B_1) - \\
& -(B_3 f_0 - B_2 g_0 + A_2 - A_3)[A_3 g_0 - f_0(A_2 - A_1) + g_0 f_0 B_2]
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Назначим g_0 и f_0 свободными параметрами, тогда девятое и десятое уравнения системы (2.4) служат для определения s и λ, а одиннадцатое и двенадцатое уравнения этой системы – для определения величин $C_3 - C_2$, $C_1 - C_3$. При этом для параметров g_0, f_0 должно выполняться условие

$$f_0 g_0(B_3 - B_2) + 2f_0(A_2 - A_1) - 2g_0(A_3 - A_1) \neq 0$$

Приведем пример разрешимости одиннадцатого и двенадцатого уравнений системы (2.4). Пусть $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, $C_{ij} = \varepsilon^2 A_{ij}$ (ε^2 – параметр). Тогда из указанных уравнений получим лишь одно уравнение

$$\varepsilon^2 g_0 f_0^2(A_1 - A_2) + f_0[A_2 - \varepsilon^2 g_0^2(A_1 - A_3)] - g_0 A_3 = 0$$

которое имеет относительно f_0 решение, например, при $A_1 - A_2 > 0$.

Таким образом, при $\psi(p) = g_0$, $\kappa(p) = f_0$ решение (1.5) таково

$$
\begin{aligned}
& p^{\cdot} = (g_0 - f_0)pa_1^{-1}[(b_2 p + b_1)(c_2 p + c_1)]^{1/2}, \quad q^2 = p(b_2 p + b_1) \\
& r^2 = p(c_2 p + c_1), \quad \nu_1 = a_1 p + c_1^* \\
& \nu_2 = g_0[p(b_2 p + b_1)]^{1/2}, \quad \nu_3 = f_0[p(c_2 p + c_1)]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Отметим, что в классической задаче о движении тяжелого гиростата решение (2.5) при $s \neq 0$ не имеет соответствующего аналога. Кроме того, из вида этого решения следует, что при $n_1 = 0$, $m_1 = 0$ полиномы $Q(p)$ и $R(p)$ не могут быть постоянными, так как $b_0 = 0$, $c_0 = 0$.

Пример действительности решения (2.5) таков: $A_1 = 2a$, $A_2 = 1{,}5a$, $A_3 = a$, $g_0 = 2f_0$, $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, $a_0 = 1$, где $a > 0, f_0 > 0$.

3. Случай $m_1 = 0$, $n_1 \neq 0$. Из первого уравнения системы (1.8) имеем

$$A_1(\psi(p) - f_0) = \varphi'(p)\{\psi(p)[(C_3 - C_2)f_0 - B_2] + B_3 f_0 + A_2 - A_3\} \tag{3.1}$$

Отсюда вытекает два варианта

$$(C_3 - C_2)f_0 - B_2 = 0, \quad n_1 = l - 1 \tag{3.2}$$

$$(C_3 - C_2)f_0 - B_2 \neq 0, \quad l = 1 \tag{3.3}$$

Из (1.7) получим

$$\begin{aligned} &(Q(p)\psi^2(p))'(\psi(p) - f_0) = 2\psi(p)\varphi'(p)(pf_0 - \varphi(p)) \\ &R'(p)f_0(\psi(p) - f_0) = 2\varphi'(p)(\varphi(p) - p\psi(p)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим случай (3.2). Анализ соотношений (2.2) и (3.4) показывает, что $n = 2$, $m \leqslant l + 1$. На основе равенства (3.1), которое принимает вид

$$\psi(p) - f_0 = \mu_1 \varphi'(p), \quad \mu_1 = A_1^{-1}(B_3 f_0 + A_2 - A_3) \tag{3.5}$$

Уравнения (1.8) преобразуем так:

$$\begin{aligned} &\mu_1 A_2(2b_2 p + b_1) = 2\{\varphi(p)[(C_1 - C_3)f_0 + B_1] + \\ &+(A_3 - A_1 - B_3 f_0)p - (f_0 s + \lambda)\} \\ &\mu_1 A_3 R'(p) = 2\{(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_2 p + s) - B_1\varphi(p) + (A_1 - A_2)p + \lambda\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из первого уравнения системы (3.6) в силу $l > 1$ имеем

$$\begin{aligned} &(C_1 - C_3)f_0 + B_1 = 0, \quad b_2 = \mu_2 / \mu_1, \quad b_1 = 2\mu_3 / \mu_1 \\ &\mu_2 = A_2^{-1}(A_3 - A_1 - B_3 f_0), \quad \mu_3 = -A_2^{-1}(f_0 s + \lambda) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Поскольку максимальная степень полинома в левой части второго уравнения из (3.6) не превосходит l, а правая часть этого уравнения при $C_1 \neq C_2$ – полином с максимальной степенью, равной $2l - 1$, то в (3.6) необходимо положить $C_2 = C_1$. Тогда из (3.2), (3.7) вытекает равенство $B_2 = B_1$. Исключая во втором уравнении из (3.4) величину $\psi(p) - f_0$ при помощи (3.5), найдем

$$R(p) = 2(f_0\mu_1)^{-1}[(a_l - g_{l-1})(l+1)^{-1} p^{l+1} + \ldots + a_0 p + b_*] \tag{3.8}$$

где b_* – произвольная постоянная. Используя (3.8) и полученные ранее условия $C_2 = C_1$, $B_2 = B_1$, запишем условия, при выполнении которых равенство (3.5) и второе уравнение из (3.6) являются тождествами по p:

$$\begin{aligned} &a_l = g_{l-1}, \quad a_{l-1} - g_{l-2} = \mu_4 g_{l-1}, \ldots, a_2 - g_1 = \mu_4 g_2 \\ &a_1 - g_0 = \mu_4 g_1 + \mu_5, \quad a_0 = \mu_4 g_0 + \mu_6 \\ &l\mu_1 = 1, \quad g_{l-2} = \mu_1(l-1)a_{l-1}, \ldots, g_1 = \mu_1 a_2, \quad g_0 - f_0 = \mu_1 a_1 \\ &\mu_4 = sf_0(A_3 + B_3 f_0)^{-1}, \quad \mu_5 = f_0(A_1 - A_2)(A_3 + B_3 f_0)^{-1} \\ &\mu_6 = \lambda f_0(A_3 + B_3 f_0)^{-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь учтено, что $a_l \neq 0$ при $l > 1$. Рассмотрим равенство (1.10)

$$p(\varphi(p) - c_1^*) + (b_2 p^2 + b_1 p + b_0)\psi(p) + f_0 R(p) = 0 \qquad (3.10)$$

В силу (3.8), (3.9) отсюда вытекает, что $b_2 = -1$, тогда на основании (3.7) получим

$$(A_2 - A_1)(B_3 f_0 + A_1 + A_2 - A_3) = 0 \qquad (3.11)$$

Если в (3.11) $A_2 \neq A_1$, то из (3.9) следует, что $l = -1$, что невозможно. Поэтому в (3.11) положим $A_2 = A_1$. Из (3.9) найдем условия

$$a_{l-1} = l\mu_4 g_{l-1}, \quad g_{l-2} = (l-1)\mu_4 g_{l-1} \qquad (3.12)$$

На их основе потребуем, чтобы первое равенство из (3.4) и равенство (3.10) были тождествами по p. Тогда получим ограничения на параметры

$$\mu_1\mu_4(l-1)^2 - \mu_3(2l-1) - \mu_1\mu_4 l = 0, \quad 3\mu_1\mu_4 + 2\mu_3 = 0$$

которые при $l > 0$ одновременно не могут выполняться. Это значит, что в (3.9), (3.12) $g_{l-1} = 0$, $a_l = 0$ при $l > 1$. Следовательно, вариант (3.2) невозможен.

Изучим случай (3.3). Из соотношений (2.2) вытекает, что $n = 0$, $n_1 = 1$, $m = 2$. Если потребовать, чтобы при этих значениях первое уравнение из (1.9) и первое уравнение из (3.4) были тождествами по p, то получим

$$b_0 g_1^2 - a_1 f_0 + a_1^2 = 0, \quad a_1^2 + b_0 g_1^2 + f_0^2 c_2 = 0, \quad a_1 + b_0 g_1 + f_0 c_2 = 0$$

Поскольку $b_0 \neq 0$ (в противном случае p = const), то из данных равенств найдем: $g_1 = 0$ или $f_0 = 0$. В силу $n_1 \neq 0$ равенство $f_0 = 0$ при учете (1.4) может выполняться при условии $q\nu_1 - p\nu_2 = 0$, которое приведем к виду $b_0\varphi^2(p) - p^2 R(p)\psi(p) = 0$. Последнее уравнение не может быть тождеством по p при $n_1 \neq 0$.

Итак, показано, что случай $n_1 \neq 0$, $m_1 = 0$ невозможен.

4. Случай $l = 1, n_1 \neq 0, m_1 \neq 0$. Без ограничения общности положим $m_1 \leqslant n_1$. Тогда из первого уравнения системы (1.8) получим

$$C_3 = C_2 \qquad (4.1)$$

Рассмотрим первое уравнение из (1.9) и уравнение (1.10)

$$\begin{gathered}(a_1 p + a_0)^2 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)\kappa^2(p) - 1 = 0 \\ p[a_1 p + (a_0 - c_1^*)] + Q(p)\psi(p) + R(p)\kappa(p) = 0\end{gathered} \qquad (4.2)$$

Анализ этих уравнений дает следующие варианты: при $n = 0, n_1 = 2$: $m_1 \leqslant 0$; при $n = 1, n_1 = 1$: $m_1 = 1, m_1 = 1$; при $n > 1$: $m = n$, $m_1 = n_1$. При $n = m = n_1 = m_1 = 1$ из второго уравнения системы (4.2) вытекает $b_1 g_1 + c_1 f_1 = -a_1$. Тогда из (1.7) получим систему алгебраических уравнений, из которой следует $3(b_1 g_1 + c_1 f_1) = -2a_1$. Это значит, что $a_1 = 0$, что невозможно.

Изучим случай $n = m$, $n_1 = m_1$, где $n_1 \neq 0$. Из (4.2) вытекают условия

$$b_n g_{n_1}^2 + c_n f_{n_1}^2 = 0, \quad b_n g_{n_1} + c_n f_{n_1} = 0 \qquad (4.3)$$

из которых имеем $g_{n_1} = f_{n_1}$, $b_n + c_n = 0$. Обратимся к первому уравнению из системы (1.8). Из него в силу принятых предположений найдем $B_3 = B_2$ и

$$g_{n-1} = f_{n_1-1},\dots,g_1 = f_1, \quad g_0 = f_0 + \mu_0$$
$$\mu_0 = a_1(A_2 - A_3)(A_1 + a_1 B_2)^{-1} \tag{4.4}$$

Здесь исключен из рассмотрения случай $A_2 = A_3$, который в силу (4.1) $B_3 = B_2$ и уравнений (1.4) приводит к известному решению Кирхгофа–Харламова.

В силу (4.3) первое уравнение (2.2) запишем в виде

$$\mu_0 Q(p)(\kappa(p) + \mu_0) = 1 - (a_1 p + a_0)^2 - p\kappa(p)[a_1 p + (a_0 - c_1^*)]$$

из которого вытекает, что $n = 2$. Тогда и $m = 2$. Из второго и третьего уравнений системы (1.8) при $a_0(C_1 - C_2) - s \neq 0$ имеем:

$$a_1(C_1 - C_2) - B_2 = 0, \quad n_1 = 1 (f_{n_1} = 0 \ \text{при} \ n_1 > 1)$$
$$b_2\mu_0 A_2 = a_1\{f_1[a_0(C_1 - C_2) - s] + B_1 a_1 + A_3 - A_1\}$$
$$b_1\mu_0 A_2 = 2a_1\{f_0[a_0(C_1 - C_2) - s] + (B_2 a_0 - \lambda)\} \tag{4.5}$$
$$c_2\mu_0 A_3 = a_1\{f_1[a_0(C_2 - C_1) + s] + A_1 - A_2 - B_1 a_1\}$$
$$c_1\mu_0 A_3 = 2a_1\{f_0[a_0(C_2 - C_1) + s] + a_0\mu_0(C_2 - C_1) + \mu_0 s - B_1 a_0 + \lambda\}$$

где в силу (4.3), (4.4) должно выполняться условие $f_1(b_2 + c_2) = 0$. Это ведет к равенствам $b_2 = -a_1/\mu_0$, $c_2 = a_1/\mu_0$.

Из соотношений (4.2) получим

$$f_1(c_1 + b_1) + 2b_2\mu_0 = 0, \quad f_1(c_1 + b_1) + b_2\mu_0 + a_1 = 0$$

Учет всех соотношений приводит к $a_1 = 0$, что невозможно. Поэтому в (4.5) необходимо положить $a_0(C_1 - C_2) - s = 0$. Тогда выполняется равенство $A_2 b_1 + A_3 c_1 = 0$.

Второму соотношению из (4.2) придадим следующий вид:

$$p[a_1 p + (a_0 - c_1^*)] + (f_{n_1} p^{n_1} + \dots + f_0)[(b_1 + c_1)p + (b_0 + c_0)] + \tag{4.6}$$
$$+\mu_0(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) = 0$$

Если $n_1 = 1$, то можно воспользоваться результатами, полученными выше, т.е. при этом $a_1 = 0$.

Когда $n_1 \neq 0$, из (4.6) вытекает, что $b_1 + c_1 = 0$. Это значит, что $A_2 = A_3$. Таким образом, случай $l = 1$ невозможен.

5. Общий случай ($l > 1$, $m_1 \neq 0$, $n_1 \neq 0$). В силу принятых предположений из первого уравнения системы (1.8) вытекает условие (4.1). Если при этом считать, что $n_1 > m_1$, то из указанного уравнения получим $B_2 = 0$. Тогда из (1.7), (1.8) имеем:

$$A_1[\psi(p) - \kappa(p)] = \varphi'(p)[B_3\kappa(p) + A_2 - A_3] \tag{5.1}$$
$$[Q(p)\psi^2(p)]' = 2A_1\psi(p)[p\kappa(p) - \varphi(p)][B_3\kappa(p) + A_2 - A_3]^{-1}$$
$$[R(p)\kappa^2(p)]' = 2A_1\kappa(p)[\varphi(p) - p\psi(p)][B_3\kappa(p) + A_2 - A_3]^{-1}$$

$$A_2Q'(p)[B_3\kappa(p)+A_2-A_3]=2A_1[(C_1-C_2)\varphi(p)\psi(p)-$$

$$-\kappa(p)(B_3p+s)+B_1\varphi(p)+(A_3-A_1)p-\lambda]$$

$$A_3R'(p)[B_3\kappa(p)+A_2-A_3]=2A_1[-(C_1-C_2)\varphi(p)\kappa(p)+$$

$$+\psi(p)s-B_1\varphi(p)+(A_1-A_2)p+\lambda]$$

Из первого уравнения этой системы при $n_1>m_1$ найдем следующие варианты:

$$1)\ B_3=0,\ n_1=l-1,\quad 2)\ B_3\neq 0,\ n_1=m_1+l-1 \tag{5.2}$$

Анализ остальных уравнений из (5.1) приводит к подслучаям:

$$\begin{aligned}
&1.1)\ C_1\neq C_2,\ m+m_1-1\leqslant l,\ n+n_1-1=l,\ m-1=l-1+n_1\\
&1.2)\ C_1=C_2,\ m+m_1-1\leqslant l,\ n-1\leqslant l,\ m-1=l\\
&2.1)\ C_1\neq C_2,\ m+m_1-1=l,\ n-1=l,\ m-1=l+n_1-m_1\\
&2.2)\ C_1=C_2,\ m+m_1-1=l,\ n+n_1-1=\max(1,l-m_1)(l-m_1\neq 1)\\
&n+n_1-1\leqslant 1(l-m_1=1),\ n+m_1-1=\max(m_1+1,l)(m_1+1\neq l)\\
&n-1+m_1\leqslant l(m_1+1=l),\ m-1+m_1=\max(n_1,l)(n_1\neq l)\\
&m-1+m_1\leqslant l\ (n_1=l)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Можно убедиться, что (5.2), (5.3) одновременно не выполняются. Таким образом следует считать, что $m_1=n_1$.

Из первого уравнения системы (1.9) имеем

$$\begin{aligned}
&A1)\ 2l=n+2n_1=m+2m_1,\quad A2)\ 2l=n+2n_1>m+2m_1\\
&A3)\ 2l=m+2m_1>n+2n_1,\quad A4)\ n+2n_1=m+2m_1>2l
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Аналогично из (1.10) получим независимые варианты

$$\begin{aligned}
&\text{Б}1)\ l+1=n+n_1=m+m_1,\quad \text{Б}2)\ l+1=n+n_1>m+m_1\\
&\text{Б}3)\ l+1=m+m_1>n+n_1,\quad \text{Б}4)\ n+n_1=m+m_1>l+1
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Исследование совместности соотношений (5.4) и (5.5) дает случаи:

$$\begin{aligned}
&1)\ n=m=2,\ m_1=n_1=l-1\\
&2)\ n=m=2(l-n_1),\quad m_1=n_1<l-1\\
&3)\ n=2,\quad m<2,\quad m_1=n_1=l-1\\
&4)\ m=2,\quad n<2,\quad m_1=n_1=l-1\\
&5)\ m=n=l+1-n_1,\quad m_1=n_1>l-1\\
&6)\ m=n>l+1-n_1,\quad m=n>2(l-n_1)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Рассмотрим первое уравнение из (1.8):

$$A_1[(g_{n_1}-f_{n_1})p^n+\ldots+(g_0-f_0)]= \tag{5.7}$$

$$=(la_lp^{l-1}+\ldots+a_1)[(f_{n_1}B_3-g_{n_1}B_2)p^{n_1}+\ldots+(f_1B_3-g_1B_2)p+(f_0B_3-g_0B_2+A_2-A_3)]$$

Если в (5.7) положить $B_3 = B_2$, то в силу того, что $l > 1$, получим $g_i - f_i = 0$ для всех $i = 0,...,n_1$. Но тогда из (1.6) следует, что p = const, т.е. гиростат вращается равномерно. Поэтому в дальнейшем считаем, что $B_3 \neq B_2$. Из (5.7) следует условие $g_{n_1} \neq f_{n_1}$ и ограничение на максимальные степени $n_1 \geq l-1$.

Пусть $n_1 = l-1+N$, где N принимает значения 0, 1,..., n – 1. Тогда

$$f_{n_1}B_3 - g_{n_1}B_2 = 0,\dots,f_{N+1}B_3 - g_{N+1}B_2 = 0 \tag{5.8}$$

$$f_N B_3 - g_N B_2 \neq 0 \ (N \neq 0), \ f_0 B_3 - g_0 B_2 + A_2 - A_3 \neq 0 \ (N = 0)$$

На основе (5.7), (5.8) имеем

$$\psi(p) - \kappa(p) = A_1^{-1}(la_l p^{l-1} + \dots + a_1)(\alpha_N p^N + \dots + \alpha_0) \tag{5.9}$$

$$\alpha_N = f_N B_3 - g_N B_2, \dots, \alpha_1 = f_1 B_3 - g_1 B_2, \ \alpha_0 = f_0 B_3 - g_0 B_2 + A_2 - A_3$$

В силу того, что $n_1 = l-1+N$, $N \geq 0$, вариант 2 из (5.6) невозможен. Вариант 6 невозможен в силу соотношений (2.2), из которых вытекает, что $n \leq 2$ при $N = 0$ и $n = 2 - N$ при $N \neq 0$. Из второго и третьего уравнений (1.8) имеем

$$A_2(nb_n p^{n-1} + \dots + b_1)[(g_{n_1} - f_{n_1})p^{n_1} + \dots + (g_0 - f_0)] =$$

$$= 2(la_l p^{l-1} + \dots + a_1)[(C_1 - C_2)a_l f_{n_1} p^{l+n_1} + \dots] \tag{5.10}$$

$$A_3(mc_m p^{m-1} + \dots + c_1)[(g_{n_1} - f_{n_1})p^{n_1} + \dots + (g_0 - f_0)] =$$

$$= 2(la_l p^{l-1} + \dots + a_1)[-(C_1 - C_2)a_l g_{n_1} p^{l+n_1} + \dots]$$

Отсюда в силу $l > 1$, $g_{n_1} \neq f_{n_1}$ вытекает, что $n = m = 2l$. Последнее условие несовместно с вариантами 1, 3, 4, 5 из (5.6). Таким образом, в (5.10) полагаем $C_1 = C_2 = C_3$ и

$$A_2(nb_n p^{n-1} + \dots + b_1)[(g_{n_1} - f_{n_1})p^{n_1} + \dots + (g_0 - f_0)] =$$

$$= 2(la_l p^{l-1} + \dots + a_1)[-(B_3 p + s)(f_{n_1} p^{n_1} + \dots + f_0) +$$

$$+ B_1(a_l p^l + \dots + a_0) + (A_3 - A_1)p - \lambda]$$

$$A_3(mc_m p^{m-1} + \dots + c_1)[(g_{n_1} - f_{n_1})p^{n_1} + \dots + (g_0 - f_0)] = \tag{5.11}$$

$$= 2(la_l p^{l-1} + \dots + a_1)[-(B_2 p + s)(g_{n_1} p^{n_1} + \dots + g_0) -$$

$$- B_1(a_l p^l + \dots + a_0) + (A_1 - A_2)p + \lambda]$$

Пусть $N \neq 0$, т.е. $n_1 > l-1$. Тогда в силу $B_2 \neq 0$ из (5.11) имеем $n = l + 1$, $m = l + 1$. Поэтому вариант 5 из (5.6) невозможен.

Итак, из (5.6) получим единственный случай: $n_1 = l-1$, $m \leq 2$, $n \geq 2$. При этом в силу $C_3 = C_2 = C_1$ матрица C в уравнения не входит.

Рассмотрение интеграла энергии из (1.9) дает $l = 2$. Следовательно, в общем случае решение уравнений (1.7), (1.8) может существовать только в случае

$n = m = 2$, $n_1 = m_1 = 1$, $l = 2$. **Принимая эти значения в (1.5), потребуем, чтобы уравнения (1.7), (1.8) были тождествами по p. В результате получим решение**

$$q^2 = a_2 g_1^{-1}(g_1 - f_1)^{-1}[(f_1 - a_2)p^2 - 1]$$

$$r^2 = a_2 g_1^{-1}(g_1 - f_1)^{-1}[(a_2 - g_1)p^2 + 1], \quad \nu_1 = a_2 p^2 + 1 \tag{5.12}$$

$$\nu_2 = g_1 pq, \quad \nu_3 = f_1 pr, \quad \dot{p} = (g_1 - f_1)(2a_2)^{-1}\sqrt{q^2 r^2}$$

которое имеет место при следующих условиях:

$$C_3 = C_2 = C_1, \quad a_2 = A_1 g_1 (2A_2 - A_1), \quad \lambda = B_1$$

$$f_1 = g_1(A_1 - 2A_3)(A_1 - 2A_2)^{-1}, \quad B_2 = 2\lambda A_1(2A_2 - A_1)^{-1}$$

$$B_3 = 2\lambda A_1(2A_3 - A_1)^{-1}, \quad s = (A_2 - A_1)(A_1 - A_3)g_1^{-1}(A_1 - 2A_3)^{-1}$$

и обобщает известное решение Стеклова [1] на случай движения гиростата в поле Лоренца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознан. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 1–3.
2. *Горячев Д.Н.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознан. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 23–24.
3. *Kowalewski N.* Eine neue partikulare Losung der Differenzial Gleichungen der Bewegung eines schweren starren Korpers um einen festen Punkt // Math. ann. 1908. Bd. 65. S. 528–537.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела // Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965. 221 с.
5. *Fabbri R.* Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante ad un punto fisso // Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis. mat. e nat. Ser. 6. 1934. T. 19. P. 407–417.
6. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Математическая физика. Киев: Наук. думка, 1968. Вып. 5. С. 194–202.
7. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Изоконические движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1982. Вып. 14. С. 20–33.
8. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* К вопросу о классификации движений гиростата Жуковского // Прикл. механика. 1984. Т. 20. N 8. С. 104–111.
9. *Харламова Е.И.* Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1970. Вып. 2. С. 35–37.
10. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Один класс изоконических движений в динамике твердого тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1990. Вып. 22. С. 33–38.
11. *Jehia H.M.* On the motion of a rigid bodi acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equations of motion and their transformation // J. Mec. Theor. et Appl. 1986. V. 5. N 5. P. 747–753.
12. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем // Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.

Донецк

Поступила в редакцию
11.I.1993