УДК 531.36

© 1993 г. В.Н. Тхай

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБРАТИМОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется поведение обратимой относительно отображения фазового пространства системы в окрестности положений равновесия, не принадлежащих неподвижному множеству этого отображения.

1. Некоторые свойства обратимой с параметром системы. Рассмотрим автономную обратимую систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

где $\mathbf{M}$ – некоторая постоянная $(n \times n)$-матрица. Пусть $\mathbf{x}^0$ – некоторое положение равновесия $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = 0$. Тогда, если

$$\mathbf{M}^k \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0 \tag{1.2}$$

(k – нечетное число), то уравнения возмущенного движения в окрестности $\mathbf{x}^0$ являются [1] обратимыми с матрицей $\mathbf{M}^k$. В противном случае свойство обратимости, вообще говоря, теряется.

В механических задачах $\mathbf{M}$ – инволюция: $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$ [2]. В этом случае канонический вид матрицы $\mathbf{M}$ таков:

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_l & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{E}_m \end{Vmatrix} \quad (l + m = n)$$

($\mathbf{E}_j$ – единичная матрица порядка j). Отсюда следует, что систему (1.1) можно записать в виде

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^m \tag{1.3}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

и множество неподвижных точек, удовлетворяющее (1.2), совпадает с гиперплоскостью $\mathbf{v} = 0$. Пусть

$$\mathbf{U}(\alpha, \beta) = 0, \quad \mathbf{V}(\alpha, \beta) = 0 \quad (\alpha, \beta - \mathrm{const})$$

Тогда в окрестности равновесия $\mathbf{u} = \alpha$, $\mathbf{v} = \beta$ уравнения возмущенного движения получаются из (1.3) заменой $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ на $\mathbf{u} + \alpha$, $\mathbf{v} + \beta$ (воспользуемся теми же обозначениями переменных)

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \beta), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \beta) \tag{1.4}$$

При $\beta = 0$ эта система, как и исходная (1.3), обратима с матрицей $\mathbf{M}$. Если же $\beta \neq 0$, то в общем случае имеем обратимую с параметром β систему: система (1.4) переходит в себя при замене $t \to -t$, $\mathbf{u} \to \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$, $\beta \to -\beta$.

Наряду с системой (1.4) рассмотрим

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\beta), \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\beta) \tag{1.5}$$

Так как

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\beta) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \beta), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\beta) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \beta)$$

то каждому решению $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t)$, $\mathbf{v} = \psi(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, t)$ ($\mathbf{u}^0$, $\mathbf{v}^0$ – начальные значения) уравнений (1.4) отвечает решение $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u}^0, -\mathbf{v}^0, -t)$, $\mathbf{v} = -\psi(\mathbf{u}^0, -\mathbf{v}^0, -t)$ системы (1.5). Поэтому справедливы следующие выводы.

1^0. Если система (1.4) имеет периодическое (условно-периодическое) решение при $\beta = \beta^*$, то она обязательно имеет периодическое (условно-периодическое) решение при $\beta = -\beta^*$.

2^0. Каждому инвариантному множеству G_+ системы (1.4) при $\beta = \beta^*$ отвечает инвариантное множество G_- при $\beta = -\beta^*$.

3^0. Каждому решению системы (1.4) при $\beta = \beta^*$, асимптотическому к множеству G_+ при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$, отвечает асимптотическое к G_- при $t \to -\infty$ $(t \to +\infty)$ при $\beta = -\beta^*$ решение.

4^0. Если G_+ асимптотически устойчиво (при $t \to +\infty$), то G_- неустойчиво (при росте t), и все траектории являются уходящими.

2. Обратимые с параметром механические системы. Уравнения Рауса стационарных движений голономной механической системы с циклическими координатами

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^\bullet} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{R}_1 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=k+1}^{n} \gamma_{\alpha j}(\mathbf{q})\beta_\alpha q_j^\bullet \tag{2.1}$$

($\mathbf{R}_p$ – форма обобщенных скоростей порядка p, β_α – циклические постоянные) являются обратимыми с параметром $\beta = (\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n)$; эти уравнения инвариантны относительно замены: $t \to -t$, $q_j \to q_j$, $q_j^\bullet \to -q_j^\bullet$ $(j = 1, \ldots, k)$, $\beta_\alpha \to -\beta_\alpha$ $(\alpha = k+1, \ldots, n)$.

Аналогично обратимы с параметром β, принимающим значения $+1$ и -1, уравнения Гамильтона

$$\mathbf{q}^\bullet = \partial \mathbf{H}/\partial \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}^\bullet = -\partial \mathbf{H}/\partial \mathbf{q}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_2 + \beta \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_0 \tag{2.2}$$

где $\mathbf{H}_j$ – j-я форма импульсов, $\mathbf{H}$ не зависит от времени.

Учитывая теперь, что системы (2.1) и (2.2) могут быть устойчивы только на всей временной оси (см., например, [3]) и выводы разд. 1, получаем следующий результат.

Теорема 1. Система $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_0$ $(\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_0)$ устойчива (неустойчива) вместе с системой $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_0$ $(\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_0)$.

В окрестности многообразия стационарных движений неголономной системы уравнения можно взять [4] в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^\bullet = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{c}), \quad \mathbf{y}^\bullet = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{c}), \quad \mathbf{w}^\bullet = \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{c})\\
&\mathbf{z}^\bullet = \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{c}); \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^p; \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^k\\
&\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0, 0, \mathbf{c}) \equiv 0, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0, 0, \mathbf{c}) \equiv 0, \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0, 0, \mathbf{c}) \equiv 0\\
&\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0, 0, \mathbf{c}) \equiv 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

($\mathbf{c}$ – параметр) инвариантном относительно замены: $t \to -t$, $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \to \mathbf{y}$, $\mathbf{w} \to \mathbf{w}$, $\mathbf{z} \to -\mathbf{z}$, $\mathbf{c} \to -\mathbf{c}$. Поэтому, если при $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ действуют диссипативные силы, выбранное положение равновесия $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{w} = \mathbf{z} = 0$ асимптотически устойчиво по переменным $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ и каждое из возмущенных движений асимптотически стремится к одному из установившихся движений семейства $\mathbf{x} = \mathbf{const}$, $\mathbf{y} = \mathbf{const}$, $\mathbf{w} = \mathbf{z} = 0$, то при $\mathbf{c} = -\mathbf{c}^*$ силы являются ускоряющими и каждое из возмущенных движений покидает некоторую окрестность указанного семейства.

Теорема Ляпунова–Малкина [5] позволяет устанавливать [4] этот факт в тех случаях, когда вопрос решается линейной системой. В самом деле, линеаризованные уравнения

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^\bullet = \mathbf{A}_1(\mathbf{c})\mathbf{w} + \mathbf{B}_1(\mathbf{c})\mathbf{z}, \qquad \mathbf{y}^\bullet = \mathbf{A}_2(\mathbf{c})\mathbf{w} + \mathbf{B}_2(\mathbf{c})\mathbf{z}\\
&\mathbf{w}^\bullet = \mathbf{A}_3(\mathbf{c})\mathbf{w} + \mathbf{B}_3(\mathbf{c})\mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}^\bullet = \mathbf{A}_4(\mathbf{c})\mathbf{w} + \mathbf{B}_4(\mathbf{c})\mathbf{z}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

содержат постоянные матрицы: $\mathbf{A}_1(\mathbf{c})$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{c})$, $\mathbf{B}_3(\mathbf{c})$, $\mathbf{A}_4(\mathbf{c})$ – четные функции параметра c, $\mathbf{B}_1(\mathbf{c})$, $\mathbf{A}_2(\mathbf{c})$, $\mathbf{A}_3(\mathbf{c})$, $\mathbf{B}_4(\mathbf{c})$ – нечетные функции c. Характеристическое уравнение системы (2.4) обязательно имеет $p + l$ нулевых корней. Остальные корни $\lambda(\mathbf{c})$ находятся из уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_3(\mathbf{c}) - \lambda(\mathbf{c})\mathbf{E}_k & \mathbf{B}_3(\mathbf{c}) \\ \mathbf{A}_4(\mathbf{c}) & \mathbf{B}_4(\mathbf{c}) - \lambda(\mathbf{c})\mathbf{E}_k \end{Vmatrix} = 0 \qquad (2.5)$$

и являются нечетными функциями параметра c. Если при $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ все $\mathrm{Re}\lambda(\mathbf{c}^*) < 0$ (доминируют диссипативные силы), то при $\mathbf{c} = -\mathbf{c}^*$ все $\mathrm{Re}\lambda(-\mathbf{c}^*) > 0$ и доминируют ускоряющие силы.

Отметим [4], что в окрестности стационарных движений неголономной системы диссипативные силы действуют и в том случае, когда в исходной системе (до перехода в окрестность стационарных движений) диссипативные силы отсутствовали и система была обратимой.

3. Диссипация на границе области устойчивости. Предположим, что характеристическое уравнение (2.5) имеет одну пару чисто мнимых корней при прочих с отрицательными вещественными частями. Оказывается, в этом случае система (2.3) может быть асимптотически устойчива по части переменных w, z.

При указанных предположениях система (2.3) может быть записана [6] в виде

$$\begin{aligned} &x_s^{\bullet} = a_s\rho^2 + X_s(\mathbf{x}, \rho, \theta, \eta) \quad (s = 1, \ldots, \kappa = p + l) \qquad (3.1)\\ &\rho^{\bullet} = \sum_{j=1}^{\kappa} b_j x_j \rho + R(\mathbf{x}, \rho, \theta, \eta)\\ &\theta^{\bullet} = \ldots\\ &\eta_i^{\bullet} = \sum_{j=1}^{q} p_{ij}\eta_j + H_i(\mathbf{x}, \rho, \theta, \eta) \quad (i = 1, \ldots, q = 2k - 2) \end{aligned}$$

где a_s, b_j, p_{ij} – постоянные, матрица $\|p_{ij}\|$ имеет только собственные значения с отрицательными вещественными частями, а 2π – периодические по θ нелинейные функции X, R, H обращаются тождественно по x, θ в нуль при $\rho = 0$, $\eta = 0$; ρ, θ имеют смысл полярных координат. Кроме того, всегда можно добиться [6], чтобы функции X_s не содержали членов, линейных по ρ, η.

Здесь возможны следующие случаи.

1°. Существует пара коэффициентов a_s, b_s такая, что $a_s b_s > 0$. В этом случае система (3.1) неустойчива по Ляпунову. Доказательство этого факта проводится стандартным образом путем построения функции Четаева в окрестности растущего луча системы первого нелинейного приближения.

2°. Все $a_s b_s < 0$. Тогда заменой $\sqrt{-b_s/a_s}\,x_s \to x_s$ $(s = 1, \ldots, \kappa)$ всегда можно добиться выполнения условий $a_s = -b_s$ $(s = 1, \ldots, \kappa)$. Предполагая эти равенства выполненными, перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\varphi_1, \quad x_2 = r\sin\varphi_2\cos\varphi_1, \ldots, x_{\kappa-1} = r\sin\varphi_\kappa\cos\varphi_{\kappa-1}\ldots\cos\varphi_1\\ &x_\kappa = r\cos\varphi_\kappa\cos\varphi_{\kappa-1}\ldots\cos\varphi_1, \quad \rho = r\sin\varphi_1 \qquad (3.2) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &r^{\bullet} = \cos\varphi_1(X_1^* + \sin\varphi_2 X_2^* + \ldots + \sin\varphi_\kappa\cos\varphi_{\kappa-1}\ldots\cos\varphi_2 X_{\kappa-1}^* +\\ &+ \cos\varphi_\kappa\cos\varphi_{\kappa-1}\ldots\cos\varphi_2 X_\kappa^*) + \sin\varphi_1 R^*\\ &r\sin\varphi_1\varphi_1^{\bullet} = -a_1 r^2\sin\varphi_1 - X_1^* + r^{\bullet}\cos\varphi_1 \qquad (3.3)\\ &\eta_i^{\bullet} = \sum_{j=1}^{q} p_{ij}\eta_j + H_i^*(r, \varphi, \theta, \eta) \quad (i = 1, \ldots, q) \end{aligned}$$

где $\mathbf{X}^*$, R^*, $\mathbf{H}^*$ – функции X, R, H после подстановки (3.2).

Рассмотрим функцию

$$V = r\exp(-a_1\cos\varphi_1) + W(\eta), \quad \sum_{s=1}^{q}\frac{\partial W}{\partial \eta_s}\sum_{j=1}^{q} p_{sj}\eta_j = -(\eta_1^2 + \ldots + \eta_q^2)$$

знакоопределенную относительно переменных r, η. Производная от V в силу (3.3) имеет вид

$$V^{\cdot} = -a_1^2\exp(-a_1\cos\varphi_1)r^2\sin\varphi_1 - (\eta_1^2 + \ldots + \eta_q^2) +$$
$$+ \exp(-a_1\cos\varphi_1)\{-a_1X_1^* + (1 + a_1\cos\varphi_1)[\cos\varphi_1(X_1^* + \sin\varphi_2 X_2^* +$$
$$+ \sin\varphi_3\cos\varphi_2 X_3^* + \ldots + \sin\varphi_\kappa\cos\varphi_{\kappa-1}\ldots\cos\varphi_2 X_{\kappa-1}^* \ldots \cos\varphi_2 X_{\kappa-1}^* +$$
$$+ \cos\varphi_\kappa\cos\varphi_{\kappa-1}\ldots\cos\varphi_2 X_\kappa^*) + \sin\varphi_1 R^*]\} + \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial W}{\partial \eta_j}H_j^*$$

Так как функции X_s не содержат членов, линейных по ρ, η и функции $\mathbf{X}$, R, $\mathbf{H}$ обращаются в нуль при $\rho = 0, \eta = 0$, то

$$V^{\cdot} = -a_1^2\exp(-a_1\cos\varphi_1)r^2\sin^2\varphi_1 - (\eta_1^2 + \ldots + \eta_q^2) +$$
$$+ r^2\sin^2\varphi_1\Psi(r, \varphi, \theta, \eta) + r\sin\varphi_1\sum_{j=1}^{q}\eta_j\Psi_j(r, \varphi, \theta, \eta) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\Psi_{ij}(r, \varphi, \theta, \eta)\eta_i\eta_j$$

где функции Ψ, Ψ_j, Ψ_{ij} обращаются в нуль при $r = 0$, $\eta = 0$.

Построенная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы В.В. Румянцева [7] об устойчивости относительно переменных r, $\eta_1, \ldots, \eta_q$ и асимптотической устойчивости относительно величин $\rho = r\sin\varphi_1$, $\eta_1, \ldots, \eta_q$. Кроме того, из (3.3) видно, что $\mathbf{x} \to \mathbf{const}$ при $(\rho, \eta) \to 0$.

Теорема 2. Если существует пара коэффициентов a_s, b_s такая, что $a_s b_s > 0$, то нулевое решение $\mathbf{x} = 0$, $\rho = 0$, $\eta = 0$ системы (3.3) неустойчиво по Ляпунову. Если же все $a_s b_s < 0$, то это решение устойчиво, причем асимптотически по части переменных ρ, η и каждое из возмущенных движений асимптотически стремится к одному из установившихся движений κ-семейства

$$\mathbf{x} = \mathbf{const}, \quad \rho = 0, \quad \eta = 0$$

4. Пример. Перманентные вращения тяжелого выпуклого твердого тела на абсолютно шероховатой неподвижной горизонтальной плоскости. Сохраняя обозначения [8], возьмем уравнения движения в виде

$$\Theta\omega^{\cdot} + \omega\times(\Theta\cdot\omega) = mg\mathbf{r}\times\gamma - m\mathbf{r}\times[\omega^{\cdot}\times\mathbf{r} + \omega\times\mathbf{r}^{\cdot} + \omega\times(\omega\times\mathbf{r})] \tag{4.1}$$
$$\gamma^{\cdot} + \omega\times\gamma = 0$$

Эти уравнения представляют собой замкнутую систему с учетом соотношения $f(\mathbf{r}) = 0$, задающего поверхность тела; связь между векторами $\mathbf{r}$ и γ имеет вид

$$\gamma = -\mathrm{grad}f(\mathbf{r})/|\mathrm{grad}f(\mathbf{r})|$$

Система (4.1) обратима и представляет частный случай (1.3) с векторами $\mathbf{u} = \gamma$, $\mathbf{v} = \omega$. Уравнения (4.1) допускают [8] частное решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0 \tag{4.2}$$

(ω_0 – произвольная постоянная), которое отвечает перманентному вращению тела с угловой скоростью ω_0 вокруг одной из главных центральных осей инерции, совпадающей с вертикалью, в предположении ортогональности этой оси поверхности тела. В окрестности (4.2) уравнения возмущенного движения имеют вид (2.3), где

$$x = \omega_3 - \omega_0, \quad y = \gamma_3 - 1, \; w = (\gamma_1, \gamma_2)^T, \; z = (\omega_1, \omega_2)^T$$

Поэтому, если движение (4.2) при вращении в одну сторону ($\omega_0 < 0$) асимптотически устойчиво по переменным $\gamma_1, \dot\gamma_2, \omega_1, \dot\omega_2$, то при вращении в другую сторону ($\omega_0 > 0$) движение неустойчиво и каждая из траекторий покидает некоторую окрестность нуля в пространстве переменных $\gamma_1, \dot\gamma_2, \omega_1, \dot\omega_2$.

Достаточные условия асимптотической устойчивости по первому приближению приведены в [8]. В случае вращения тела с устойчивым положением равновесия вокруг главной оси наибольшего момента инерции эти условия имеют вид

$$\omega_0 < \omega_* < 0$$

При $\omega_0 = \omega_*$ характеристическое уравнение имеет [8] пару чисто мнимых корней и два корня с отрицательными вещественными частями и система (4.1) допускает периодическое движение (бифуркация Хопфа) [8]. Тогда из разд. 1, 2 следует, что при $\omega_0 = -\omega_* > 0$ пара чисто мнимых корней также приводит к рождению периодического движения.

Отметим, что при $\omega_0 = 0$ (равновесие) уравнения возмущенного движения являются обратимыми, характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней и, в окрестности положения равновесия существуют [2] два семейства ляпуновских периодических движений.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев М.В., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических обратимых систем // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 3–11.
2. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
3. *Тхай В.Н.* Устойчивость многомерных гамильтоновых систем // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 355–365.
4. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. *Тхай В.Н.* К вопросу об устойчивости в критическом случае // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 436–440.
7. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вест. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии. 1957. № 4. С. 9–16.
8. *Карапетян А.В.* Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 19–24.

Москва

Поступила в редакцию
2.XI.1992