

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОМЕРНОМ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Рассматривается периодическое движение жидкости в трубе конечной длины кругового сечения, на одном из концов которой установлен агрегат, изменяющий расход жидкости, отделенный от трубы камерой, служащей для регулирования расхода или уменьшения колебаний давления. Решается вопрос о том, при каких условиях возможны подобные периодические движения, каков их вид и зависимость периода и продолжительностей первой и второй стадий колебания от параметров, определяющих движение.

Ранее [1] на основании положений, развитых И.А. Чарным [2], дано решение трех задач о неустановившемся движении жидкости (в том числе и периодическом) в системе указанного типа. При этом граничные условия для всех этих задач таковы, что каждое периодическое колебание состоит из двух частей продолжительностью T_1 и $T_2 = T - T_1$, где T – период движения. В зависимости от того, каким уравнением – волновым, телеграфным или теплопроводности – описывается движение, три задачи были названы в [1] соответственно первой, второй и третьей.

Ниже рассматриваются более детально периодические решения этих трех задач.

1. Пусть $U(z, \tau)$ – средняя скорость жидкости в трубе, z – координата, отсчитываемая вдоль оси трубы, τ – время (все эти величины – безразмерные).

Первая и вторая задачи сводятся к решению в области $0 < z < 1$ соответственно волнового ($v = 0$) и телеграфного ($v > 0$) уравнений

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + 2v \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial U(0, \tau)}{\partial z} = 0, \quad b \frac{\partial U(1, \tau)}{\partial z} + U(1, \tau) = Q[U(1, \tau), \tau] \quad (1.2)$$

и без начальных условий.

Здесь $Q(U, \tau)$ – либо заданная периодическая функция τ вида

$$Q = Q(\tau) = \begin{cases} Q_1 & (0 < \tau < T_1) \\ Q_2 & (T_1 < \tau < T) \end{cases} \quad (1.3)$$

либо это зависимость от U релейного типа

$$Q = Q(U) = \begin{cases} Q_1 & (U < U_*) \\ Q_2 & (U > U_{**}) \end{cases} \quad (1.4)$$

причем $U_* > U_{**}$, так что имеется участок неоднозначности $U_{**} < U < U_*$.

Величины $Q_1, Q_2, T_1, T, U_*, U_{**}$ – заданные постоянные числа; будем полагать, что $Q_1 > Q_2, U_* \geq U_{**}; T_1$ – продолжительность первой стадии периодического движения, $T = T_1 + T_2$ – его период (T_2 – продолжительность второй стадии колебания). В условия задачи входят также безразмерные параметры $v \geq 0$ и $b \geq 0$: v зависит от режима течения и свойств трубы, b характеризует тип камеры; при отсутствии камеры $b = 0$ [1].

Третья задача сводится к нахождению в области $0 < z < 1$ периодического решения уравнения теплопроводности

$$2\nu \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \left(\nu > \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5)$$

без начальных условий с граничными условиями (1.2), где $Q[U(1, \tau), \tau]$ снова определяется либо формулами (1.3), либо (1.4).

Таким образом, в безразмерных переменных сформулированы три задачи, решение каждой из которых зависит от переменных z, τ и от безразмерных параметров b, ν, Q_1, Q_2, T_1, T , если выполнено условие (1.3), и $b, \nu, Q_1, Q_2, U_*, U_{**}$, если имеет место (1.4).

Второе из условий (1.2) (у агрегата при $z = 1$) получено из баланса расхода жидкости, втекающей и вытекающей из камеры [2]. Ясно, что если $b = 0$, то соотношение (1.4) не имеет смысла. Как будет показано ниже, для первой задачи всегда выполнено равенство $U_* = U_{**}$, вследствие чего (1.4) не имеет смысла также и для этой задачи. Следовательно, условие (1.4) может иметь место только для второй и третьей задач при наличии камеры ($\nu > 0, b > 0$).

После этих замечаний остановимся сперва на решении трех задач с периодическим условием (1.2), (1.3).

Выпишем решение второй задачи, т.е. задачи (1.1)–(1.3)

$$U(z, \tau) = \begin{cases} U_1(z, \tau) & (0 \leq \tau \leq T_1) \\ U_2(z, \tau) & (T_1 \leq \tau \leq T) \end{cases}$$

$$U_1(z, \tau) = Q_1 + \exp(-\nu\tau) \sum (C_{1k} \cos \omega_k \tau + C_{2k} \sin \omega_k \tau) \cos \mu_k z, \quad (1.6)$$

$$U_2(z, \tau) = Q_2 + \exp[-\nu(\tau - T_1)] \sum [D_{1k} \cos \omega_k (\tau - T_1) + D_{2k} \sin \omega_k (\tau - T_1)] \cos \mu_k z$$

Здесь и далее ведется суммирование по k от 1 до ∞ , μ_k ($k = 1, 2, \dots$) – последовательные положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = b\mu \quad (1.7)$$

$\omega_k = \sqrt{\mu_k^2 - \nu^2}$ (если $\mu_k < \nu$, то в (1.6) $\cos \omega_k x$ и $\sin \omega_k x$ нужно заменить соответственно на $\operatorname{ch} \sigma_k x$ и $\operatorname{sh} \sigma_k x$, где $\sigma_k = \sqrt{\nu^2 - \mu_k^2}$; если $\mu_k = \nu$, то соответствующие члены сумм в (1.6) заменяются на $C_{1k} + C_{2k}\tau$ и $D_{1k} + D_{2k}(\tau - T_1)$).

В предположении, что $\nu < \mu_1$, постоянные C_{ik}, D_{ik} ($k = 1, 2, \dots$) определяются формулами:

$$C_{jk} = \frac{a_k}{\Delta_k(T)} \{-\xi_{jk} + \alpha_{jk}^+(T_2) \exp(-\nu T_2) +$$

$$+ \alpha_{jk}^-(T) \exp(-\nu T) - \alpha_{jk}^-(T_1) \exp[-\nu(T + T_2)]\} \quad (j = 1, 2)$$

$$D_{1k} = a_k + \exp(-\nu T_1) (C_{1k} \cos \omega_k T_1 + C_{2k} \sin \omega_k T_1)$$

$$D_{2k} = (\nu / \omega_k) a_k + \exp(-\nu T_1) (-C_{1k} \sin \omega_k T_1 + C_{2k} \cos \omega_k T_1),$$

$$a_k = (Q_1 - Q_2) b_k. \quad (1.8)$$

$$b_k = 2 \sin \mu_k / \mu_k \quad (b = 0)$$

$$b_k = 2 \cos \mu_k / [b \mu_k^2 (1 + \sin 2\mu_k / 2\mu_k)] \quad (b > 0)$$

$$\Delta_k(x) = 1 - 2 \exp(-vx) \cos \omega_k x + \exp(-2vx)$$

$$\xi_{1k} = 1, \quad \xi_{2k} = v / \omega_k$$

$$\alpha_{1k}^{\pm}(x) = \cos \omega_k x \pm (v / \omega_k) \sin \omega_k x$$

$$\alpha_{2k}^{\pm}(x) = \mp \sin \omega_k x + (v / \omega_k) \cos \omega_k x$$

Коэффициенты C_{jk}, D_{jk} ($j = 1, 2$) для первой задачи получаются из (1.8) предельным переходом при $v \rightarrow 0$ и выписаны в [1].

Решение третьей задачи, т.е. задачи (1.5), (1.2), (1.3), имеет вид

$$\begin{aligned} U_1(z, \tau) &= Q_1 - \sum a_k \left(\frac{1 - \kappa_k}{1 - \rho_k \kappa_k} \right) \exp(-\lambda_k^2 \tau) \cos \mu_k z \\ U_2(z, \tau) &= Q_2 + \sum a_k \left(\frac{1 - \rho_k}{1 - \rho_k \kappa_k} \right) \exp[-\lambda_k^2 (\tau - T_1)] \cos \mu_k z \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$(\lambda_k = \mu_k / \sqrt{2v}, \quad \rho_k = \exp(-\lambda_k^2 T_1), \quad \chi_k = \exp(-\lambda_k^2 T_2))$$

Здесь использованы также обозначения (1.6)–(1.8).

Из (1.6)–(1.9) ясно, что ряды, входящие в формулы (1.6) и (1.9), – сходящиеся, если только период T (для первой задачи) таков, что нет резонанса, т.е. $T \neq 2\pi m / \mu_s$ ($m, s = 1, 2, \dots$) [1].

Таким образом, упомянутые выше три задачи в этом предположении всегда имеют решение, что естественно в силу их линейности.

Обратимся теперь к решению второй и третьей задач с граничным условием релейного типа, т.е. задач (1.1), (1.2), (1.4) и (1.5), (1.2), (1.4), где $v > 0, b > 0$.

Можно видеть, что решение этих задач описывается теми же формулами (1.6)–(1.9), где T_1 и $T_2 = T - T_1$ заранее не известны, а определяются как наименьшие корни уравнений [1]

$$U_1(1, T_1) = U_*, \quad U_2(1, T_1 + T_2) = U_{**} \quad (1.10)$$

Введем теперь функции $\Phi(T_1, T_2, v, b)$ и $\Psi(T_1, T_2, v, b)$ согласно формулам

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q_1 - U_1(1, T_1)}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_1 - U_*}{Q_1 - Q_2} \\ \Psi &= \frac{U_2(1, T_1 + T_2) - Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{U_{**} - Q_2}{Q_1 - Q_2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Пользуясь (1.6), (1.9) и (1.11), выпишем выражения функции Φ для второй и третьей задач соответственно

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp(-vT_1) \sum \frac{B_k}{\Delta_k} \{ \alpha_{1k}^+(T_1) - \exp(-vT_2) \alpha_{1k}^+(T) - \\ &- \exp(-vT) \alpha_{1k}^-(T_2) + \exp[-v(T + T_2)] \} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$(B_k = b_k \cos \mu_k)$$

$$\Phi = \sum \frac{B_k \rho_k (1 - \chi_k)}{1 - \rho_k \chi_k} \quad (1.13)$$

Рассмотрим одновременно формулы (1.12) и (1.13).

Выписывая аналогичные формулы для $\Psi(T_1, T_2, v, b)$, можно убедиться, что

$$\Psi(T_1, T_2, v, b) = \Phi(T_2, T_1, v, b) \quad (1.14)$$

Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением функции Φ в области $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$.

В точке $T_1 = T_2 = 0$ функция $\Phi(T_1, T_2)$ не определена и не является в ней непрерывной. При этом

$$\lim_{T_1 \rightarrow 0, T_2 \rightarrow 0} \Phi(T_1, T_2) = \frac{T_2}{T_1 + T_2} \quad (1.15)$$

Далее, ясно, что $\Phi(0, T_2) = 1$, $\Phi(T_1, 0) = 0$.

Вводя обозначение

$$h(T_1) = \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \Phi(T_1, T_2)$$

получим для третьей и второй задач соответственно зависимости

$$h(T_1) = \sum B_k \rho_k \quad (1.16)$$

$$h(T_1) = \exp(-\nu T_1) g(T_1), \quad g(T_1) = \sum B_k \alpha_{1k}^+(T_1) \quad (1.17)$$

Из (1.16) и (1.17) следует, что $h(0) = 1$, $\lim_{T_1 \rightarrow \infty} h(T_1) = 0$.

Обратимся к третьей задаче. Из (1.16) вытекает, что при всех $T_1 > 0$ выполнены неравенства $0 < h(T_1) < 1$, $h'(T_1) < 0$. Из (1.13) ясно, что для каждого значения $0 < C < 1$ такого, что $\Phi(T_1, T_2) = C$, $T_2'(T_1) \geq 0$ и при $T_2 \rightarrow \infty$ каждая из кривых $h(T_1)$ имеет вертикальную асимптоту $T_1 = h^{-1}(C)$.

На фиг. 1 представлен общий вид семейств кривых $\Phi(T_1, T_2) = C$ (сплошные линии) и $\Psi(T_1, T_2) = C$ (штриховые линии) для некоторых значений параметра C . Точки пересечения этих кривых T_1, T_2 соответствуют искомым корням уравнений (1.10), причем единственным. Можно убедиться в выполнении при $T_1 > 0, T_2 > 0$ неравенств $0 < \Phi < 1$, $0 < \Psi < 1$, $0 < \Phi + \Psi < 1$. Отсюда следует эквивалентность решений третьей задачи с периодическим условием (1.3) и с условием релейного типа (1.4). Кроме того, можно видеть, что в этом случае периодическое решение существует только при

$$Q_2 < U_{**} < U_* < Q_1 \quad (1.18)$$

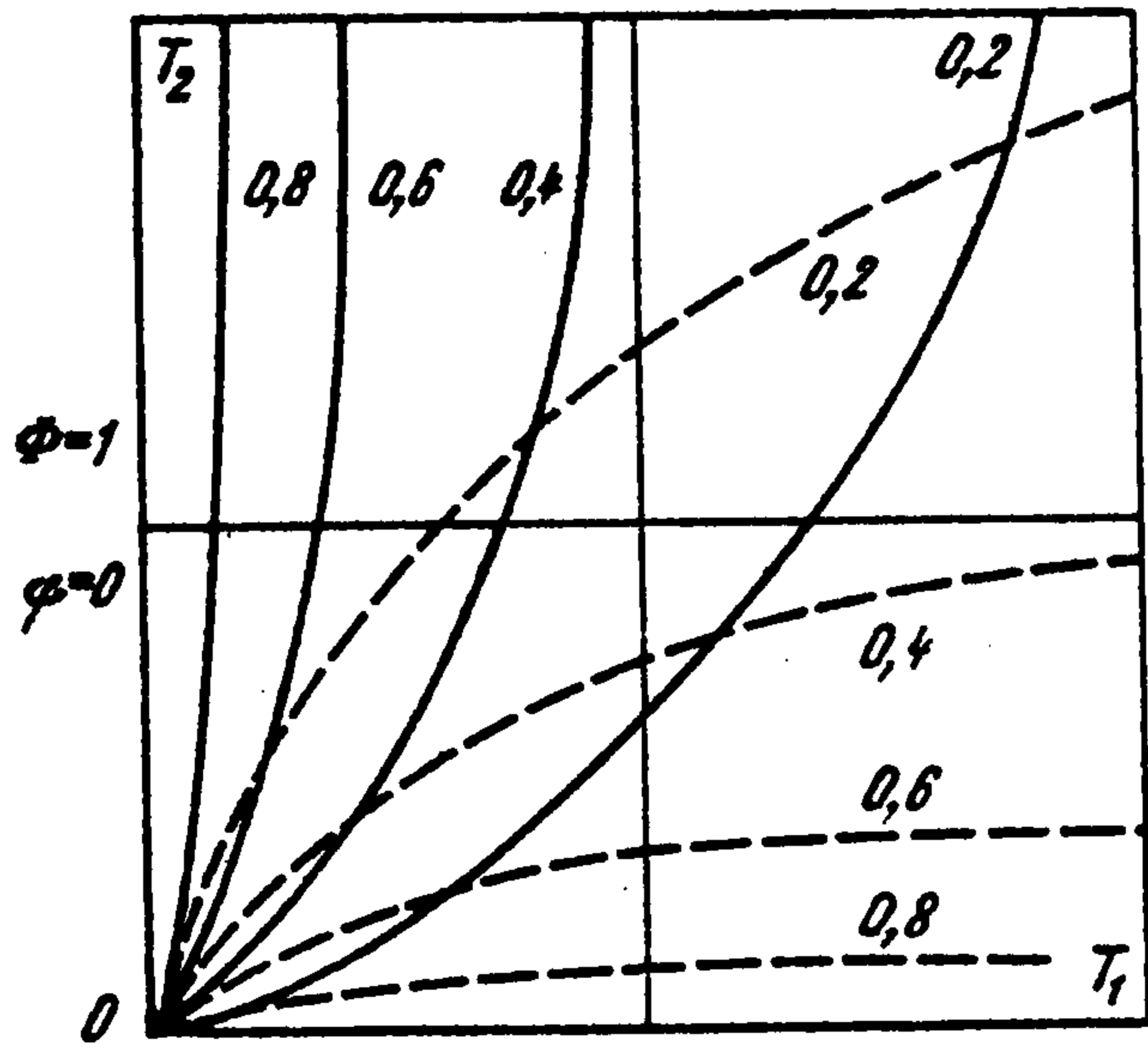
Рассмотрим решение второй задачи. Ясно, что вблизи начала координат и вблизи осей координат поведение кривых Φ и Ψ в плоскости (T_1, T_2) совершенно аналогично показанному на фиг. 1. В частности, как и для третьей задачи, если $\Phi + \Psi = 1$ ($U_{**} = U_*$) или $\Phi + \Psi > 1$ ($U_{**} > U_*$), что противоречит принятому условию $U_* > U_{**}$, то соответствующие кривые $\Phi = C_1$ и $\Psi = C_2$ пересекаются только в точке $T_1 = T_2 = 0$.

Если для всех $T_1 > 0$ будет $h'(T_1) < 0$, где величина $h(T_1)$ дана формулой (1.17), то поведение кривых Φ и Ψ не отличается от представленного на фиг. 1, и можно снова сделать полученные выше выводы.

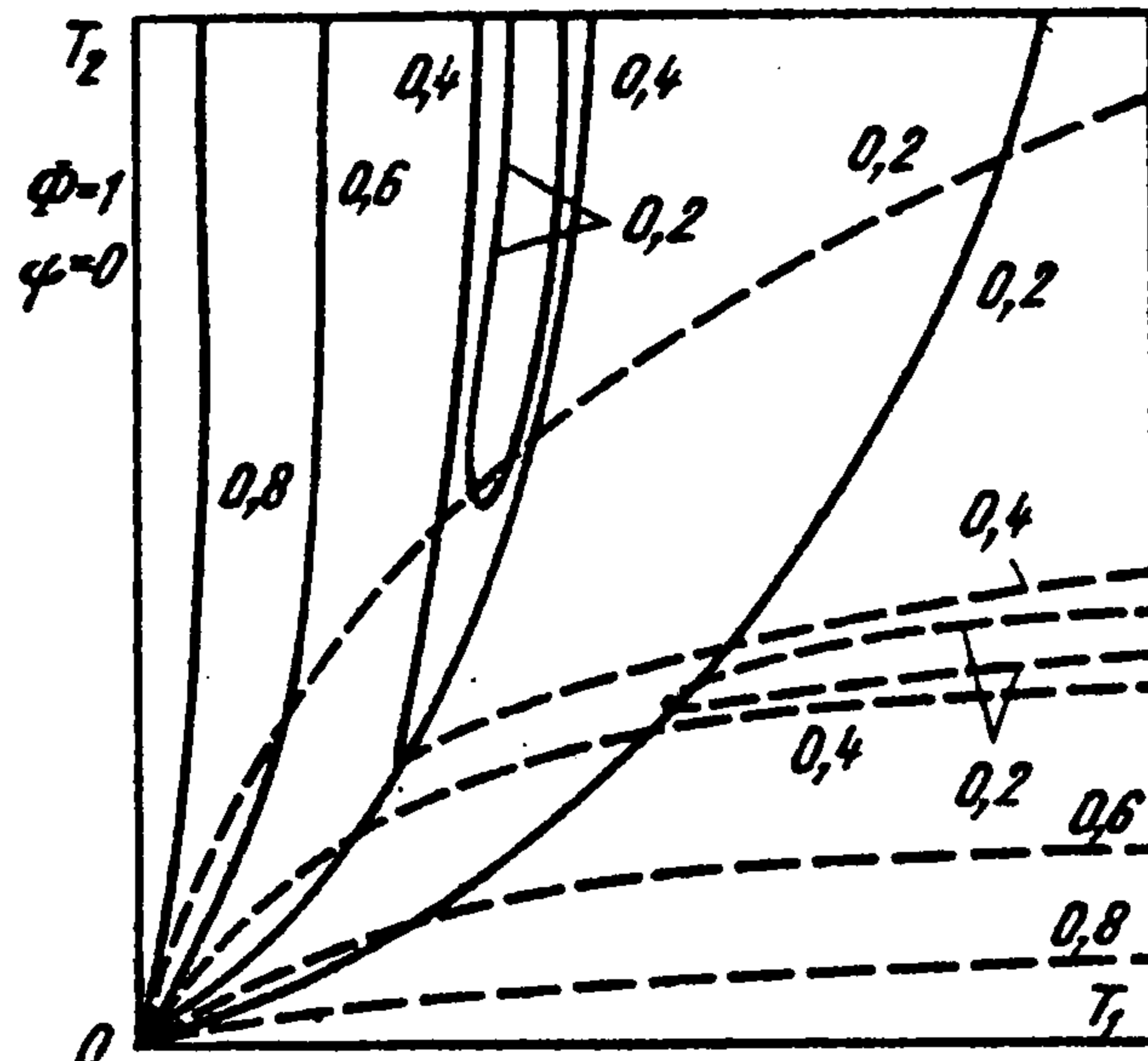
Пусть имеется участок (участки) значений T_1 , для которых $h'(T_1) > 0$. Примерный вид кривых $\Phi = C$ и $\Psi = C$ и их точки пересечения представлены на фиг. 2; в этом случае нарушено взаимно-однозначное соответствие между парами (Φ, Ψ) (а следовательно, и (U_*, U_{**})) и (T_1, T_2) . Так например, при $\Phi = 0,4$, $\Psi = 0,2$ на нашем рисунке имеем две точки пересечения, и при решении задачи с условием релейного типа (1.4) нужно взять точку с наименьшими значениями T_1 и T_2 .

Таким образом, если Φ и Ψ при $T_1 > 0, T_2 > 0$ — однозначные функции T_1 и T_2 , то T_1 и T_2 в случае, когда имеются интервалы значений T_1 , для которых $h'(T_1) > 0$ — неоднозначные функции Φ и Ψ .

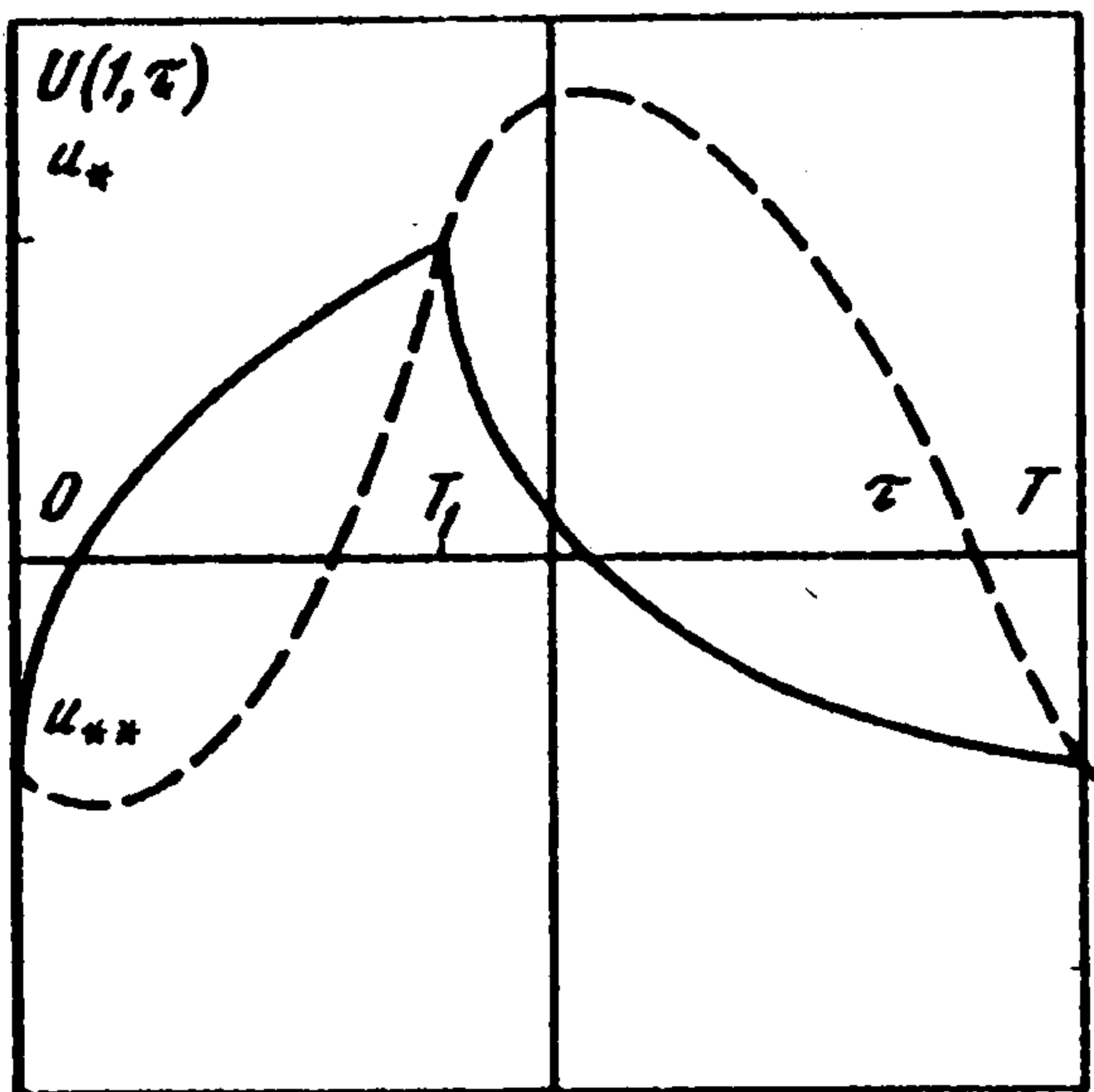
Если имеются также интервалы значений T_1 , для которых $h(T_1) < 0$, то неравенства (1.18) не удовлетворяются.



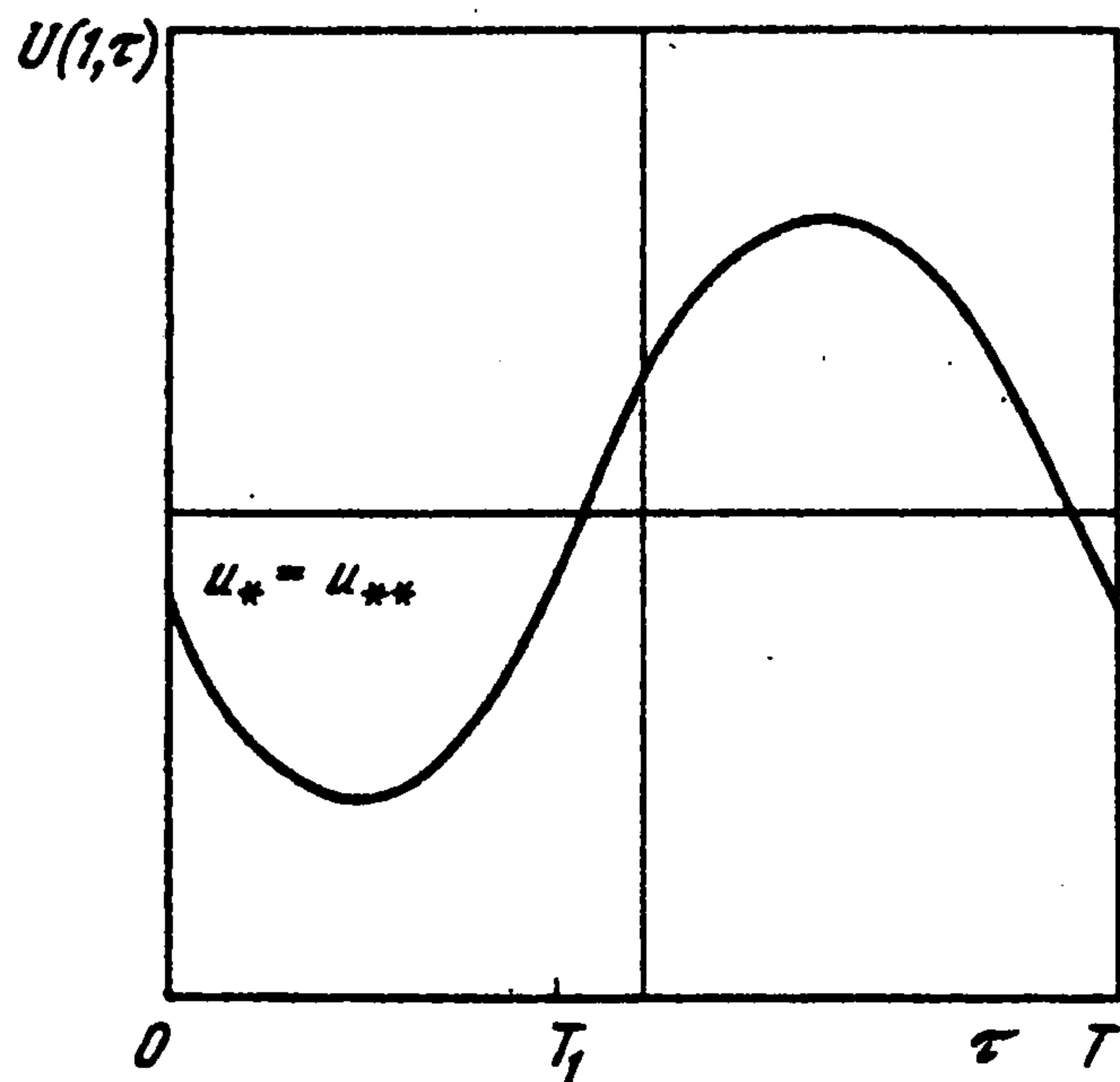
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Приведем два примера, относящихся ко второй задаче.

Пусть параметр b велик. Тогда из (1.17) следует, что $\mu_1^2 \approx 1/b - 1/3b^2$, $\mu_k \approx \pi(k-1)$ ($k = 2, 3, \dots$). Формула (1.17) в силу (1.8) и (1.12) дает

$$g(T_1) = \left(1 - \frac{1}{3b}\right) \alpha_{11}^+(T_1) + \frac{2}{\pi^2 b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1,m+1}^+(T_1)}{m^2} \quad (2.1)$$

1°. Пусть $\nu \ll \mu_1$, тогда $\omega_1 \approx \mu_1$, и из (2.1) найдем

$$g(T_1) \approx \left(1 - \frac{1}{3b}\right) \cos \frac{T_1}{\sqrt{b}} + \frac{y(T_1)}{b}, \quad y(T_1) = T_1^2 - 2T_1 + \frac{2}{3} \quad (0 \leq T_1 \leq 2) \quad (2.2)$$

($y(T_1)$ – периодическая функция с периодом 2). Ясно, что имеются интервалы T_1 , для которых $g'(T_1) > 0$, $g(T_1) < 0$, и кривые $\Phi = \text{const}$ и $\Psi = \text{const}$ располагаются примерно так, как показано на фиг. 2.

2°. Пусть $\nu = \mu_1$. В этом случае, как отмечалось выше, в формуле (1.6) первый член ряда заменяется членом $C_{11} + C_{21}\tau$, причем

$$C_{11} = \frac{a_1}{\Delta_1} \{-1 + (1 + \nu T_2) \exp(-\nu T_2) + (1 - \nu T) \exp(-\nu T) - (1 - \nu T_1) \exp[-\nu(T + T_2)]\},$$

$$C_{21} = \frac{a_1 \nu}{\Delta_1} [-1 + \exp(-\nu T_2) + \exp(-\nu T) - \exp[-\nu(T + T_2)]] \quad (\Delta_1 = [1 - \exp(-\nu T)]^2) \quad (2.3)$$

Предполагая снова параметр b большим, из (1.17) и (2.3) получим $y_1(T_1)$ – периодическая функция с периодом 2)

$$g(T_1) \approx \left(1 - \frac{1}{3b}\right) \left(1 + \frac{T_1}{\sqrt{b}}\right) + \frac{1}{2b} \left[y(T_1) + \frac{1}{\sqrt{b}} y_1(T_1) \right]$$

$$(y_1(T_1) = T_1(T_1^2 / 3 - T_1 + 2/3) \quad (0 \leq T_1 \leq 2))$$

В этом случае всегда $g(T_1) > 0$, $h'(T_1) < 0$, и картина распределения кривых $\Phi = \text{const}$ и $\Psi = \text{const}$ в плоскости (T_1, T_2) аналогична картине для третьей задачи (фиг. 1).

Вернемся теперь к периодическому условию (1.2), (1.3). Из фиг. 2 видно, что для второй задачи параметры T_1 и T_2 можно задать и так, что они будут корнями уравнений (1.10), но не наименьшими.

Переходя в формуле (1.12) к пределу при $\nu \rightarrow 0$, убедимся в том, что для первой задачи всегда выполнено равенство $\Phi + \Psi = 1$, откуда следует, что $U_{**} = U_*$, и условие релейного типа (1.4) не имеет смысла.

В заключение покажем на основании изложенного, каков вид колебаний для каждой из трех задач.

На фиг. 3 и 4 представлен примерный вид периодической функции $U(1, \tau)$ – средней скорости у агрегата – для каждой из трех задач; на фиг. 3 сплошная линия – решение уравнения теплопроводности (1.9), штриховая – решение телеграфного уравнения (1.6)–(1.8). На фиг. 4 изображена кривая $U(1, \tau)$ для волнового уравнения (1.6)–(1.8) ($\nu = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина Н.Н. О движении вязкой жидкости в трубе конечной длины. ПММ, 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 335–342.
2. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1992