разработан [8] метод построения асимптотики подобных уравнений при малых α. Наличие решений при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$ позволяет применить в дальнейшем аппарат двухточечных аппроксимант Паде [9] и получать единое решение для любых α.

Автор благодарит В.Н. Пилипчука за обсуждения и рецензента статьи за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилипчук В.Н.* К расчету сильно нелинейных систем, близких к виброударным // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 744–751.
2. *Пилипчук В.Н.* Построение периодических решений в сильно нелинейных системах // Докл. АН УССР. 1986. Сер. А. № 1. С. 28–31.
3. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: 1989. 216 с.
4. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
5. Pade and rational approximation / Ed. by E.B. Saff. New York: Acad. press, 1977. 491 p.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Наука, 1958. 439 с.
7. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
8. *Bender C.M., Milton K.A., Pinsky S.S., Simmons L.M.Jr.* A new perturbative approach to nonlinear problem // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 7. P. 1447–1455.
9. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 2.II.1993

УДК 531.36:534.1

© 1993 г. Г.А. Леонов

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Получены условия существования не менее двух циклов в двумерной динамической системе с одной скалярной нелинейностью. Проведено сравнение с результатами М.В. Келдыша [1, 2].

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^{\cdot\cdot} + \varphi(x^{\cdot}) + x = 0 \tag{1}$$

где $\varphi(\sigma)$ – нечетная, дифференцируемая при $\sigma \neq 0$ функция, имеющая при $\sigma = 0$ разрыв первого рода. Решение уравнения (1) будем понимать в смысле А.Ф. Филиппова [3]. Всюду в дальнейшем в качестве фазового пространства уравнения (1) рассматриваем фазовое пространство системы $x^{\cdot} = y$, $y^{\cdot} = -\varphi(y) - x$.

Уравнение (1) и его различные обобщения изучались многими авторами [4, 5]. Была показана [1, 2] роль уравнения (1) в задаче устранения флаттера органов управления самолета с помощью гидравлических демпферов.

Будем полагать, что нижний предел при $\sigma \to \infty$ функции $\varphi(\sigma)/\sigma$ больше некоторого положительного числа и для положительных чисел α, β, γ выполнены неравенства $\beta < 2$ и

$$-\alpha\sigma + \varphi(+0) \leqslant \varphi(\sigma) \leqslant -\beta\sigma + \varphi(+0), \quad \forall \sigma \in [0, \gamma] \tag{2}$$

Введем обозначение $\xi = \pi\beta / \sqrt{4 - \beta^2}$.

Теорема. Пусть

$$2\varphi(+0)e^{\xi}/(e^{\xi}-1)<\gamma \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) имеет не менее двух циклов.

Доказательство. Из условия поведения функции $\varphi(\sigma)$ на бесконечности следует существование положительных чисел λ и ν, для которых выполнено неравенство

$$\varphi(\sigma)\geqslant\lambda\sigma-\nu,\quad\forall\sigma\in[0,+\infty) \tag{4}$$

Используя принцип сравнения Камке–Чаплыгина [6, 7] видно, что циклы уравнений

$$z^{\cdot\cdot}+\lambda z^{\cdot}-\nu\,\mathrm{sign}z^{\cdot}+z=0 \tag{5}$$

$$z^{\cdot\cdot}-\alpha z^{\cdot}+\varphi(+0)\mathrm{sign}z^{\cdot}+z=0 \tag{6}$$

$$z^{\cdot\cdot}-\beta z^{\cdot}+\varphi(+0)\mathrm{sign}z^{\cdot}+z=0 \tag{7}$$

являются бесконтактными для траекторий уравнения (1). Это следует из неравенств (2) и (4) и того факта, что в силу условия (3) цикл (7) расположен в полосе $|z^{*}|\leqslant\gamma$.

Таким образом, кольцо K_1, границами которого являются циклы уравнений (5) и (7), положительно инвариантно для траекторий уравнения (1), а кольцо K_2, границами которого являются циклы уравнений (6) и (7), отрицательно инвариантно для траекторий уравнения (1). Далее, применяя известный принцип кольца [8], завершаем доказательство теоремы.

М.В. Келдыш рассматривал уравнение (1) в случае $\varphi(\sigma)=-\mu\sigma+(\Phi+\kappa\sigma^2)\mathrm{sign}\sigma$.

В этом случае неравенство (3) примет вид

$$2\Phi e^{\xi}/(e^{\xi}-1)<(\mu-\beta)/\kappa \tag{8}$$

При $\beta<<1$, полагая $\beta=\mu/2$, при малых μ условие (3) теоремы запишем в виде $\mu>4\sqrt{\Phi\kappa/\pi}$. Эта оценка близка к оценке $\mu>(8/\pi)\sqrt{2\Phi\kappa/3}$, полученной [1, 2] приближенным методом гармонического баланса.

Отметим, что развитый в последнее время аппарат систем сравнения для многомерных динамических систем [8, 9] позволяет сделать некоторые многомерные обобщения приведенной здесь теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М.В.* О демпферах с нелинейной характеристикой // Труды ЦАГИ. 1944. № 557. С. 26–37.
2. *Келдыш М.В.* Механика. Избранные труды. М.: Наука, 1985. 567 с.
3. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. *Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 318 с.
5. *Черкас Л.А.* Методы оценки числа предельных циклов автономных систем // Дифференц. ур-ния 1977. Т. 12. № 5. С. 779–802.
6. *Kamke E.* Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II. Acta Mat. Bd. 58. 1932. S. 57–85.
7. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 103 с.
8. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбУ, 1992. 366 с.
9. *Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B.* Non-local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. Teubner-texte zur Math. 1992. Bd. 132. 242 s.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
20.I.1993