ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 5, 1993

УДК 531.36

© 1993 г. И.В. Андрианов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ БОЛЬШИХ СТЕПЕНЯХ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Предлагается метод рекуррентного построения периодического решения существенно нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы, близкой к виброударной. Предполагается, что возвращающая сила – степенная функция отклонения. Малым параметром считается величина, обратная этой степени. Метод основан на асимптотическом представлении (в некотором слабом смысле) этой нелинейности по степеням малого параметра при помощи процедур нормировки и преобразования Лапласа. Такой подход приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим обобщенные дельта-функции от неизвестной переменной и их сколько угодно высокие производные.

Построение последовательной асимптотической процедуры, основанной на разложении по степеням n^{-1}, где n – степень нелинейности, в какой-то степени решает вопрос обоснования П-метода [1–3]. При этом результаты, основанные на П-методе, получаются в качестве нулевого приближения, так же, например, как результаты, основанные на методе Ван дер Поля, служат нулевым приближением в процедуре осреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x^{\cdot\cdot}+x^n=0,\quad n=2k+1,\quad k=1,2,\dots$$

для которого будем искать однопараметрическое семейство периодических решений, кососимметричных относительно начала координат, в пределе $n\to\infty$.

Введем функцию $\xi=x/A$ (A – амплитуда), для которой верно неравенство $0\leqslant|\xi|\leqslant\leqslant 1$. Отметим, что функция ξ непрерывна и периодична.

Тогда исходное уравнение может быть представлено так:

$$\xi^{\cdot\cdot}+A^{n-1}\xi^n=0 \tag{1}$$

Разложим функцию ξ^n в ряд по $1/n$ при $n\to\infty$. Для этого сначала преобразуем функцию

$$\varphi=\begin{cases}\xi^n, & 0\leqslant\xi\leqslant 1\\ 0, & \xi>1\end{cases}$$

по Лапласу: $\varphi(\xi)\to p^{-n-1}\gamma(n+1,p)$.

Раскладывая неполную гамма-функцию $\gamma(n+1,p)$ в ряд по $1/n$ и переходя почленно к оригиналам (законность подобной процедуры обоснована, например, в [4, 5]), получаем

$$\varphi=\delta(\xi-1)(n+1)^{-1}-\delta(\xi-1)(n+1)^{-1}(n+2)^{-1}+\dots \tag{2}$$

где $\delta(\dots)$ – дельта-функция.

Выполним в уравнении (1) замену переменной: $t=\tau/\omega$.

Удерживая во втором слагаемом лишь главный член и полагая

$$\omega^2=A^{n-1}/(n+1) \tag{3}$$

(поскольку $0 \leqslant |\xi| \leqslant 1$), имеем уравнение

$$d^2\xi_0/d\tau^2 = -\delta(\xi_0 - 1) \tag{4}$$

для определения периодической функции ξ_0.

Остановимся на математическом смысле уравнения (4). В его правой части стоит обобщенная функция, сосредоточенная на линии $\xi_0 = 1$. Это обычный объект в теории обобщенных функций [6], поэтому здесь не возникают трудности имеющие место в задачах с ударными взаимодействиями [7].

Интегрирование уравнения (4) при учете кососимметричности относительно начала координат дает в исходных переменных,

$$x_0 = A\omega t \tag{5}$$

Выражение (3), которое можно трактовать как амплитудно-частотную зависимость, и решение на четверти периода (5) совпадают с полученными П-методом [1–3].

Перейдем к построению следующих приближений.

Для этого сначала представим ξ в виде ряда

$$\xi = \xi_0 + \xi_1(n+2)^{-1} + \ldots \tag{6}$$

Подставляя ряд (6) в выражение (2) и раскладывая последнее по $(n+2)^{-1}$, имеем

$$\begin{gathered} \delta[\xi_0 + \xi_1(n+2)^{-1} + \ldots - 1] = \delta(\xi_0 - 1) + \xi_1(n+2)^{-1}\delta'(\xi_0 - 1) + \ldots \\ \delta'[\xi_0 + \xi_1(n+2)^{-1} + \ldots - 1] = \delta'(\xi_0 - 1) + \xi_1(n+2)^{-1}\delta''(\xi_0 - 1) + \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Формулы (7) получаются после перехода в пространство изображений, разложения правых частей соответствующих выражений в ряды по $(n+2)^{-1}$ и последующего перехода к оригиналам. Кроме того, введем разложение ω по степеням $(n+2)^{-1}$

$$\omega = [(A^{n-1}/(n+1))]^{1/2}[1 + \omega_1(n+2)^{-1} + \ldots] \tag{8}$$

После подстановки соотношений (6), (8) в уравнение (1), замены $t = \tau/\omega$ и расщепления по $(n+2)^{-1}$ получаем

$$d^2\xi_1/d\tau^2 = -[1 - \xi_1]\delta'(\xi_0 - 1) + 2\omega_1\delta(\xi_0 - 1) \tag{9}$$

Наличие в правой части уравнения (9) производной от δ-функции приводит к повышению особенности решения. Для устранения ее полагаем

$$\xi_1(1) = 1 \tag{10}$$

Тогда

$$d^2\xi_1/d\tau^2 = 2\omega_1\delta(\xi_0 - 1) \tag{11}$$

Решение для ξ_1 можно представить в виде $\xi_1 = \tau$, тогда из граничного условия (10) находим $\omega_1 = -1/2$.

Аналогично строятся высшие приближения, хотя, разумеется, это довольно громоздкий процесс.

Отметим, что при последовательном асимптотическом интегрировании нарушается гладкость решения при $\tau = 1$. Для устранения этого недостатка можно отказаться от сохранения асимптотичности, учтя члены высшего порядка малости. Тогда уравнение (11) примет вид

$$d^2\xi_1/d\tau^2 = 2\omega_1\xi_0^n \tag{12}$$

Решение уравнения (12) при граничном условии (10) совпадает с первым приближением предложенной ранее итерационной процедуры [1–3].

Выше изложена формальная асимптотическая процедура, вопросы сходимости, оценок точности и т.д. не рассматривались.

Предложенный подход является естественным асимптотическим методом решения дифференциальных уравнений, содержащих члены вида $x^{1+\alpha}$, при $\alpha \to \infty$. Ранее был разработан [8] метод построения асимптотики подобных уравнений при малых α. Наличие решений при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$ позволяет применить в дальнейшем аппарат двухточечных аппроксимант Паде [9] и получать единое решение для любых α.

Автор благодарит В.Н. Пилипчука за обсуждения и рецензента статьи за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилипчук В.Н.* К расчету сильно нелинейных систем, близких к виброударным // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 744–751.
2. *Пилипчук В.Н.* Построение периодических решений в сильно нелинейных системах // Докл. АН УССР. 1986. Сер. А. № 1. С. 28–31.
3. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: 1989. 216 с.
4. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
5. Pade and rational approximation / Ed. by E.B. Saff. New York: Acad. press, 1977. 491 p.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Наука, 1958. 439 с.
7. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
8. *Bender C.M., Milton K.A., Pinsky S.S., Simmons L.M.Jr.* A new perturbative approach to nonlinear problem // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 7. P. 1447–1455.
9. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
2.II.1993

УДК 531.36:534.1

© 1993 г. Г.А. Леонов

КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Получены условия существования не менее двух циклов в двумерной динамической системе с одной скалярной нелинейностью. Проведено сравнение с результатами М.В. Келдыша [1, 2].

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^{\cdot\cdot} + \varphi(x^{\cdot}) + x = 0 \qquad (1)$$

где $\varphi(\sigma)$ – нечетная, дифференцируемая при $\sigma \neq 0$ функция, имеющая при $\sigma = 0$ разрыв первого рода. Решение уравнения (1) будем понимать в смысле А.Ф. Филиппова [3]. Всюду в дальнейшем в качестве фазового пространства уравнения (1) рассматриваем фазовое пространство системы $x^{\cdot} = y$, $y^{\cdot} = -\varphi(y) - x$.

Уравнение (1) и его различные обобщения изучались многими авторами [4, 5]. Была показана [1, 2] роль уравнения (1) в задаче устранения флаттера органов управления самолета с помощью гидравлических демпферов.

Будем полагать, что нижний предел при $\sigma \to \infty$ функции $\varphi(\sigma)/\sigma$ больше некоторого положительного числа и для положительных чисел α, β, γ выполнены неравенства $\beta < 2$ и

$$-\alpha\sigma + \varphi(+0) \leqslant \varphi(\sigma) \leqslant -\beta\sigma + \varphi(+0), \quad \forall\sigma \in [0, \gamma] \qquad (2)$$

Введем обозначение $\xi = \pi\beta / \sqrt{4-\beta^2}$.