ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 5, 1993

УДК 539.374+532.59

© 1993 г. О.Ю. Динариев, В.Н. Николаевский

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ МИКРОВРАЩЕНИЙ

В рамках модели Коссера, в которой внутренняя энергия зависит линейно от градиентов микровращений и нелинейно от самих микровращений, исследуется распространение малых изотермических возбуждений. Показано, что, при стационарном течении среды возможен нестационарный режим для микровращения. Этот эффект интерпретируется как акустическая эмиссия среды.

1. Пусть в некоторой системе отсчета t время, x_i – декартовы координаты. Латинские индексы будут соответствовать координатам и пробегать значения 1–3.

Состояние вязкой среды с микроструктурой описывается полями плотности $\rho = \rho(t, x_i)$, скорости течения $\upsilon_j = \upsilon_j(t,x_i)$, углами микроповоротов вокруг координатных осей $\varphi_j = \varphi_j(t,x_i)$ и температуры $T = T(t,x_i)$. Эти поля удовлетворяют динамическим уравнениям [1] неразрывности, импульса, момента импульса и энергии, соответственно:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\upsilon_{i,i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{d\upsilon_i}{dt} = \sigma_{ij,j} + f_i \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varepsilon_{ijk}x_j\rho\upsilon_k + J\frac{d\varphi_i}{dt}\right] + \left[\varepsilon_{ijk}x_j\rho\upsilon_k + J\frac{d\varphi_i}{dt}\right]\upsilon_{l,l} = \tag{1.3}$$

$$= \left[\varepsilon_{ikl}x_k\sigma_{lj} + \pi_{ij}\right]_{,j} + \varepsilon_{ijk}x_jf_k + m_i + M_i$$

$$\frac{d}{dt}[K+U] + [K+U]\upsilon_{i,i} = \tag{1.4}$$

$$= [\upsilon_i\sigma_{ij}]_{,j} + \left[\frac{d\varphi_i}{dt}\pi_{ij}\right]_{,j} + f_i\upsilon_i + m_i\frac{d\varphi_i}{dt} - q_{i,i} + \varepsilon$$

$$K = \frac{1}{2}\rho\upsilon_i\upsilon_i + \frac{1}{2}J\frac{d\varphi_i}{dt}\frac{d\varphi_i}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Здесь σ_{ij} – тензор напряжений, π_{ij} – тензор моментных напряжений, f_i – внешние силы, m_i – момент внешних сил, M_i – момент внутренних сил, J – плотность момента инерции, которую будем считать постоянной, K – плотность кинетической энергии, U – плотность внутренней энергии, q_i – поток тепла, ε –

тепловыделение в единице объема. Будем использовать также неравенство Клазиуса–Дюгема

$$\rho\frac{ds}{dt}-T^{-1}\varepsilon+\left(q_iT^{-1}\right)_{,i}\geqslant 0 \qquad (1.5)$$

Предположим, что внутренняя энергия U зависит от параметров ρ, T, φ_i^0, $\psi_{ij}=\varphi_{i,j}$ где $\varphi_i^0=\varphi_i-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}u_{k,j}$, $\frac{d}{dt}u_i=\upsilon_i$. Тогда второй закон термодинамики для частиц среды имеет вид

$$Tds=d(\rho^{-1}\cup)+pd\rho^{-1}+\Phi\rho^{-1}d\varphi_i^0+\Phi_{ij}\rho^{-1}d\psi_{ij} \qquad (1.6)$$

где p – давление, Φ_i, Φ_{ij} – термодинамические силы, связанные с микроструктурой пористой среды.

Определим упругий потенциал следующим образом:

$$W=\rho^{-1}\left(\cup-\cup\Big|_{\varphi_i^0=0,\psi_{ij}=0}\right)$$

Тогда, согласно (1.6), будем иметь

$$\Phi_i=-\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi_i^0}\right)_{\rho,s},\quad \Phi_{ij}=-\left(\frac{\partial W}{\partial\psi_{ij}}\right)_{\rho,s} \qquad (1.7)$$

Состояние среды при $\varphi_i^0=0$ будет энергетически устойчивым, если потенциал W имеет при $\varphi_i^0=0$, $\psi_{ij}=0$ локальный минимум. Если ограничиться квадратным приближением, то

$$W=\frac{1}{2}\varsigma\varphi_i^0\varphi_i^0+\frac{1}{2}\lambda_1(\psi_{ii})^2+\frac{1}{2}\lambda_2\psi_{ij}^s\psi_{ij}^s+\frac{1}{2}\lambda_s\psi_{ij}^a\psi_{ij}^a \qquad (1.8)$$

где $\varsigma>0,\ \lambda_\alpha>0,\ \psi_{ij}^s=\psi_{(ij)}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\psi_{kk},\ \psi_{ij}^a=\psi_{[ij]}$.

Из (1.1)–(1.4), (1.6) несложно вычислить выражение, задающее изменение энтропии:

$$\rho T\frac{ds}{dt}=[\sigma_{ij}+p\delta_{ij}]\upsilon_{i,j}+\left[\pi_{ijh}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{,j}+\Phi_{ij}\frac{d\psi_{ij}}{dt}\right]+ \qquad (1.9)$$

$$+[\Phi_i-M_i]\frac{d\varphi_i}{dt}+\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\frac{d\varphi_i}{dt}+\varepsilon-q_{i,i}$$

Тензор вязких напряжений $\tau_{ij}=\sigma_{ij}+p\delta_{ij}$ состоит из симметричной $\tau_{ij}^s=\tau_{(ij)}$ и антисимметричной части $\tau_{ij}^a=\tau_{[ij]}$.

Будем рассматривать процессы, когда $T=\text{const}$, $\varepsilon=0$.

Тогда из (1.5), (1.9) вытекает неравенство

$$\Sigma dt\geqslant 0 \qquad (1.10)$$

$$\Sigma=\tau_{ij}^s\upsilon_{(i,j)}+\left[\pi_{ij}\left[\frac{d\varphi_i}{dt}\right]_{i,j}+\Phi_{ij}\frac{d\psi_{ij}}{dt}\right]+$$

$$+[\Phi_i - M_i]\frac{d\varphi_i}{dt} + \left[\upsilon_{[j,k]} + \varepsilon_{ijk}\frac{d\varphi_i}{dt}\right]\tau^a_{jk}$$

Неравенство (1.10) выполняется в квадратичном приближении, если имеют место материальные соотношения:

$$\tau^s_{ij} = \eta\delta_{ij}\upsilon_{k,k} + 2\mu\left[\upsilon_{(i,j)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\upsilon_{k,k}\right] \quad (1.11)$$

$$\pi_{ij} = -\Phi_{ij} + \Lambda_1\delta_{ij}\frac{\partial\psi_{kk}}{\partial t} + 2\Lambda_2\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi_{(ij)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\psi_{kk}\right] + 2\Lambda_3\frac{\partial}{\partial t}\psi_{[i,j]} \quad (1.12)$$

$$M_i = \Phi_i - \alpha\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} \quad (1.13)$$

$$\tau^a_{ij} = 2\beta\left[\upsilon_{[i,j]} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\right] \quad (1.14)$$

Здесь η – объемная вязкость, μ – сдвиговая вязкость, Λ_α, α, β – неотрицательные диссипативные коэффициенты. Ограничимся далее случаем, когда $\eta,\ \mu,\ \beta > 0,\ \Lambda_\alpha = 0,\ \alpha = 0$.

2. Исследуем распространение малых изотермических возмущений на однородном фоне $\rho = \rho_0$, $\upsilon_i = 0$, $\varphi_i = 0$, обозначив $c^2 = (\partial p/\partial\rho)_t$, $r = \rho - \rho_0$. Тогда из уравнений (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), (1.11)–(1.14) следует

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \rho_0\upsilon_{i,i} = 0$$

$$\rho_0\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + c^2 r_{,i} - \left(\eta + \frac{1}{3}\mu - \beta\right)\upsilon_{k,ki} - (\mu+\beta)\upsilon_{i,kk} + 2\beta\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{j,k} = 0 \quad (2.1)$$

$$J\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} + 2\beta\left[\varepsilon_{ijk}\upsilon_{j,k} + 2\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right] -$$

$$-\left[\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3\right]\varphi_{k,ki} - \frac{1}{2}[\lambda_2 + \lambda_3]\varphi_{i,kk} + \varsigma\varphi^0_i = 0$$

Систему уравнений (2.1) удобно решать методом преобразования Фурье, когда каждая искомая функция $f = f(t, x_i)$ заменяется на ее трансформанту:

$$f_F(\omega, n_j) = \int e^{-i(\omega t + n_j x_j)} f(t, x_j)\,dt\,dx_1 dx_2 dx_3$$

Система (1.15) переходит в систему линейных уравнений, определитель которой равен

$$\det A = P_1 P_2 P_3^2$$

$$P_1 = i\rho_0\omega^2 - i\rho_0 c^2 n_k n_k + \left(\eta + \frac{4}{3}\mu\right)\omega n_k n_k$$

$$P_2 = -J\omega^2 + 4\beta i\omega + \left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2\right)n_k n_k + \varsigma$$

$$P_3 = (i\rho_0\omega + (\mu+\beta)n_k n_k)\left(-J\omega^2 + 4\beta i\omega + \frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3)n_k n_k + \varsigma\right) -$$

$$-4\beta(\beta + \varsigma(4i\omega)^{-1})i\omega n_k n_k$$

Таким образом, дисперсионная поверхность распадается на три поверхности $P_\alpha = 0$ (a = 1, 2, 3).

Дисперсионное соотношение $P_1 = 0$ соответствует продольным движениям среды, которые отщепляются от вращательных степеней свободы.

Дисперсионное соотношение $P_2 = 0$ соответствует продольно-вращательным волнам, которые отщепляются от трансляционных степеней свободы. Для этих волн при больших частотах имеет место асимптотика

$$n = -\omega\upsilon^{-1} + \gamma i + O(\omega^{-1}) \tag{2.2}$$

$$\upsilon = \left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2\right)^{1/2} J^{-1/2}, \quad \gamma = 2\upsilon\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2\right)^{-1}\beta$$

где n – волновое число, υ – скорость волны, γ – декремент.

Дисперсионное соотношение $P_3 = 0$ соответствует поперечным связанным трансляционно-вращательным движениям. Для волнового числа n имеет место биквадратное уравнение, одно из решений которого при больших частотах также имеет асимптотику (2.2), где

$$\upsilon = 2^{-1/2}(\lambda_2+\lambda_3)^{1/2}J^{-1/2}, \quad \gamma = 4\upsilon(\lambda_2+\lambda_3)^{-1}\beta\mu(\mu+\beta)^{-1}$$

3. Реальные горные породы под нагрузкой генерируют акустические сигналы в широком диапазоне частот. При этом первичный акустический импульс, распространяясь от области генерации к приемнику, эволюционирует и приобретает иную амплитудно-частотную характеристику. Традиционно считается, что механизмы образования первичного акустического импульса связаны либо с дефектами в микрокристаллах, слагающих материал/дислокации, двойникование и проч., либо с трещинообразованием [2]. Однако в рамках нелинейной теории упругости сред с микроструктурой [3] медленные поступательные движения также могут приводить к генерации ультразвука в силу резонанса между низкочастотной и высокочастотной ветвями дисперсионной поверхности. В настоящем разделе показано, что первичный акустический импульс может возникать и при ползучести сред с микроструктурой.

Будем интерпретировать наличие нестационарного (высокочастотного) режима для микровращений при медленных поступательных движениях среды как образование первичного акустического импульса. В соответствии с идеями [3] для описания такого эффекта естественно расмотреть нелинейную теорию среды с микроструктурой. Учтем нелинейность посредством задания более сложного выражения для потенциала W, нежели (1.8), заменив $\varsigma\varphi_i^0\varphi_i^0/2$ некоторой гладкой функцией w, зависящей от микроповоротов φ_i^0.

Исследуем класс поперечных трансляционно-вращательных движений. Положим:

$$\upsilon_i = \delta_{12}\upsilon, \quad \varphi_i = \delta_{13}\varphi, \quad \upsilon = \upsilon(t,x), \quad \varphi = \varphi(t,x), \quad \upsilon = \frac{\partial}{\partial t}u, \quad x = x_1.$$

Тогда из уравнений (1.2), (1.3), (1.8), (1.13)–(1.16) и нового выражения для W следует уравнение

$$J\varphi_{tt} + 4\beta\varphi_t - \Lambda\varphi_{xx} + \frac{\partial w}{\partial\varphi} = F \qquad (3.1)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad F = 2\beta\upsilon_x + \frac{1}{2}\Lambda u_{xxx}$$

Будем трактовать правую часть уравнения (3.1), как источник, или как внешнее поле. Пусть этот источник стационарен, т.е. $F = F(x)$. Тогда уравнение (3.1) имеет единственное стационарное решение $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям при $x \to \pm\infty$. Рассмотрим устойчивость в малом этого решения.

Пусть $\Phi = \varphi - \varphi_0$ – малое возмущение стационарного решения. Уравнение (3.1) приводит к динамическому уравнению для Φ (H – оператор Шредингера):

$$J\Phi_{tt} + 4\beta\Phi_t + H\Phi = 0 \qquad (3.2)$$

$$H = -\Lambda\partial^2/\partial k^2 + V, \quad V = V(x) = (\partial^2 w/\partial x^2)\big|_{\varphi=\varphi_0(x)}$$

Поскольку любую функцию $\Phi = \Phi(t, x)$ можно разложить по собственным функциям оператора Шредингера [4] с некоторыми коэффициентами $C = C(t, \lambda)$ (λ – собственное значение), то достаточно рассмотреть уравнение

$$JC_{tt} + 4\beta C_t + \lambda C = 0$$

следующее из уравнения (3.2). Это уравнение имеет решение

$$C = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t}, \quad \omega_{1,2} = J^{-1}(2\beta i \pm (J\Lambda - 4\beta^2)^{1/2})$$

Заметим, что при $\lambda < 0$ существует экспоненциально растущая мода, и решение $\varphi_0(x)$ неустойчиво. Если же спектр оператора Шредингера H неотрицательный, то решение φ_0 устойчиво.

Рассмотрим более подробно условия, при которых оператор Шредингера H может иметь отрицательные точки спектра. Поскольку оператор $(-\Lambda\partial^2/\partial x^2)$ положительно определен, то наличие отрицательных точек спектра возможно, лишь когда потенциал Y принимает отрицательные значения.

Таким образом, если функция w – выпуклая, то стационарное решение $\varphi_0(x)$ устойчиво. Покажем теперь, что если потенциал w имеет невыпуклые участки, то существуют течения среды, для которых стационарное решение $\varphi_0(x)$ неустойчиво. В последнем случае при начальных условиях общего вида будет реализоваться нестационарный режим для микровращений.

Итак, пусть $V_* = (\partial^2 w/\partial\varphi^2)\big|_{\varphi=\varphi_*} < 0$ и пусть L, ε – положительные величины с размерностью длины, причем $\varepsilon/L << 1$. Положим по определению:

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, 0] \cup [L, +\infty)$$

$\varphi_0(x) = \varphi_*$ при $x \in [\varepsilon, L-\varepsilon]$, φ_0 – гладкая монотонная функция на отрезках $[0, \varepsilon]$ и $[L-\varepsilon, L]$.

Течение среды определим из уравнения

$$-\Lambda\partial^2\varphi_0/\partial x^2 + (\partial^2 w/\partial x^2)\big|_{\varphi=\varphi_0(x)} = 2\beta\upsilon_x$$

В этом случае решение спектральной задачи для оператора Шредингера с точностью порядка ε/L близко к решению стандартной квантовомеханической задачи о прямоугольной яме [5]:

$$V(x) = V_0 = (\partial^2 w / \partial x^2)\big|_{\varphi=0} \text{ при } x \in (-\infty, 0] \cup [L, +\infty)$$

и $V(x) = V_*$ при $x \in [0, L]$. В то же время в задаче с яме оператор Шредингера при достаточно больших L имеет отрицательный спектр, нижняя точка которого может быть сколь угодно близка к V_* [5].

Таким образом, показано, что при невыпуклой функции w имеются стационарные течения среды, для которых реализуется нестационарный процесс на уровне микроповоротов частиц среды. Это явление естественно интерпретировать, как образование первичного акустического импульса.

Отметим, что нестационарное решение $\varphi = \varphi(t, x)$ будет обладать рядом вполне определенных свойств (например, спектром), не зависящих от начальных условий, но зависящих от параметров J, β и вида функции w. Это связано с тем, что для уравнения вида (3.1) доказано существование компактного аттрактора с конечной размерностью Хаусдорфа [6, 7]. Поэтому динамика микроповоротов будет полностью определяться структурой этого аттрактора. Тем самым акустическая эмиссия имеет характер детерминированного шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
2. *Трипалин А.С., Буйло С.И.* Акустическая эмиссия. Физико-механические аспекты. Ростов: Изд-во Рост. ун-та, 1986. 159 с.
3. *Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А.* Математическая модель генерации ультразвука сейсмическими волнами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6. С. 1340–1345.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка. 1965. 798 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 704 с.
6. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 133–187.
7. *Ладыженская О.А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 25–60.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1992