УДК 539.3

© 1993 г. В.С. Сергеев

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается механическая система с последействием, состояние которой в какой-либо момент времени t зависит не только от ее фазовых координат и времени в момент t, но и от фазовых координат во все предшествующие моменты времени, начиная с момента t_0 начала движения. Первым методом Ляпунова исследуется устойчивость движений такой системы с последействием. Строится общее решение уравнений движения в окрестности асимптотически устойчивого нулевого решения линеаризованных уравнений, и показана асимптотическая (экспоненциальная) устойчивость в силу полных уравнений. Примером приложения данного метода к системам с распределенными параметрами служит анализ устойчивости равновесия вязкоупругого стержня при кручении.

К системам рассматриваемого типа относятся системы, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерры [1] и содержащие, вообще говоря, нелинейные функционалы, которые в аналитическом случае, как показал Фреше [2], представляются рядами из кратных интегралов. В практических приложениях часто ограничиваются отрезками таких рядов. Уравнения подобного рода находят применение, в частности, в моделях вязкоупругости [3–5], а также аэроупругости [6–8].

1. Будем исследовать устойчивость движения, отвечающего нулевому решению уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_{t_0}^{t} K(t,s)x(s)ds + F(x,u,t), \quad x \in R^n, \quad u \in R^n \tag{1.1}$$

где непрерывные $n \times n$ – матрицы $A(t)$, $K(t, s)$ заданы соответственно для $t \in I = \{t \in R\colon t \geqslant t_0\}$ и $(t, s) \in J_1' = \{(t,s) \in R^2\colon t_0 \leqslant s < t < +\infty\}$, вектор-функция $F(x, u, t)$ – аналитическая в некоторой окрестности точки $x = 0$, $u = 0$, не содержащая линейного и свободного членов. Коэффициенты разложения $F(x, u, t)$ в степенной ряд по $x = \operatorname{col}(x_1,\dots,x_n)$, $u = \operatorname{col}(u_1,\dots,u_n)$ непрерывны и ограничены при $t \in I$; u_i – аналитические функционалы, представимые абсолютно сходящимися рядами Вольтерры – Фреше

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{t} K_i^{j(k)}(t,s_1,\dots,s_k)x_{j_1}(s_1)\dots x_{j_k}(s_k)ds_1\dots ds_k \tag{1.2}$$

в которых $K_i^{j(k)}(t,s_1,\dots s_k)$ – непрерывные функции, заданные на множестве $J_k' = \{(t,s_1,\dots,s_k) \in R^{k+1}\colon t_0 \leqslant s_j < t < +\infty,\ j=1,\dots,k\}$. В формуле (1.2) и далее верхний индекс $j(k)$ обозначает набор индексов $j_1,\dots,j_k$. Отметим, что в (1.1), (1.2) ядра $K(t, s)$, $K_i^{j(k)}(t, s_1, \ldots, s_n)$ допускают, вообще говоря, на границе области их определения соответственно при $s = t$ и $s_j = t$ ($j = 1, \ldots, k$) особенности типа особенностей ядер Абеля. Более определенно будем полагать, что в (1.2) для ядер $K_i^{j(k)}(t, s_1, \ldots, s_n)$ на множестве J'_k справедлива оценка

$$|K_i^{j(k)}(t, s_1, \ldots, s_k)| \leqslant C \frac{\exp[-\alpha_1(t-s_1) - \ldots - \alpha_k(t-s_k)]}{[(t-s_1)\ldots(t-s_k)]^{\rho}} \tag{1.3}$$

где постоянные $C > 0$, $0 \leqslant \rho < 1$ не зависят от k, а постоянные $\alpha_p \geqslant \alpha$ ($p = 1, 2, \ldots$) для некоторого $\alpha > 0$.

Рассмотрим задачу Коши с начальным условием $x_0 = x(t_0)$ ($x_0 = \mathrm{col}(x_{01}, \ldots, x_{0n})$). Обозначим через $X(t, t_0)$ фундаментальную матрицу решений линеаризованного уравнения (1.1), удовлетворяющую условию $X(t_0, t_0) = E_n$.

Теорема 1. Пусть для уравнения (1.1), (1.2) выпоняется условие (1.3), а также неравенство

$$\| X(t, s) \| \leqslant C' \exp[-\beta(t-s)], \quad C', \; \beta > 0 \; - \mathrm{const} \tag{1.4}$$

и пусть величина γ такова, что $0 < \gamma < \min(\alpha, \beta)$.

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \gamma$), $\delta > 0$, такие, что общее решение уравнения (1.1), (1.2) в окрестности нуля представляется рядами

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} S_i^{m(n)}(t) \exp[-(\gamma - \varepsilon)(t - t_0)] x_{01}^{m_1} \ldots x_{01}^{m_n} \tag{1.5}$$

с непрерывными ограниченными при $t \in I$ коэффициентами $S_i^{m(n)}(t)$. Ряды (1.5) сходятся абсолютно и равномерно при $\| x_0 \| < \delta$ для некоторого $\delta > 0$, и нулевое решение экспоненциально устойчиво.

Замечание. Матрица $X(t, s)$ будет матрицей разностного типа, если A – постоянная матрица и $K(t, s) = K'(t - s)$. Условие (1.4), означающее асимптотическую (экспоненциальную) устойчивость нулевого решения линеаризованного уравнения (1.1), легко проверяется, например, в случае, когда $K'(t)$ имеет экспоненциально-полиномиальный вид.

Доказательство теоремы 1 основывается на первом методе Ляпунова [9] и проводится по схеме, использованной в [10, 11]. Представим функционалы u_i в виде рядов, аналогичных (1.5),

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} P_i^{m(n)}(t) \exp[-(\gamma - \varepsilon)(t - t_0)] x_{01}^{m_1} \ldots x_{0n}^{m_n} \tag{1.6}$$

Коэффициенты $S_i^{m(n)}(t)$, $P_i^{m(n)}(t)$ рядов (1.5), (1.6) определяются последовательно на основании формулы (1.2) и интегрального уравнения [12]

$$x(t) = X(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, s) F(x(s), u(s), s) ds$$

эквивалентного уравнению (1.1) с начальным условием. При этом все функции $S_i^{m(n)}(t)$, $P_i^{m(n)}(t)$ ограничены, когда $t \in I$.

Пусть ряды υ_i, w_i – мажоранты соответственно для x_i, u_i, а $F^*(x,y) \gg F(x,y,t)$ при $t \in I$, и пусть C^* – положительная матрица, такая, что

$$X_*(t,s) \leqslant C^* \exp[-\beta(t-s)]$$

где элементы матрицы $X_*(t,s)$ представляют собой взятые по модулю соответствующие элементы матрицы $X(t,s)$. Тогда составим [10] мажорирующие уравнения

$$w_i = CA\left(\sum_{j=1}^{n} \upsilon_j + B \sum_{j_1,j_2=1}^{n} \upsilon_{j_1}\upsilon_{j_2} + \ldots + B^{k-1} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \upsilon_{j_1} \ldots \upsilon_{j_k} + \ldots\right) = \tag{1.7}$$

$$= \frac{CA}{B(1-z)}$$

$$z = B\sum_{j=1}^{n} \upsilon_j, \qquad D(p) = \int_0^\infty \frac{\exp(-ps)}{s^\rho} ds$$

$$\upsilon = C^* x_0 + M^* F^*(\upsilon, w), \qquad A = D(\alpha-\gamma+\varepsilon), \qquad B = D(\alpha) \tag{1.8}$$

$$M^* > \frac{C^*}{\beta - 2\gamma + 2\varepsilon}(\exp[-(\gamma-\varepsilon)(t-t_0)] - \exp[-(\beta-\gamma+\varepsilon)(t-t_0)])$$

$$\upsilon = \mathrm{col}(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n), \qquad w = \mathrm{col}(w_1,\ldots,w_n)$$

в которых M^* – постоянная положительная матрица.

Уравнения (1.7), (1.8) определяют υ_i, w_i в виде абсолютно сходящихся степенных рядов при $\|x_0\| < \delta$. Величина δ может быть определена способом, использованным в [13].

Аналогом теоремы 1 для систем с распределенными параметрами является утверждение, которое приводится далее в разд. 2 и касается устойчивости равновесия вязкоупругого стержня при кручении.

2. Рассмотрим задачу о кручении тонкого вязкоупругого стержня длины l, один конец которого закреплен, а второй свободен. Пусть Oz – ось, вокруг которой происходит кручение стержня, и точка O лежит на его левом конце.

Будем считать, что ось стержня не деформируется, справедлива гипотеза плоских сечений и перемещения точек сечения осуществляются в результате поворота этого сечения как целого. Распределение масс во всех сечениях, ортогональных оси стержня, предполагается одинаковым.

На стержень действуют внешние массовые силы, момент которых в каждом сечении зависит лишь от угла закручивания θ этого сечения. Боковая поверхность свободна от действия внешних сил. Момент вязкоупругих сил зависит от $\partial\theta/\partial z$ и определяется линейным интегральным оператором Вольтерры [1]

$$M(\theta,z,t) = k_1 \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z} + \int_{t_0}^{t} k_2(t-s)\frac{\partial\theta(z,s)}{\partial z} ds$$

где постоянная k_1 – жесткость на кручение и ядро релаксации, $k_2(t)$ – непрерывная при $t \in I$ функция. Уравнение движения, которое может быть получено на основании принципа Гамильтона – Остроградского для систем с распределенными параметрами [14], имеет вид

$$I_1 \frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial t^2} - k_1 \frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2} - \int_{t_0}^{t} k_2(t-s)\frac{\partial^2\theta(z,s)}{\partial z^2}ds - f(\theta) = 0 \tag{2.1}$$

где I_l – момент инерции стержня единичной длины относительно его оси, $f(\theta)$ – момент внешних сил. Будем полагать, что $f(\theta)$ – нечетная функция и разлагается в окрестности нуля в сходящийся степенной ряд, так что

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\theta^{2n-1}, \quad a_{2n-1} = \text{const}$$

Если, например, стержень расположен горизонтально в поле силы тяжести и центр масс сечения находится на расстоянии r от оси стержня, то $f(\theta) = -mgr \sin\theta$, где mg – вес стержня единичной длины.

Исследуем устойчивость положения равновесия, отвечающего нулевому решению уравнения (2.1), по отношению к возмущениям в момент $t = t_0$ угла $\theta(x, t)$ и его скорости, удовлетворяющим граничным условиям

$$\theta(0,t) = \partial\theta(z,t)/\partial z\,|_{z=l} = 0 \tag{2.2}$$

С этой целью положим $\theta = \mu U$ ($\mu = \text{const} \ll 1$) и будем строить общее решение уравнения (2.1) в окрестности нуля в виде ряда

$$U(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu^{2n-2}\sin(\alpha_k z)T_k^{(2n-1)}(t) \tag{2.3}$$

где в соответствии с выбранными граничными условиями положим $\alpha_k = \pi(2k-1)/(2l)$. Подстановка ряда (2.3) в (2.1) показывает, что в силу свойств уравнения (2.1) решение в требуемой форме, по крайней мере формально, может быть получено. При этом для определения функций $T_k^{(2n-1)}(t)$ ($k, n = 1, 2, \dots$) имеем уравнения

$$I_1 \frac{d^2T_k^{(2n-1)}(t)}{dt^2} + (k_1\alpha_k^2 - a_1)T_k^{(2n-1)}(t) +$$

$$+ \alpha_k^2 \int_{t_0}^{t} k_2(t-s)T_k^{(2n-1)}(s)ds = S_k^{(2n-3)}(t) \tag{2.4}$$

где $S_k^{(-1)}(t) \equiv 0$ и $S_k^{(2n-3)}(t)$ ($n = 2, 3, \dots$) – известные непрерывные функции, если известны все $S_k^{(2m-3)}(t)$ для $m < n$ и $k = 1, 2, \dots$.

Будем считать начальные значения $\theta(z,t_0) = \mu\varphi(z)$ и $\partial\theta(z,t)/\partial t\,|_{t=t_0} = \mu\psi(z)$ достаточно гладкими функциями, разложимыми в ряды Фурье на отрезке $[0, l]$ по системе функций $\sin(\alpha_k\cdot)$. Пусть

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\alpha_k x)dx, \qquad c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin(\alpha_k x)dx$$

– соответствующие коэффициенты Фурье. Рассмотрим решения уравнений (2.4) при $n = 1$ с начальными условиями $T_k^{(1)}(t_0) = b_k$, $dT_k^{(1)}(t)/dt\,|_{t=t_0} = c_k$. Решение этих уравнений для $k = 1, 2, \ldots$ представим в виде

$$T_k^{(1)}(t) = x_{11}^{(k)}(t)\,b_k + x_{12}^{(k)}(t)c_k, \quad dT_k^{(1)}(t)/dt = x_{21}^{(k)}(t)b_k + x_{22}^{(k)}(t)c_k$$

где фундаментальная матрица $(x_{ij}^{(k)}(t))$ такова, что $(x_{ij}^{(k)}(t_0)) = E_2$.

Учитывая диссипативные свойства вязкоупругого материала, сделаем следующее предположение о характере поведения функций $x_{ij}^{(k)}(t)$. Будем считать, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ существуют постоянные $M > 0$, $\lambda_0 > 0$, не зависящие от k и удовлетворяющие при $t \in I$ неравенствам

$$|x_{11}^{(k)}(t)|, \; |x_{12}^{(k)}(t)|, \; |x_{22}^{(k)}(t)| \leqslant M\exp[-\lambda_0(t-t_0)] \tag{2.5}$$

Будем также полагать, что выполнены следующие условия, наложенные на интегральное ядро $K_2(t)$:

$$|K_2(t)| \leqslant \kappa_1\exp(-\beta_1 t), \quad \beta_1 - \kappa_1/k_1 > 0; \quad \kappa_1 > 0, \; \beta_1 > 0 - \mathrm{const} \tag{2.6}$$

Приведем простой пример, показывающий, каким образом можно связать выполнение условий (2.5) с параметрами уравнения (2.4) для $n = 1$. Возьмем уравнение (2.4) вида

$$\frac{d^2T_k^{(1)}}{dt^2} + \alpha_k^2(T_k^{(1)} + \int_{t_0}^{t} k_2(t-s)T_k^{(1)}(s)ds) = 0; \quad k_2(t) = \kappa\exp(-\beta t)$$

κ, β – const

Из анализа соответствующего характеристического уравнения [12] следует, что при выполнении неравенств $\beta > 0$, $\kappa < 0$, $\beta + \kappa > 0$ корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части при всех действительных α_k и решение уравнения экспоненциально устойчиво. Тогда можно указать постоянные M, $\lambda_0 > 0$, такие, что условия (2.5) будут справедливы для всех $k = 1, 2, \ldots$. Отметим, что при этом $|x_{12}^{(k)}(t)| \leqslant C_1/\alpha_k$ и $|x_{21}^{(k)}(t)| \leqslant \alpha_k C_2$, где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – постоянные, не зависящие от k.

Теорема 2. При выполнении условий (2.5), (2.6) положение равновесия вязкоупругого стрежня, отвечающее нулевому решению уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), асимптотически устойчиво по Ляпунову в классе возмущений начальных условий, таких, что функции $\varphi(z)$, $\psi(z) \in C^3$ и $\varphi'''(z)$, $\psi'''(z)$ имеют ограниченное изменение. В возмущенном движении угол закручивания $\theta(z, t) \to 0$ экспоненциально при $t \to +\infty$ для каждого $z \in [0, l]$, и общее решение задачи дается рядом (2.3), в котором экспоненциально стремящиеся к нулю функции $T_k^{(2n-1)}(t)$ зависят от постоянных b_m, c_m являющихся коэффициентами Фурье функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ на $[0, l]$ по системе функций $\sin(\alpha_k z)$. Ряд (2.3) представляет решение уравнения (2.1) и сходится абсолютно и равномерно для всех $z \in [0, l]$, $t \in I$ и μ, b_m, c_m, таких, что $\mu\sum_{k=1}^{\infty}(|b_k| + |c_k|) < \delta$ для некоторого $\delta > 0$.

Замечание. Продолжим каждую из функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на отрезок $[l, 2l]$ как четную функцию относительно прямой $z = l$ и затем продолжим на отрезок $[-2l, 0]$ как нечетную относительно нуля. После этого можно доопределить эти функции на всю числовую ось, считая их периодическими с периодом $4l$. Ограничения, наложенные на функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их производные условиями теоремы 2, граничными условиями и самим уравнением (2.1), означают, что полученные периодические функции будут иметь всюду непрерывные третьи производные с ограниченным изменением. Поэтому коэффициенты Фурье этих функций допускают оценку [15]

$$b_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right), \qquad c_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right) \tag{2.7}$$

На основании (2.7) решение линеаризованного уравнения (2.1), представленное в форме ряда, а также ряды для первых и вторых производных от $U(x, t)$ сходятся абсолютно и равномерно, и, следовательно, решение линеаризованного уравнения в требуемой форме существует.

Доказательство теоремы 2. Пусть все функции $T_k^{(2m-1)}(t)$ для $1 < m < n$ и $k = 1, 2, \ldots$ определены из уравнения (2.4) с начальными условиями $T_k^{(2m-1)}(t_0) = 0$, $dT_k^{(2m-1)}(t)/dt\,|_{t=t_0} = 0$ и удовлетворяют неравенствам

$$|T_k^{(2m-1)}(t)| \leqslant C\exp[-\lambda_0(t-t_0)], \qquad C = \text{const} > 0 \tag{2.8}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n-1$$

Пусть $T_k^{(2m-1)}(t)$ как ряды от параметров b_q, c_r ($q, r = 1, 2, \ldots$) сходятся абсолютно. Для определения $T_k^{(2n-1)}(t)$ имеем уравнение (2.4), в котором $S_k^{(2n-3)}(t)$ при каждых фиксированных k, n представляет собой ряд от a_{2i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) и $T_p^{(2s-1)}(t)$ ($s = 1, 2 \ldots, n-1$; $p = 1, 2, \ldots$) с рациональными коэффициентами. Ряд $S_k^{(2n-3)}(t)$ по параметрам b_q, c_r сходится абсолютно, и на основании (2.8) и свойств функции $f(\theta)$ имеет место оценка

$$|S_k^{(2n-3)}(t)| \leqslant K^{(2n-3)}\exp[-3\lambda_0(t-t_0)] \tag{2.9}$$

где $K^{(2n-3)} > 0$ – постоянная, зависящая от $K^{(2m-3)}$ при $m < n$. Решение уравнения (2.4) с начальными условиями $T_k^{(2n-1)}(t_0) = 0$, $dT_k^{(2n-1)}(t)/dt\,|_{t=t_0} = 0$ дается формулой

$$T_k^{(2n-1)}(t) = \int_{t_0}^{t} x_{12}^{(k)}(t-s)S_k^{(2n-3)}(s)\,ds \tag{2.10}$$

на основании которой, учитывая (2.5), (2.9), получаем оценку

$$|T_k^{(2n-1)}(t)| \leqslant MK^{(2n-3)}(2\lambda_0)^{-1}\exp[-\lambda_0(t-t_0)]$$

и можем сделать заключение об абсолютной сходимости ряда для $T_k^{(2n-1)}(t)$.

Обозначим через V мажоранту ряда (2.3), который рассматривается как разложение по степеням μ, b_p, c_s. Применяя процедуру, использованную в разд. 1, составим уравнение, которому должна удовлетворять мажоранта V:

$$V = M\rho + \frac{M}{\lambda_0} f^*(V), \qquad \rho = \sum_{k=1}^{\infty} (|b_k| + |c_k|) \tag{2.11}$$

где $f^*(\theta)$ – мажоранта ряда для $f(\theta) - a_1\theta$.

Уравнение (2.11) определяет V в виде ряда по параметру ρ, и радиус сходимости ρ_0 этого ряда конечен. Для значений μ, b_k, c_k, таких, что $\rho \leq \rho_0$, ряд (2.3) сходится абсолютно и равномерно по $z \in [0, l]$, $t \in I$. Можно также показать построением мажорант, что сходятся абсолютно и равномерно ряды, определяющие $\partial^2\theta(z,t)/\partial z^2$ и $\partial^2\theta(z,t)/\partial t^2$.

Из соотношения

$$\frac{dT_k^{(2n-1)}(t)}{dt} = \int_{t_0}^{t} x_{22}^{(k)}(t-s)\, S_k^{(2n-1)}(s)\, ds, \quad n>1$$

аналогичного (2.10), следует выражение

$$\frac{\partial^2 T_k^{(2n-1)}(t)}{\partial t^2} = x_{22}^{(k)}(t-t_0)\, S_k^{(2n-1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_{22}^{(k)}(t-s) \frac{d}{ds} S_k^{(2n-3)}(s)\, ds$$

на основании которого строится мажорирующий ряд для $\partial^2\theta(z,t)/\partial t^2$, подобный ряду в правой части (2.11) и абсолютно сходящийся при выполнении (2.7), (2.5).

Уравнение (2.1), в которое подставлено найденное решение для $\theta(z,t)$ в форме ряда Фурье, можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерры относительно искомой величины $\partial^2\theta(z,t)/\partial z^2$. Правая часть $\Phi(z,t)$ этого интегрального уравнения, выражающаяся через $f(\theta)$ и $\partial^2\theta(z,t)/\partial t^2$, в силу сказанного выше является конечной величиной. Решение интегрального уравнения строится с помощью резольвенты $\Gamma(t,s)$ [3,16] для ядра $k_2(t-s)$ и имеет вид

$$\frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2} = \Phi(z,t) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(t,s)\,\Phi(z,s)\, ds \tag{2.12}$$

$$\Phi(z,t) = \frac{I_1}{k_1} \frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial t^2} - \frac{f(\theta)}{k_1}$$

При выполнении (2.6) правая часть в (2.12) будет ограниченной функцией и $\partial^2\theta(z,t)/\partial z^2$ – абсолютно и равномерно сходящимся рядом для $z \in [0, l]$, $t \in I$.

Замечание. Оценка (2.7), будет иметь место и при несколько более слабых предположениях о свойствах функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, чем указаны в теореме 2. Достаточно потребовать, чтобы $\varphi'''(z)$, $\psi'''(z)$ имели ограниченное изменение, либо были абсолютно непрерывными функциями на $[0, l]$.

Если ядро $k_2(t)$ имеет экспоненциально-полиномиальную форму [12], то в этом случае можно показать, что для сходимости мажорантных рядов для $\partial^2\theta(z,t)/\partial t^2$ и $\partial^2\theta(z,t)/\partial t^2$ функция $\psi(z)$ должна быть такой, чтобы $c_k = O(1/k^3)$. Это означает, что в формулировке теоремы 2 $\varphi'''(z)$ и $\psi''(z)$ должны иметь ограниченное изменение или быть абсолютно непрерывными функциями на отрезке $[0, l]$.

Ряды типа (2.3), зависящие от произвольных постоянных b_p, c_q $(p, q = 1, 2, \dots)$, можно рассматривать для систем с распределенными параметрами как аналог рядов первого метода Ляпунова.

Отметим, что для исследования устойчивости систем с последействием или систем процессов как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами часто применяется метод функционалов, либо функций Ляпунова [17–21] с использованием в качестве характеристики процесса одной или двух метрик. Обстоятельный обзор работ по устойчивости в таких системах содержится в указанных монографиях, а также в [12, 22–24].

В задаче о кручении вязкоупругого стержня за меру начального возмущения (отклонения функций $\mu\varphi(z)$, $\mu\psi(z)$ и их первых и вторых производных) можно взять сходящийся в силу условий теоремы 2 ряд

$$\rho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(1+n+n^2)(|a_n|+|b_n|)$$

Тогда, как следует из теоремы 2, для каждого фиксированного $z \in [0, l]$ имеет место экспоненциальная устойчивость по отношению к функциям $\theta(z, t)$, $\partial^k\theta(z,t)/\partial z^s \partial t^p$, $k = s+p = 1, 2$; $s, p \geqslant 0$, $s \neq p$.

Отметим в связи с теремой 2, что близкому вопросу построения для заданного стационарного состояния термовязкоупругой системы возмущенного движения в форме степенных рядов по параметрам, характеризующим приложенные возмущающие силы, а также получению спектральных условий асимптотической устойчивости по отношению к указанным возмущениям, посвящены работы [25, 26].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. *Fréchet M.* Sur les fonctionnelles continues // Ann. de l'École Normale Sup. 1910. Sér 3. T. 27. P. 193–216.
3. *Volterra V.* Sur les équations integro-différentielles et leurs application // Acta math. 1912. T. 35. N 4. P. 295–354.
4. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
5. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
7. *Морозов В.И.* Математические модели динамики аэроупругого летательного аппарата // Исследование авиационной техники с помощью ЭВМ. Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1981. Вып. 1310. С. 39–51.
8. *Астапов И.С., Белоцерковский А.С., Морозов В.И.* Нелинейные интегродифференциальные уравнения аэроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 61–70.
9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-ьо АН СССР, 1956. С. 7–263.
10. *Сергеев В.С.* Об устойчивости решений интегродиффенциальных уравнений в некоторых случаях // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 98–105.
11. *Сергеев В.С.* Об устойчивости решений для одного класса интегродифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 22. № 3. С. 518–523.
12. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1957. 327 с.

13. *Сергеев В.С.* Об оценке области притяжения для одного класса интегродифференциальных уравнений // Устойчивость движения. Новосибирск: Наука, 1985. С. 88–93.
14. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
15. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
16. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 304 с.
17. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
18. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
19. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
20. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
21. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
22. *Быков Я.В.* О некоторых вопросах качественной теории интегродифференциальных уравнений // Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1961. Вып. 1. С. 3–54.
23. *Мышкис А.Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, Вып. 2. С. 173–202.
24. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.
25. *Громов В.Г.* Динамический критерий устойчивости и закритическое поведение гибких вязкоупругих тел при термосиловом загружении // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 4. С. 805–808.
26. *Громов В.Г.* Первый метод Ляпунова в динамической устойчивости гибких термовязкоупругих тел // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 4. С. 819–822.

Москва

Поступила в редакцию
21.II.1992