УДК 539.3:534.1

© 1993 г. С.В. Колесников

# УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Предлагается уточненная теория колебаний многослойных ортотропных пластин конечных размеров, основанная на методе гипотез [1, 2] и разложении нормального перемещения в ряд по толщине пластины. При выборе гипотез учитывается возможность как практического использования результатов, так и решения новых задач теории колебаний упругого прямоугольника.

Рассматривается цилиндрическая жесткая пластина, составленная из нечетного числа $(2m + 1)$ ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно среднего слоя, которому условно присвоен номер нуль ($i = 0$). Слоям выше среднего слоя присваиваем соответственно положительные значения номера от $i = 1$ до $i = m$, а слоям ниже среднего слоя – отрицательные значения номера от $i = -1$ до $i = -m$. Слои, симметрично расположенные относительно среднего слоя, имеют одинаковые толщины и упругие параметры. Направления цилиндрической системы координат $X, Y, Z$ совмещены с главными направлениями анизотропии упругого материала. Начало координат находится на середине толщины многослойной пластины.

Основная цель работы – изучение движения многослойной пластины в плоскости $XOZ$, которая проходит поперек сечения цилиндра и перпендикулярно координатной оси $OY$. При выводе уравнений движения используется концепция двумерной постановки задачи и следующие гипотезы:

1) при записи дифференциальных уравнений равновесия и составляющих деформации для слабо изогнутой пластины считаем, что напряженное состояние криволинейной пластины не отличается от соответствующего состояния для плоской пластины, т.е. в уравнениях движения пластины ее кривизной можно пренебречь;

2) касательное напряжение $F_{xzi}$ по толщине многослойной пластины меняется по заданному закону ([1], с. 46)

$$F_{xzi} = \varphi(x,t) f(z), \qquad f(z) = f(-z), \qquad f(z)|_{z=\pm h} = 0$$

$$\varphi(x,t) \equiv \varphi, \qquad F_{xzi} \equiv F_{xz}$$

3) нормальное перемещение можно разложить в ряд по толщине пластины

$$U_{zi} = ax + \sum_{j=0}^{2N+1} \left(\frac{z}{h}\right)^j W_j(x,t)$$

$$W_j(x,t) \equiv W_j, \qquad U_{zi} \equiv U_z$$

Здесь $x, z$ – криволинейные координаты, $t$ – время, $2h$ – толщина многослойной пластины, $F_{xzi}$, $U_{zi}$ – касательное напряжение и нормальное перемещение в $i$-м слое, $f(z)$ – заданная функция, характеризующая закон изменения касательного напряжения по толщине пластины, $\varphi$ – неизвестная функция, $a$ – неизвестный угол поворота пластины как единого целого, $W_j$ – неизвестная составляющая нормального перемещения в разложении в ряд по толщине пластины, $2N+1$ – число членов разложения.

Условия равновесия среды $i$-го слоя при гармонических колебаниях в слабо изогнутых цилиндрических координатах представляются дифференциальными уравнениями ([2], с. 18)

$$\partial\sigma_{xi}/\partial x+\partial F_{xzi}/\partial z+\omega^2\rho_i U_{xi} = 0$$
$$\partial\sigma_{zi}/\partial z+\partial F_{xzi}/\partial x+\omega^2\rho_i U_{zi} = 0 \tag{1}$$

Здесь $i$ – номер слоя ($i$ меняется от $-m$ до $m$), $\rho_i$ – плотность материала слоя, $U_{xi}$, $U_{zi}$, $\sigma_{xi}$, $\sigma_{zi}$ – перемещения и главные напряжения в слое по соответствующим осям координат. $F_{xzi}$ – касательное напряжение, $\omega$ – круговая частота.

Подставив во второе условие равновесия (1) заданные законы изменения касательного напряжения и нормального к срединной поверхности перемещения, проинтегрировав результат по нормальной координате $z$ в пределах от $z_i$ до $z$ (координата $z$ находится внутри $i$-го слоя) и учитывая равенство нормальных напряжений на границах слоев, найдем выражение для нормальной составляющей главного напряжения в любой точке многослойной пластины

$$\sigma_{zi} = \sigma - J_0(z)\partial\varphi/\partial x -$$
$$-\omega^2\left[ax(RZ_{i0}+I_{i0}(z))+\sum_{j=1}^{2N+1}W_j(I_{ij}(z)+RZ_{ij})\right] \tag{2}$$
$$J_i(z) = \int_{z_i}^{z} f(z)dz, \qquad I_{ij}(z) = \rho_i\int_{z_i}^{z}\left(\frac{z}{h}\right)^j dz$$
$$RZ_{\pm s,\ j} = RZ_{\pm s\mp 1,\ j}+I_{\pm s\mp 1,\ j}(z_{\pm s}), \qquad RZ_{0j} = 0, \qquad Z_0 = 0$$
$$S = 1,2,\dots,m, \qquad j = 0,1,\dots,2N+1$$

Здесь $\sigma$ – неизвестная постоянная интегрирования, $Z_1, Z_2,\dots,Z_{m+1}$ – координаты верхних границ слоев с номерами 0, 1, … , $m$, $Z_{-1}, Z_{-2},\dots,Z_{-m-1}$ – координаты нижних границ слоев с номерами 0, –1, … , –$m$.

Учитывая соотношения (2), четность функции $f(z)$ и симметричность размещения слоев относительно среднего слоя, найдем уравнение равновесия многослойной пластины и постоянную интегрирования

$$\sigma_2-\sigma_1 = Q_{11}\partial\varphi/\partial x-2\omega^2[axRZ_{m+1,0}+W_0RZ_{m+1,0}+W_2RZ_{m+1,2}+\dots]$$
$$\sigma_2+\sigma_1 = 2\sigma-2\omega^2[W_1RZ_{m+1,1}+W_3RZ_{m+1,3}+\dots] \tag{3}$$

Здесь $\sigma_1$, $\sigma_2$ – нормальные напряжения на нижней и верхней границах многослойной пластины.

Продифференцировав первое уравнение (3) по координате $x$, получим первое уравнение движения пластины

$$\partial(\sigma_2-\sigma_1)/\partial x = Q_{11}\partial^2\varphi/\partial x^2+\omega^2(-aH_1+P_{12}\alpha_0+P_{13}\alpha_2+P_{14}\alpha_4+\dots)$$
$$\alpha_j = \partial W_j/\partial x, \qquad W_j = C_j+\int\alpha_j dx, \qquad P_{1s} = -2RZ_{m+1,2s-4} \tag{4}$$

$$H_1 = 2RZ_{m+1,0}, \quad S = 2,3,\dots,N+2, \quad j = 0,1,\dots,2N+1$$

Здесь $\alpha_j$ – неизвестная составляющая угла поворота пластины в разложении в ряд по толщине, $C_j$ – неизвестные постоянные интегрирования.

Напряженное состояние ортотропной среды $i$-го слоя определяется полуобратным методом теории упругости из закона Гука ([1], с. 21, 46)

$$\sigma_{xi} = B_i e_{xi} + A_i \sigma_{zi}, \qquad B_i = \frac{E_1^i}{1 - \upsilon_{12}^i \upsilon_{21}^i} \tag{5}$$

$$F_{xzi} = G_i e_{xzi}, \qquad A_i = \frac{E_1^i}{E_3^i} \frac{\upsilon_{13}^i + \upsilon_{12}^i \upsilon_{23}^i}{1 - \upsilon_{12}^i \upsilon_{21}^i}$$

Здесь $e_{xi}$, $e_{xzi}$ – объемная и сдвиговая деформации в $i$-м слое, $\upsilon_{12}^i$, $\upsilon_{13}^i$, $\upsilon_{21}^i$, $\upsilon_{23}^i$ – коэффициенты Пуассона, $E_1^i$, $E_3^i$ – модули Юнга, $G_i$ – модуль сдвига.

Перепишем последнее уравнение (5) в слабо изогнутых цилиндрических координатах ([2], с. 18) в виде

$$\partial U_{xi} / \partial z + \partial U_{zi} / \partial x = G_i^{-1} f(z) \varphi(x,t)$$

Проинтегрировав полученное уравнение по $z$ в пределах от $z_i$ до $z$ (координата $z$ находится внутри $i$-го слоя) и учитывая равенство перемещений на границах слоев, получим выражение для касательного перемещения в любой точке многослойной пластины

$$U_{xi} = b + V - az - \sum_{j=0}^{2N+1} \frac{z}{(1+j)} \left(\frac{z}{h}\right)^j \alpha_j + \varphi(AI_i + J_i(z)/G_i) \tag{6}$$

$$V_{x0}\big|_{z=0} = b + V, \quad V(x,t) \equiv V, \quad e_{xi} = \partial U_{xi} / \partial x$$

$$AI_{\pm s} = AI_{\pm s \mp 1} + J_{\pm s \mp 1}(z_{\pm s}) / G_{\pm s \mp 1}, \quad AI_0 = 0$$

$$S = 1, 2, \dots, m+1$$

Здесь $b$ – неизвестная постоянная, равная касательному перемещению пластины как единого целого, $V$ – касательное перемещение срединной поверхности, создаваемое колебаниями пластины.

Подставив выражение (6) в первое уравнение (5), найдем

$$\begin{aligned}
\sigma_{xi} = {} & B_i \frac{\partial V}{\partial x} - B_i \left( \frac{z^2}{2h} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{z^4}{4h^3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + \dots \right) + A_i \sigma - \\
& - \omega^2 A_i [W_1(RZ_{i1} + I_{i1}(z)) + W_3(RZ_{i3} + I_{i3}(z)) + \dots] - \\
& - B_i \left( z \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + \frac{z^3}{3h^2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[ B_i \left( AI_i + \frac{J_i(z)}{G_i} \right) - A_i J_0(x) \right] - \\
& - \omega^2 A_i [ax(RZ_{i0} + I_{i0}(z)) + W_0(RZ_{i0} + I_{i0}(z)) + W_2(RZ_{i2} + I_{i2}(z)) + \dots]
\end{aligned} \tag{7}$$

Используя первое уравнение равновесия среды (5), уравнения (2)–(4), (7) и условия эквивалентности моментов, действующих в поперечном сечении пластины, получим уравнения многослойной пластины

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} DU + \omega^2 RU = T\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1+\sigma_2) + \omega^2 Kb \\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} QW + \omega^2 PW = \left\| \begin{matrix} \partial(\sigma_1+\sigma_2)/\partial x \\ -4\varphi/3 \\ \vdots \\ -4\varphi(2N+3)^{-1} \end{matrix} \right\| + \omega^2 Ha \\
&D=(D_{js}),\quad R=(R_{js}),\quad T=(T_j),\quad K=(K_j) \\
&Q=(Q_{js}),\quad P=(P_{js}),\quad H=(H_j),\quad s,j=1,2,\ldots,N+2 \\
&\left\| \begin{matrix} M_0 \\ \vdots \\ M_{2N} \end{matrix} \right\| = \frac{\partial}{\partial x} DU \qquad \left\| \begin{matrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{2N+1} \end{matrix} \right\| = \frac{\partial}{\partial x} \left\| \begin{matrix} Q_{21} & \cdots & Q_{2,N+2} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{N+2,1} & \cdots & Q_{N+2,N+2} \end{matrix} \right\| W \\
&U' = (V,\alpha_1,\ldots,\alpha_{2N+1}),\qquad W' = (\varphi,\alpha_0,\ldots,\alpha_{2N})
\end{aligned} \tag{8}
$$

Здесь $U, W$ – матрицы-столбцы-функции, $U', W'$ – транспонированные матрицы-функции, $M_0,\ldots,M_{2N+1}$ – моменты нулевого, первого, второго и т.д. порядков. Явный вид матричных коэффициентов приведен в конце статьи.

Движения пластины описываются двумя системами матричных волновых уравнений – симметричных и антисимметричных колебаний. Из (8) видно, что размер каждой линейной системы дифференциальных уравнений и количество граничных условий определяются соответствующими членами ряда в разложении нормального перемещения по толщине пластины. Если в разложении нормального перемещения в ряд по толщине ограничиться только нулевым членом, система уравнений для симметричных колебаний переходит в известное уравнение, а система уравнений для антисимметричных колебаний отличается от известных уравнений формой записи и соответствующими неизвестными функциями, которые находятся при решении задачи ([1], с. 238). Отличие состоит в том, что уравнения движения и приближенные граничные условия записаны через неизвестные углы поворота пластины, а не через неизвестные перемещения. Новая форма записи уравнений движения и граничных условий существенна при рассмотрении колебаний многослойных толстых пластин конечных размеров, так как операторы, описывающие однородные матричные уравнения, в этом случае имеют сопряженные операторы ([3], с. 413, [4], с. 20).

Общее решение задачи (8) для пластин конечных размеров можно искать в виде ряда по собственным матрицам-столбцам-функциям ([5], с. 78), которые удовлетворяют однородным волновым уравнениям свободных колебаний пластины

$$
\begin{aligned}
&(L_s + \omega_n^1 R)U_n = 0,\qquad U_n' = (V_n,\alpha_{1n},\ldots,\alpha_{2N+1,n}) \\
&(L_a + \varepsilon_l^2 P)W_l = 0,\qquad W_l' = (\varphi_l,\alpha_{0l},\ldots,\alpha_{2N,l}) \\
&L_s = D\partial^2/\partial x^2,\qquad L_a = Q\partial^2/\partial x^2,\qquad O' = (0,\ldots,0) \\
&\left\| \begin{matrix} M_{0n} \\ \vdots \\ M_{2N,n} \end{matrix} \right\| = \frac{\partial}{\partial x} DU_n \qquad \left\| \begin{matrix} M_{1l} \\ \vdots \\ M_{2N+1,l} \end{matrix} \right\| = \frac{\partial}{\partial x} \left\| \begin{matrix} Q_{21} & \cdots & Q_{2,N+2} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{N+2,1} & \cdots & Q_{N+2,N+2} \end{matrix} \right\| W_l
\end{aligned} \tag{9}
$$

Здесь $O$ – нулевой столбец чисел, $n, l$ – номера мод собственных колебаний пластины, $\omega_n$, $\varepsilon_l$ – собственные круговые частоты, $U_n$, $W_l$ – собственные матрицы-столбцы-функции симметричных и антисимметричных колебаний, $M_{0n},\ldots, M_{2N,n}$, $M_{1l},\ldots,M_{2N+1,l}$ – моменты различных порядков, создаваемые соответствующими собственными колебаниями, в поперечном сечении пластины, $L_s$, $L_a$ – матричные дифференциальные операторы симметричных и антисимметричных колебаний.

Введем сокращенное обозначение для свертки матричных выражений

$$(y,z) = \int_a^b z'(x)\bar{y}(x)dx = \int_a^b \bar{y}'(x)z(x)dx \tag{10}$$

Здесь $y$, $z$ – матрицы-столбцы, $\bar{y}$ – матрица-столбец, состоящая из комплексно-сопряженных чисел матрицы $y$; штрих означает транспонирование.

Учитывая (10) и применяя формулу Лагранжа ([4], с. 20) к матричным уравнениям (9), найдем

$$(T,L_sU_n) = (\bar{T}'D\partial U_n/\partial x - U_n'D'\partial\bar{T}/\partial x)|_a^b + (L_s^*T,U_n)$$

$$(Y,L_aW_l) = (\bar{Y}'Q\partial W_l/\partial x - W_l'Q'\partial\bar{Y}/\partial x)|_a^b + (L_a^*Y,W_l)$$

Видно, что при однородных граничных условиях на торцах пластины для прямой и сопряженной задач операторы, описывающие колебания пластины, имеют сопряженные [3, 4], т.е.

$$(T,L_sU_n) = (L_s^*T,U_n), \quad (Y,L_aW_l) = (L_a^*Y,W_l)$$

($L_s^*$, $L_a^*$ – сопряженные операторы).

*Приложение.* Матричные коэффициенты:

$$D_{j1} = \Sigma \frac{2B_i}{2j-1}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-1}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}, \quad R_{j1} = \Sigma \frac{2\rho_i}{2j-1}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-1}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$D_{js} = -\Sigma \frac{B_i}{(s-1)(2j+2s-3)}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j+2s-4}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}, \quad K_j = -R_{j1}$$

$$R_{js} = \Sigma\left\{\frac{-\rho_i z}{(s-1)(2j+2s-3)}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j+2s-4} - 2A_i\left(I_i\binom{2j-2}{2s-3}(z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{Rz_{i,2s-3}}{2j-1}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-1}\right)\right\}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}} + RZ_{m+1,2s-3}\,\Sigma\frac{2A_i}{2j-1}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-1}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$j = 1,2,\ldots,N+2, \quad s = 2,3,\ldots,N+2$$

$$Q_{11} = 4/3h^3, \quad P_{11} = 0, \quad H_1 = 2RZ_{m+1,0}, \quad P_{1s} = -2RZ_{m+1,2s-4}, \quad Q_{1s} = 0$$

$$P_{j1} = \Sigma\, 2\rho_i\left[\frac{J\binom{2j-3}{i}(z)}{G_i} + \frac{AI_i}{(2j-2)h}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-2}\right]\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$Q_{j1} = \sum 2\left\{B_i\left(\frac{J\binom{2j-3}{i}(z)}{G_i} + \frac{AI_i}{2jh}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j}\right) - A_i J\binom{2j-3}{0}(z)\right\}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$Q_{js} = -\sum \frac{2B_i}{(2s-3)(2j+2s-5)}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j+2s-5}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$P_{js} =$$

$$= \sum 2\left\{\frac{-\rho_i}{(2s-3)(2j+2s-5)}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j+2s-5} - A_i\left(I_i\binom{2j-3}{2s-4}(z) + \frac{RZ_{i,2s-4}}{(2j-2)h}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-2}\right)\right\}\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$H_j = \sum 2A_i\left(I_i\binom{2j-3}{0}(z) + \frac{RZ_{i0}}{(2j-2)h}\left(\frac{z}{h}\right)^{2j-2}\right)\Bigg|_{z_i}^{z_{i+1}}$$

$$I_i\binom{2s}{j}(z) = \int \frac{z^{2s}}{h^{2s+1}} I_{ij}(z)dz, \qquad J\binom{2s+1}{i}(z) = \int \frac{z^{2s+1}}{h^{2s+3}} J_i(z)\,dz$$

$$I_i\binom{2s+1}{j}(z) = \int \frac{z^{2s+1}}{h^{2s+3}} I_{ij}(z)\,dz, \qquad s, j = 2, 3, \ldots, N+2$$

Суммирование ведется от $i = 0$ до $i = m$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
5. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Колебания линейных систем. Т. 1 / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.



Санкт-Петербург



Поступила в редакцию
17.XI.1992