УДК 539.3

© 1993 г. А.И. Олейников

ОСНОВНЫЕ ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МОДЕЛИ ИЗОТРОПНО-УПРУГОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЫ

Дается постановка и решение одной задачи негладкой механики – разложение потенциала напряжений для разномодульных сред по компонентам тензора деформаций. Из предложенного выражения вытекают новые определяющие соотношения и вид функциональной зависимости модулей упругости и фазы подобия девиаторов от соотношения между инвариантами тензора деформаций. Проведено обращение определяющих зависимостей напряжений от деформаций. Показан характер взаимосвязи обобщенных модулей упругости и фазы подобия девиаторов в процессе деформирования. Даны двойственные формулировки теории и энергетических принципов.

1. Диссимметрия и негладкость разномодульного закона упругости. Для простейшего разномодульного закона упругости [1–4]

$$\sigma = \begin{cases} E^-\varepsilon, & \varepsilon \leqslant 0 \\ E^+\varepsilon, & \varepsilon \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

потенциал напряжений – удельная потенциальная энергия деформации, имеет вид (E^-, E^+ – соответственно модуль упругости при сжатии и растяжении)

$$U = \begin{cases} \tfrac{1}{2}E^-\varepsilon^2, & \varepsilon \leqslant 0 \\ \tfrac{1}{2}E^+\varepsilon^2, & \varepsilon \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, что соотношение (1.1) является негладким в нуле и потенциал $U(\varepsilon)$ (1.2) не является аналитической и четной функцией.

В общем случае будем полагать, что упругий потенциал $W(\varepsilon)$ для изотропных разномодульных сред (РМС) представляет собой однородную функцию второй степени однородности относительно компонент тензора деформации

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad W(0) = 0, \quad W(\varepsilon) \geqslant \kappa\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \kappa = \text{const} > 0$$

Такой потенциал рассматривался [4] в предположении тензорной линейности.

Потенциал $W(\varepsilon)$ вследствие эффектов разномодульности также не является аналитической функцией в нуле и его группа симметрии не может содержать в себе инверсии.

Действительно, вследствие теоремы Эйлера об однородных функциях имеем

$$W(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}Q_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j, \quad Q_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j} (\det\|\varepsilon_{ij} - \varepsilon_k\delta_{ij}\| = 0; \ i,j,k = 1,2,3) \tag{1.3}$$

Коэффициенты Q_{ij} – однородные функции нулевой степени однородности, которые определяются значениями обобщенных модулей упругости и фазы подобия девиаторов. Поскольку по определению РМС прежде всего $Q_{ij}(\varepsilon) \neq Q_{ij}(-\varepsilon)$, то, следовательно, функция $W(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ не может быть разложена в ряд

Тейлора. Аналогично и согласно (1.3), $W(\varepsilon) \neq W(-\varepsilon)$, т.е. функция $W(\varepsilon)$ не обладает центром инверсии.

Диссимметрия изотропных РМС допускает [5] возможность существования двух их разновидностей, имеющих противоположные знаки разномодульности – знаки разности соответствующих модулей упругости и фаз подобия девиаторов. При этом среды с равными абсолютными значениями этих разностей могут иметь зеркально-симметричные свойства, являясь антиподами друг друга. Смесь, содержащая антиподы в равных количествах, неотличима от обычного упругого тела.

Модели РМС обычно возникают при замене слабонелинейных диаграмм деформирования кусочно-линейными. При этом не происходит нарушения близости решений задач, соответствующих гладкой и негладкой (разномодульной) моделями [6]. В общем случае нелинейные диаграммы деформирования могут быть аппроксимированны ломаной линией. Это позволяет свести исходную нелинейную задачу, соответствующую гладкой модели, к совокупности задач механики РМС, решения которых должны быть склеены.

Потенциал $W(\varepsilon)$ является кусочно-аналитической функцией и не может быть разложен в степенной ряд. Такой потенциал в предположении тензорной линейности определялся [4, 7] непосредственно на основе экспериментальных диаграмм деформирования, полученных при пропорциональных нагружениях.

2. Разложение потенциала напряжений РМС $W(\varepsilon)$ в ряд. Группа симметрии потенциала $W(\varepsilon)$ совпадает с собственной группой вращений. Представим потенциал $W(\varepsilon)$ в виде ряда по функциям, образующих базис представлений этой группы. В силу (1.3) имеем

$$W(\varepsilon) = r^2 F(\varepsilon_1/r, \varepsilon_2/r, \varepsilon_3/r) \tag{2.1}$$

Функция F задана на поверхности сферы радиуса $r = |\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} = 1$ с центром в точке (0, 0, 0) пространства главных деформаций.

Базис представлений группы вращений трехмерного пространства образуют поверхностные сферические функции. Очевидно, что F – функция с интегрируемым квадратом модуля на поверхности данной сферы. Тогда [8] эта функция может быть разложена в ряд, сходящийся в среднем, по ортогональной системе поверхностных сферических функций Y_l^m:

$$F\left(\frac{\varepsilon_1}{r}, \frac{\varepsilon_2}{r}, \frac{\varepsilon_3}{r}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m \tag{2.2}$$

В канонической локальной системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензора деформаций, функции Y_l^m можно выразить через главные компоненты этого тензора. Действительно, используя интегральное представление для сферических функций

$$Y_l^m = \frac{(-\mathrm{i})^m (l+m)!}{2\pi r^l l!} \int_{-\pi}^{\pi} X^l \cos mu\,du, \quad m = 0, 1, \ldots, l$$

$$Y_l^m = -\frac{\mathrm{i}^m (l-m)!}{2\pi r^l l!} \int_{-\pi}^{\pi} X^l \sin mu\,du, \quad m = -1, -2, \ldots, -l$$

$$X = \varepsilon_3 + \mathrm{i}\,\varepsilon_1 \cos u + \mathrm{i}\,\varepsilon_2 \sin u; \quad (\mathrm{i}^2 = -1)$$

вытекающие из общей формы решений уравнения Лапласа [9], разложение (2.2) можно записать в виде:

$$F\left(\frac{\varepsilon_1}{r}, \frac{\varepsilon_2}{r}, \frac{\varepsilon_3}{r}\right) = c_0 + c_i \frac{\varepsilon_i}{r} + c_{ij} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j}{r^2} + c_{ijk} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k}{r^3} + \ldots \tag{2.3}$$

$$c_0 = a_0^{(0)}, \quad c_1 = a_1^{(1)}, \quad c_2 = a_1^{(-1)}, \quad c_3 = a_1^{(0)}$$

$$c_{12} = c_{21} = 3a_2^{(-2)}, \quad c_{23} = c_{32} = {}^3\!/_2 a_2^{(-1)}, \quad c_{13} = c_{31} = {}^3\!/_2 a_2^{(1)}$$

$$c_{11} = 3a_2^{(2)} - {}^1\!/_2 a_2^{(0)}, \quad c_{22} = -3a_2^{(2)} - {}^1\!/_2 a_2^{(0)}, \quad c_{33} = a_2^{(0)}$$

$$c_{111} = -{}^3\!/_2 a_3^{(1)} + 15a_3^{(3)}, \quad c_{222} = -{}^3\!/_2 a_3^{(-1)} - 15a_3^{(-3)}, \quad c_{333} = a_3^{(0)}$$

$$c_{122} = -{}^3\!/_2 a_3^{(1)} - 45a_3^{(3)}, \quad c_{133} = 6a_3^{(1)}, \quad c_{211} = -{}^3\!/_2 a_3^{(-1)} + 45a_3^{(-3)}$$

$$c_{233} = 6a_3^{(-1)}, \quad c_{311} = -{}^3\!/_2 a_3^{(0)} + 15a_3^{(2)}, \quad c_{322} = -{}^3\!/_2 a_3^{(0)} - 15a_3^{(2)}$$

$$c_{123} = c_{132} = c_{213} = c_{231} = c_{312} = c_{321} = 5a_3^{(-2)}$$

Разложение (2.3) инвариантно относительно вращений. Согласно правилу преобразования $\varepsilon_k = q_{kp}^2 \varepsilon'_p$, коэффициенты ряда в (2.3) удовлетворяют равенствам

$$c'_p = q_{kp}^2 c_k, \quad c'_{pt} = q_{kp}^2 q_{st}^2 c_{ks}, \quad c'_{ptv} = q_{kp}^2 q_{st}^2 q_{uv}^2 c_{ksu}; \quad q_{ij} = \cos(\mathbf{l}_i, \mathbf{l}'_j) \tag{2.4}$$

В этих соотношениях $\mathbf{l}_i, \mathbf{l}'_j$ – векторы ортонормированного базиса соответственно исходной и новой канонической системы координат. При повороте канонической системы координат на прямой угол против часовой стрелки вокруг осей ε_1, ε_2, ε_3 имеем

$$q_{kp} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad q_{kp} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad q_{kp} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

В этом случае получаем

$$c_0 \equiv B_0, \quad c_1 = c_2 = c_3 \equiv B_1, \quad c_{11} = c_{22} = c_{33} \equiv 0$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} \equiv B_2, \quad c_{111} = c_{222} = c_{333} \equiv B_3$$

$$c_{122} = c_{133} = c_{211} = c_{233} = c_{311} = c_{322} \equiv -{}^3\!/_2 B_3, \quad c_{123} \equiv B_4$$

Таким образом, разложение (2.3) приобретает вид

$$\begin{gathered} F(\varepsilon_1/r, \varepsilon_2/r, \varepsilon_3/r) = B_0 - B_2 + (B_1 - {}^3\!/_2 B_3 - 3B_4)\xi + \\ + B_2\xi^2 + B_4\xi^3 + ({}^5\!/_2 B_3 + 2B_4)\eta^3 + \ldots \end{gathered} \tag{2.5}$$

Неинвариантность потенциала $W(\varepsilon)$ относительно инверсии обусловлена членами ряда (2.5), зависящими от безразмерных скалярных параметров ξ и η:

$$\xi = I_1 / \sqrt{I_2}, \quad |\varepsilon| \leq \sqrt{3}; \quad \eta = I_3^{1/3} / \sqrt{I_2}, \quad |\eta| \leq 1$$

$$(I_1 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki})$$

Параметр ξ характеризует соотношение между объемной и средней сдвиговой деформациями в элементарном объеме среды, параметр η, кроме того, учитывает и соотношение между максимальным и средним сдвигами. К необходимости введения в рассмотрение аналогичных параметров или одного из них приходим при анализе экспериментальных диаграмм деформирования материалов, характеристики которых зависят от вида напряженного состояния [10, 11].

Невыписанные в разложении (2.5) члены ряда, соответствующие $l = 4, 5, \ldots$ из (2.2), выражают более тонкие детали изменения функции F в зависимости от вида деформации – от значений параметров ξ и η. Ограничиваясь приведенными в (2.5) членами ряда и вводя подходящие обозначения

$$B_2 = \tfrac{1}{2}\lambda,\quad B_0 = \mu - \tfrac{1}{2}\lambda,\quad B_4 = \alpha,\quad B_3 = \tfrac{2}{3}(\beta - 2\alpha),\quad B_1 = \tfrac{3}{5}(\beta + 3\alpha) - \nu$$

получаем

$$W(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1\sqrt{I_2} + \alpha\frac{I_1^3}{\sqrt{I_2}} + \beta\frac{I_3}{\sqrt{I_2}},\quad |\varepsilon| > 0 \tag{2.6}$$

Видно, что если потребовать инвариантность выражения для $W(\varepsilon)$ по отношению к инверсии $\varepsilon'_i = -\varepsilon_i$, то $W(\varepsilon)$ переходит в классический упругий потенциал. Разномодульность описывается слагаемыми в выражении (2.6), начиная с третьего, которое можно рассматривать в качестве первого приближения [7, 12, 13].

Реализация потенциала $W(\varepsilon)$ в виде (2.6) с использованием разложения (2.3) функции $F(\varepsilon_1/r, \varepsilon_2/r, \varepsilon_3/r)$ может рассматриваться в качестве основы для проведения систематических исследований эффектов разномодульности в изотропно-упругих средах.

3. Определяющие соотношения механики РМС. На основании выражения (2.6) и наложенных на $W(\varepsilon)$ условий определяющие уравнения связи напряжений с деформациями записываются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = (\lambda - \nu/\xi + 3\alpha\xi)I_1\delta_{ij} + (2\mu - \nu\xi - \alpha\xi^3 - \beta\eta^3)\varepsilon_{ij} + 3\beta\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}/\sqrt{I_2},$$
$$|\varepsilon| > 0;\quad \sigma_{ij} = 0,\quad |\varepsilon| = 0 \tag{3.1}$$

В (3.1) тензоры напряжений и деформаций соосны.

Для обращения зависимостей (3.1) воспользуемся общей формой разложения тензора деформаций в базисе пространства соосных тензоров напряжений [14–16]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}I_1\frac{\partial J_1}{\partial\sigma_{ij}} + \tau\gamma\cos\chi\left(\frac{1}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma_{ij}} - \operatorname{tg}\chi\frac{\partial\chi_\sigma}{\partial\sigma_{ij}}\right) \tag{3.2}$$

Выражения для обобщенных объемного модуля $K + \varphi(\xi, \eta)$, модуля сдвига $G + \psi(\xi, \eta)$ и фазы подобия девиаторов $\chi(\xi, \eta)$ можно получить сверткой произведения соотношений (3.1) соответственно с тензорами $\delta = (\delta_{ij})$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ и $\operatorname{tr}\sigma^2$. В результате учитывая равенство $2W = \tfrac{1}{3}I_1J_1 + \tau\gamma\cos\chi$

а также выражение для следа степени тензора деформаций согласно теоремы Гамильтона–Кэли получим

$$K + \varphi(\xi,\eta) = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu - \nu\left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3}\right) + \alpha\left(3\xi - \frac{\xi^3}{3}\right) + \beta\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\eta^3}{3}\right)$$

$$G + \psi(\xi,\eta) = \left[g^2(\xi,\eta) + \frac{9\beta^2}{3-\xi^2}\left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4}\xi^2 + \tfrac{1}{8}\xi^4 + \xi\eta^3\right) + 3\beta\frac{3\eta^3 - \xi}{3-\xi^2}g(\xi,\eta)\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

$$\chi(\xi,\eta) = \arccos\left\{[G + \psi(\xi,\eta)]^{-1}\left(\mu - \tfrac{1}{2}\nu\xi - \tfrac{1}{2}\alpha\xi^3 - \tfrac{1}{2}\beta\frac{\xi - 2\eta^3 - \tfrac{1}{3}\xi^2\eta^3}{1 - \tfrac{1}{3}\xi^2}\right)\right\}$$

Таким образом, окончательно определяющие уравнения связи деформаций с напряжениями записываются в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\tfrac{1}{9}J_1\delta_{ij}}{K + \varphi(\xi,\eta)} + \frac{\tfrac{1}{2}}{G + \psi(\xi,\eta)}\left[(\cos\chi + \sin\chi\operatorname{tg}3\chi_\sigma)s_{ij} + \frac{3\sin\chi}{\cos3\chi_\sigma}\left(\frac{s_{ik}s_{kj}}{\tau} - \frac{2}{9}\tau\delta_{ij}\right)\right],$$
$$|\sigma| > 0;\quad \varepsilon_{ij} = 0,\quad |\sigma| = 0\quad (|\sigma| = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}) \tag{3.4}$$

В соотношениях (3.4) обобщенные модули и фаза подобия девиаторов определяются согласно (3.3) и соотношениями

$$J_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij},\quad \tau = \sqrt{3/2\, s_{ij}s_{ij}},\quad \gamma = \sqrt{2/3\, e_{ij}e_{ij}},\quad s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\, J_1\delta_{ij},\quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\, I_1\delta_{ij}$$

$$\chi = \chi_\sigma - \chi_\varepsilon,\quad \chi_\sigma = -1/3 \arcsin(9/2\, S_3/\tau^3),\quad |\chi_\sigma| \le \pi/6 \tag{3.5}$$

$$\chi_\varepsilon = -1/3 \arcsin(4/3\, E_3/\gamma^3),\quad |\chi_\varepsilon| \le \pi/6,\quad S_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki},\quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}$$

$$g(\xi,\eta) = \mu - 1/2\, \nu\xi - 1/2\, \alpha\xi^3 - 1/2\, \beta\eta^3$$

Значения параметров ξ и η находятся из системы уравнений

$$\frac{3\xi[K+\varphi(\xi,\eta)]}{H(\xi,\eta)} = \frac{J_1}{\tau},\quad \frac{(\eta^3 - \xi + 2/9\,\xi^3)\theta(\xi,\eta)}{H^3(\xi,\eta)} = \frac{S_3}{\tau^3}. \tag{3.6}$$

Здесь

$$H(\xi,\eta) = \sqrt{2(3-\xi^2)}\,[G+\psi(\xi,\eta)]$$

$$\theta(\xi,\eta) = 8g^3(\xi,\eta) + (\eta^3 - \xi + 2/9\,\xi^3)^{-1}\{3/4\,\beta^3[12\eta^6 - 12\xi\eta^3(1-\xi^2) -$$

$$-1 + 9\xi^2 - 15\xi^4 + 3\xi^6] + 2\beta g^2(\xi,\eta)(12\xi\eta^3 + 3 - 14\xi^2 + 3\xi^4) +$$

$$+\beta^2 g(\xi,\eta)[3\eta^3(3+7\xi^2) + 3\xi - 27\xi^3 + 6\xi^5]\}$$

В случае плоской деформации параметры ξ и η взаимосвязаны: $\tau^3 = 1/2\,\xi(3-\xi^2)$, и решение системы (3.6) сводится к решению только одного уравнения этой системы.

В общем случае, согласно последнему соотношению (3.3), девиаторы тензоров напряжений и деформаций не являются подобными – фаза их подобия χ при $\beta \ne 0$ отлична от нуля, отношения главных компонент девиаторов этих тензоров не равны друг другу. В случае равномерного трехосного сжатия или растяжения $\tau = 0$, $S_3 = 0$, согласно (3.6), деформаций сдвига в среде не возникает: $\xi = \mp\sqrt{3}$, $\eta^3 = \mp 1/\sqrt{3}$. При чистом сдвиге $J_1 = 0$ деформации сдвига сопровождаются деформациями объема. При простом сдвиге имеют место эффекты Пойнтинга и Кельвина–Вертгейма. При пропорциональном изменении напряжений $\sigma_{ij} = t\overset{0}{\sigma}_{ij}$, $t = \mathrm{const}$, параметры ξ и η остаются постоянными, и, следовательно, диаграммы деформирования (3.4) прямолинейны.

Потенциал $W(\varepsilon)$ можно рассматривать как функцию параметров состояния I_1, γ и χ_ε. Условием этого являются дифференциальные соотношения, связывающие обобщенные модули упругости и фазу подобия девиаторов

$$3\xi^2\eta^2\varphi'_\xi + 2\eta^2(3-\xi^2)[\cos\chi(G+\chi)]'_\xi + (1-\xi\eta^3)\left\{\frac{3\xi^2}{3-\xi^2}\varphi'_\eta + 2[\cos\chi(G+\psi)]'_\eta\right\} = 0$$

$$4\eta^2(3-\xi^2)[\sin\chi(G+\psi)]'_\xi + \xi\sqrt{2(3-\xi^2)}\cos 3\chi_\varepsilon\varphi'_\eta + 4(1-\xi\eta^3)[\sin\chi(G+\psi)]'_\eta = 0$$

$$6\xi\eta^2(3-\xi^2)[\sin\chi(G+\psi)]'_\xi = \sqrt{2}(3-\xi^2)^{3/2}\cos 3\chi_\varepsilon[\cos\chi(G+\psi)]'_\eta + \tag{3.7}$$

$$+3\xi\frac{\xi\eta^3 - 1}{3-\xi^2}[\sin\chi(G+\psi)]'_\eta + 36\eta^3\sin\chi\,(G+\psi)$$

Соотношения (3.7) определяют характер взаимосвязанного изменения модулей и фазы при изменении параметров ξ и η в процессе деформирования. Согласно (3.7) при пропорциональном изменении компонент тензора напряжений фаза подобия девиаторов χ равна нулю, определяющие соотношения (3.4), (3.1) линейны. Параметр η может быть постоянным только при пропорциональном изменении напряжений. Если обобщенный объемный модуль – возрастающая функция от η, то произведение обобщенного модуля сдвига на $\cos\chi$ – убывающая функция от η и $\chi_\sigma > \chi_\varepsilon$, и наоборот. Заметим, что $\operatorname{sign}\varphi'_\eta = -\operatorname{sign}\beta$. Соотношения (3.7) определяют также возможные виды диаграмм деформирования РМС.

4. Двойственные формулировки. Энергетические принципы для РМС. Для потенциала $W(\varepsilon)$ верны равенства

$$W(\varepsilon) + W^*(\sigma) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad W^*(\sigma) = \sup_\varepsilon[\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} - W(\varepsilon)] \tag{4.1}$$

При этом вследствие теоремы Эйлера

$$W(\varepsilon) = W^*(\sigma) = \tfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{4.2}$$

Преобразование Лежандра [6] потенциала $W(\varepsilon)$ инволютивно:

$$W(\varepsilon) = \sup_\sigma[\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W^*(\sigma)], \quad \varepsilon_{ij} = \partial W^* / \partial\sigma_{ij} \tag{4.3}$$

Равенства (4.1)–(4.3) представляют собой двойственную формулировку теории РМС, использующей потенциалы $W(\varepsilon)$ или $W^*(\sigma)$. Как видно из (4.2), (4.3), эта формулировка для РМС (точно так же как и в классической теории упругости) включает в себя формулу Клапейрона и равенство потенциала напряжений и деформаций.

Принцип виртуальных работ при обычных предположениях [17] также допускает вариационную формулировку

$$\begin{gathered} \underline{I} = \inf_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u}), \quad I(\mathbf{u}) = \int_V W(\varepsilon(\mathbf{u}))d\upsilon - \int_V \mathbf{F}\mathbf{u}d\upsilon - \int_{S_p} \mathbf{P}\mathbf{u}ds \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))$ – кинематически допустимые поля смещений в эйлеровой системе координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $u = u_0$ на части границы $S_u = S - S_p$ области V, занятой сплошной средой; $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ – плотности массовых и поверхностных сил.

Задача, двойственная задаче (4.4), записывается в виде

$$\overline{I}^* = \sup_\sigma I^*(\sigma), \quad I^*(\sigma) = \int_V W^*(\sigma)d\upsilon - \int_{S_u}(\sigma\mathbf{n})\mathbf{u}_0 ds \tag{4.5}$$

где σ – статически допустимые поля напряжений: $\partial\sigma_{ij} / \partial x_j + F_i = 0$ в области V, $\sigma_{ij}n_j = P_i$ на поверхности S_p, $\mathbf{n}$ – вектор единичной внешней нормали к площадке ds.

Аналогично случаю линейной упругости [17] имеем

$$\underline{I} = \overline{I}^*, \quad \inf_{\mathbf{u}} I(\mathbf{u}) = \sup_\sigma I^*(\sigma) \tag{4.6}$$

При учете (4.2) из (4.6) получим теорему Клапейрона

$$2\int_V W(\varepsilon)d\upsilon = \int_V \mathbf{F}\mathbf{u}d\upsilon + \int_S \mathbf{P}\mathbf{u}ds \tag{4.7}$$

Очевидно также, что вследствие (4.2) экстремальные задачи (4.4), (4.5) являются энергетическими принципами Лагранжа и Кастильяно для РМС. Теорема взаимности работ Бетти, вообще говоря, не выполняется, кроме случая пропорционального изменения напряжений во всех точках области V. Это имеет место и в предположении тензорной линейности [4].

Отметим, что данное разложение потенциала $W(\varepsilon)$ может быть также принято в качестве основы для разработки модели сыпучей среды, предложенной ранее [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. МТТ. 1966. № 2. С. 44–53.
2. *Шапиро Г.С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. МТТ. 1966. № 2. С. 123–125.
3. *Матченко Н.М., Толоконников Л.А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инж. журн. МТТ. 1968. № 6. С. 108–110.
4. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
5. *Шубников А.В.* Проблема дисимметрии материальных объектов. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 56 с.
6. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
7. *Олейников А.И.* Уравнения теории упругости и условие разрушения для разномодульных материалов // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1986. № 1. С. 12–19.
8. *Гельфанд И.М., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7. № 1. С. 3–117.
9. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
10. *Березин А.В.* Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука, 1990. 135 с.
11. *Лоде В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теории пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 168–205.
12. *Маслов В.П., Мосолов П.П.* Теория упругости для разномодульной среды. М.: МИЭМ, 1985. 99 с.
13. *Мясников В.П., Олейников А.И.* Уравнения теории упругости и условие текучести для сыпучих линейно дилатирующих сред // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. ископаемых. 1984. № 6. С. 14–19.
14. *Новожилов В.В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1951. Т. 15. № 2. С. 183–194.
15. *Черных К.Ф.* О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга. // Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 481–486.
16. *Цвелодуб И.Ю.* О построении определяющих уравнений установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ 1979. № 3. С. 104–110.
17. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
18. *Мясников В.П., Олейников А.И.* Деформационная модель идеально сыпучей зернистой среды // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 3. С. 565–568.

Кривой Рог

Поступила в редакцию
9.VI.1992