

УДК 531.36

© 1993 г. В.В. Козлов

О СТЕПЕНИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Степень неустойчивости положения равновесия автономной динамической системы называется число собственных чисел ее линеаризации, лежащих в правой полуплоскости. Рассматриваются диссипативные системы, допускающие функции Морса, не возрастающие вдоль их траекторий. Критические точки таких функций совпадают с положениями равновесия. Показано, что степень неустойчивости невырожденного положения равновесия имеет ту же четность, что и индекс функции Морса в этой точке. В частности, если индекс нечетный, то равновесие неустойчиво. Этот результат распространен на компактные инвариантные многообразия динамической системы, удовлетворяющие условиям невырожденности, приводимости и эргодичности. В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости стационарных движений тяжелого цилиндрического твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости с ненулевой циркуляцией.

1. Степень неустойчивости. Пусть v – гладкое векторное поле на n -мерном многообразии M с локальными координатами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Оно порождает динамическую систему на M

$$\dot{x} = v(x) \tag{1.1}$$

Предположим, что $x = 0$ – положение равновесия: $v(0) = 0$. Тогда в окрестности этой точки система (1.1) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + o(|x|)$$

где A – матрица Якоби поля v в точке $x = 0$.

Степень неустойчивости равновесия $x = 0$ назовем число собственных чисел матрицы A (считая кратности) с положительной вещественной частью. Это определение является естественным обобщением определения степени неустойчивости положений равновесий обратимых механических систем, предложенного Пуанкаре (см. [1]). В частности, если степень неустойчивости нечетна, то характеристический многочлен матрицы A имеет положительный вещественный корень.

Степень неустойчивости можно определить и для приводимого компактного инвариантного многообразия N системы (1.1). Пусть y – локальные координаты на N , а z – координаты в трансверсальном направлении. В этих переменных многообразии N задается соотношением $z = 0$, а уравнения (1.1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= u(y) + f(y, z), & \dot{z} &= Az + g(y, z) \\ f(y, 0) &= 0, & g &= O(|z|^2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь u – ограничение поля v на N . Ввиду предположения о приводимости,

в подходящих координатах y, z матрица A постоянна. Если $\dim N = 1$ (т.е. N – периодическая траектория), то уравнения (1.2) всегда приводимы (теорема Флоке–Ляпунова). Степенью неустойчивости N снова назовем число собственных чисел матрицы A с положительной вещественной частью; обозначим его $\deg N$.

Задача о приводимости инвариантных многообразий размерности ≥ 2 достаточно сложная. Она не решена полностью даже для случая тора (см., например [2]).

Инвариантное многообразие N назовем *невыврожденным*, если $|A| \neq 0$. Справедлива простая

Лемма 1. Пусть N – приводимое невырожденное инвариантное многообразие. Тогда

$$\deg N \equiv \frac{1}{2}(1 - \text{sign} | -A |) \pmod{2} \quad (1.3)$$

Действительно, так как комплексные собственные значения встречаются парами, то $\deg N$ по модулю 2 равно числу положительных вещественных корней характеристического многочлена (считая кратности). Далее знак коэффициента при λ^n характеристического многочлена матрицы A совпадает со знаком $| -A |$. Остается применить теорему Декарта о числе положительных корней многочлена.

Укажем одно из следствий. Предположим, что система (1.1) зависит от параметра α и имеет гладкое по α семейство приводимых невырожденных инвариантных многообразий N_α . Если при некотором α степень неустойчивости N_α нечетна, то при всех значениях α многообразие N_α будет неустойчивым.

Задача об условиях существования инвариантных многообразий размерности ≥ 2 при гладком возмущении исходной системы рассматривалась в [3]. При этом на инвариантное многообразие накладываются жесткие ограничения. Если же $\dim N \leq 1$, то продолжаемость по параметру α положения равновесия или периодического решения гарантируют условия невырожденности.

Рассмотрим более подробно случай положений равновесия. Пусть γ – гладкая регулярная кривая в $(n+1)$ -мерном пространстве $M \times \mathbb{R}_\alpha$ (\mathbb{R}_α – вещественная ось параметра α), являющаяся одной из кривых равновесий: если $(x_*, \alpha_*) \in \gamma$, то $x = x_*$ – равновесие системы (1.1) при $\alpha = \alpha_*$. Далее пусть

$$\dots, (x_k, \alpha_0), (x_{k+1}, \alpha_0), \dots$$

– точки трансверсального пересечения кривой γ с "плоскостью" $\alpha = \alpha_0$, расположенные последовательно на γ .

Предложение 1. Разность $\deg x_{k+1} - \deg x_k$ нечетная для всех k .

Это – аналог известного результата Пуанкаре о законе смены устойчивости (см. [1]). Четаев [4] получил аналогичное соотношение для индексов особых точек, используя известную теорему Пуанкаре–Кронекера о сумме индексов. Так как индекс невырожденной особой точки равен ± 1 в зависимости от знака $|A|$, то предложение 1 есть следствие результата Четаева и леммы 1.

2. *Диссипативные системы.* Предположим, что найдется гладкая функция $F: M \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$F' = (\partial F / \partial x, v) \leq 0$$

Такую систему будем называть *диссипативной*. Функция F как бы играет роль полной энергии. Было показано [5], что невырожденные критические точки функции F отвечают положениям равновесия системы (1.1).

Основной результат составляет

Теорема 1. Пусть x_0 – невырожденное положение равновесия системы (1.1), являющееся невырожденной критической точкой функции F . Тогда

$$\deg x_0 \equiv \text{ind}_{x_0} F \pmod{2} \quad (2.1)$$

В этом равенстве справа стоит индекс функции F в критической точке x_0 .

Следствие. Пусть F – функция Морса. Тогда ее критические точки нечетного индекса являются неустойчивыми равновесиями системы (1.1).

В случае, когда F – интеграл (1.1), это утверждение установлено в [6] (простое доказательство приведено в [7]). Если n четно, то условие $F' \leq 0$ можно заменить условием $F' \geq 0$.

Указанное следствие – естественное обобщение известной теоремы Кельвина–Четаева о неустойчивости равновесия механической системы с нечетной степенью неустойчивости Пуанкаре при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил. Действительно, пусть F – интеграл энергии обратимой системы. Его индекс в положении равновесия будет, очевидно, нечетным. Он не изменится при добавлении гироскопических сил. Так как после добавления диссипативных сил $F' \leq 0$, то неустойчивость равновесия вытекает из следствия теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Положим $\Phi = -F$ и пусть $x = 0$ – невырожденная критическая точка функции Φ . В ее окрестности

$$\Phi = \Phi(0) + (Bx, x)/2 + o(|x|^2)$$

Так как $\Phi' \geq 0$, то квадратичная форма (x, BAx) неотрицательна. Положим $D = (BA + A^T B)/2$. Следовательно, симметричная матрица D также неотрицательна. Положим $C = BA$. Так как, по предположению, матрицы A и B невырождены, то $|C| \neq 0$. Поскольку $(C + C^T)/2 = D$, то

$$C = D + J,$$

где J – кососимметричная матрица.

Справедлива следующая алгебраическая

Лемма 2. Если $D \geq 0$, то $|D + J| \geq 0$, для любой кососимметрической матрицы J .

Для простоты изложения рассмотрим случай $n = 3$. Найдется невырожденная матрица K , такая, что $K^T DK$ будет иметь диагональный вид. Так как $|KK^T| > 0$, то знак определителя

$$|K^T DK + K^T JK| = |K^T K| |D + J|$$

будет совпадать со знаком $|D + J|$. Поскольку матрица $K^T JK$ кососимметрическая, то можно считать, что матрица D уже приведена к диагональной форме. Далее

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & b \\ -a & \mu & c \\ -b & -c & \nu \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu + \lambda c^2 + \mu b^2 + \nu a^2 \geq 0$$

если числа λ, μ, ν неотрицательны. Что и требовалось.

Итак, согласно лемме 2, $|C| > 0$. Значит, $\text{sign}|-A| \text{sign}|-B| > 0$.

Ясно, что $\text{sing}|-B| = (-1)^{\text{ind} F}$.

Следовательно, по лемме 1, $\text{deg}(0) \equiv \frac{1}{2}[1 - (-1)^{\text{ind} F}] \pmod{2}$.

Если индекс F четный, то $\text{deg}(0) \equiv 0 \pmod{2}$, если же нечетный, то $\text{deg}(0) \equiv 1 \pmod{2}$. Теорема доказана.

3. Некоторые обобщения. Пусть N – связное компактное приводимое m -мерное инвариантное многообразие динамической системы (1.1), ограничение которой на N обладает инвариантной мерой с плотностью $\rho > 0$. В окрестности N уравнения (1.1) имеют вид (1.2). Ограничение системы (1.1) на N задается уравнением

$$\dot{y} = u(y), \quad y \in N \quad (3.1)$$

Пусть

$$F(y, z) = F_0(y) + (z, h(y)) + (B(y)z, z)/2 + \dots$$

– гладкая функция, заданная в окрестности N , причем $F' \leq 0$. Ясно, что F_0 – гладкая функция на N – производная от которой в силу системы (3.1) неположительна.

Лемма 3. Если система (3.1) эргодична, то $F_0 = \text{const}$.

Простейший пример эргодической системы – условно-периодическое движение по m -мерному тору $N = \mathbb{T}^m = \{y_1, \dots, y_m \pmod{2\pi}\}$:

$$\dot{y}_1 = \omega_1, \dots, \dot{y}_m = \omega_m; \quad \omega_j = \text{const} \quad (3.2)$$

В типичном случае, когда частоты $\omega_1, \dots, \omega_m$ несоизмеримы, эта система эргодична. В частности, сюда относятся периодические траектории ($m = 1$).

Доказательство леммы 3. Положим $F_0 = \Phi \leq 0$. Тогда

$$\frac{1}{T} [F_0(y(T)) - F_0(y(0))] = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(y(t)) dt \quad (3.3)$$

Так как F_0 – непрерывная функция на компакте N , то она ограничена. Следовательно, предел левой части равенства (3.3) при $T \rightarrow \infty$ равен нулю. С другой стороны, по эргодической теореме Биркгофа [8], предел правой части (3.3) равен

$$\frac{1}{\text{mes} N} \int_N \rho \Phi d^m y, \quad \text{mes} N = \int_N \rho d^m y$$

Так как $\rho > 0$, $\Phi \leq 0$ и этот интеграл обращается в нуль, то $\Phi = 0$. Следовательно, F_0 – интеграл системы (3.1). Ввиду ее эргодичности, $F_0 = \text{const}$. Лемма доказана.

Линейные слагаемые по z в выражении для F' имеют вид

$$(Az, h) + (z, h') \quad (3.4)$$

где h' – производная ковекторного поля h в силу системы (3.1). Так как $F' \leq 0$, то сумма (3.4) равна нулю. Отсюда получаем уравнение

$$(\partial h / \partial y, u) = -A^T h \quad (3.5)$$

Инвариантное многообразие N назовем *сильно невырожденным*, если уравнение (3.5) может иметь только нулевое решение. Из сильной невырожденности вытекает обычная невырожденность N , определенная в разд. 1 (в противном случае уравнение (3.5) допускает нетривиальное решение $h = \text{const}$). Для инвариантного многообразия (3.2) условие сильной невырожденности означает, что матрица A не имеет собственных чисел вида $i(k_1\omega_1 + \dots + k_m\omega_m)$, $k_j \in \mathbb{Z}$. Для периодических траекторий ($m = 1$) оно эквивалентно условию, что мультипликаторы отличны от единицы.

Итак, при сделанных предположениях ряд Тейлора функции F в окрестности N начинается с квадратичной формы по z . Усредним эту форму по инвариантному многообразию N :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \int_N (B(y)z, z) \rho(y) d^m y \quad (3.6)$$

Теорема 2. Пусть связное компактное инвариантное многообразие N приводимо, эргодично и сильно невырождено. Если квадратичная форма (3.6) невырождена, то $\text{deg } N \equiv \text{ind } \Phi \pmod{2}$.

Следствие. Если выполнены все условия теоремы 2 и форма Φ имеет нечетный индекс, то многообразие N неустойчиво.

Это утверждение можно рассматривать как частичное обращение теоремы об устойчивости инвариантных многообразий, установленной в [5]. Если F – интеграл системы (1.1), то заключение о неустойчивости установлено в [7]. Теорема 2 доказывается точно так же, как теорема 1. При этом используется схема, изложенная в [7].

4. Некоторые приложения. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу гидродинамики о падении тяжелого цилиндрического твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что образующие цилиндрического тела ортогональны плоскости потока. По теореме Томсона циркуляция жидкости Γ вокруг цилиндра постоянна.

В некоторой связанной с телом системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ (ось $O\xi$ ортогональна плоскости потока) кинетическая энергия системы "тело плюс жидкость" имеет следующий вид:

$$(a_1 u^2 + a_2 v^2 + b \varphi^2) / 2$$

где u, v – проекции скорости точки O на оси $O\xi, O\eta$, φ – угол поворота тела. Коэффициенты a_1, a_2 и b включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции.

Уравнения движения тяжелого твердого тела в жидкости можно представить в виде уравнений Кирхгофа ([9], разд. 134а)

$$\begin{aligned} a_1 \dot{u} + a_2 v \dot{\varphi} + \lambda v &= -p \cos \varphi, & a_2 \dot{v} - a_1 u \dot{\varphi} - \lambda u &= -p \sin \varphi \\ b \dot{\varphi} + (a_1 - a_2) u v &= p(\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\lambda = \rho \Gamma$, ρ – плотность жидкости, p – вес тела минус сила Архимеда, для плоского однородного тела ξ, η – декартовы координаты его центра масс. Будем считать, что $a_2 > a_1$, и $\lambda \neq 0$.

Задача о стационарных движениях тела и их устойчивости изучалась в [10]. Положения равновесия системы (4.1) определяются равенствами

$$\lambda u = p \sin \varphi, \quad \lambda v = -p \cos \varphi, \quad \varphi = \varphi_* \quad (4.2)$$

где φ_* – корень уравнения

$$g(\varphi) = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\alpha = -\xi \lambda^2 / [p(a_2 - a_1)], \quad \beta = \eta \lambda^2 / [p(a_2 - a_1)]$$

Уравнения (4.1) допускают интеграл

$$F = \frac{a_1}{2} \left(u - \frac{p}{\lambda} \sin \varphi \right)^2 + \frac{a_2}{2} \left(v + \frac{p}{\lambda} \cos \varphi \right)^2 + \frac{b}{2} \varphi^2 + \frac{p^2(a_2 - a_1)}{\lambda^2} G(\varphi)$$

где G – первообразная функция g . Если $\varphi = \varphi_*$ – строгий локальный минимум функции G , то стационарное движение (4.2) устойчиво по теореме Ляпунова. Если же в этой точке функция G имеет локальный максимум, то равновесие (4.2) будет невырожденным и индекс функции F в этой точке равен единице. Следовательно, по теореме 1, равновесие (4.2) неустойчиво. Отметим, что F не совпадает с полной механической энергией рассматриваемой системы.

Невырожденные минимумы и максимумы функции G чередуются. Отсюда вытекает перемежаемость значений угла φ , отвечающих устойчивым и неустойчивым движениям. Это явление, отмеченное в [10], является частным случаем закона смены устойчивости из предложения 1.

В правую часть третьего уравнения системы (4.1) можно добавить диссипативное слагаемое $-\mu \dot{\varphi}$, где μ – положительный коэффициент, который может зависеть от положения твердого тела. При этом стационарные решения (4.2) не изменяются. Так как $F' \leq 0$, то сохраняют силу сформулированные выше заключения об устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка. 1969. 247 с.
3. Трещев Д.В. О сохранении инвариантных многообразий гамильтоновых систем при возмущении // Мат. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 4. С. 123–131.
4. Четаев Н.Г. Характеристики Кронекера // Учен. зап. Казан. ун-та. 1938. Т. 98. Кн. 9. Математика. Вып. 3. С. 1–41.
5. Karapetyan A.V. The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Societ. Janos Bolyai. 53. Qualitative theory of differential equations. Szeged (1988); Amsterdam; New York; North Holland, 1990. P. 271–290.
6. Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости стационарных движений. // Теор. и прилож. механика. 1974. Т. 5. № 1. С. 67–79.
7. Козлов В.В. Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
9. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
10. Козлов В.В. О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости с ненулевой циркуляцией // МТТ. 1993. № 4. С. 113–117.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.1993