

УДК 539.3

© 1993 г. С.А. Назаров, О.Р. Полякова

## АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦЫ ТИПА "ВЕРШИНЫ КЛЮВА"

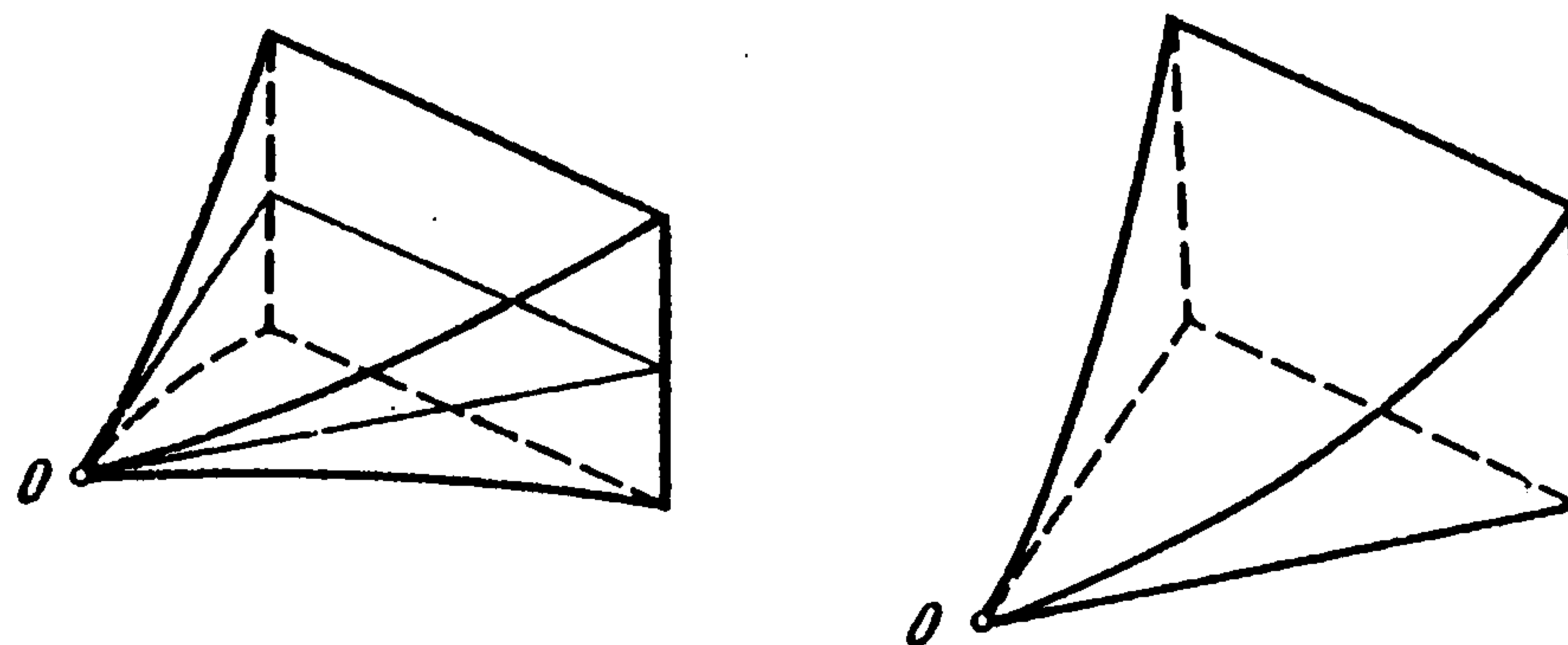
Изучается асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного упругого тела в окрестности особой точки специального типа. Вблизи этой точки граница тела образована четырьмя поверхностями: двумя плоскостями, составляющими двугранный угол, и двумя гладкими поверхностями, касающимися одна другой в точке на ребре угла. (Подобные особенности имеются у режущих кромок некоторых инструментов.) Приводится процедура определения структуры асимптотических решений.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $m$  – натуральное число,  $h_{\pm}$  – гладкие функции угловой переменной  $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$ ,  $\alpha \in (0, \pi]$ ;  $h(\varphi) = h_+(\varphi) + h_-(\varphi) > 0$  при  $|\varphi| < \alpha$ . Пусть еще  $\Omega$  – ограниченное тело в  $\mathbb{R}^3$ , причем в окрестности начала координат  $O$  оно задается соотношениями

$$-H_-(x_1, x_2) < x_3 < H_+(x_1, x_2)$$

$$H_{\pm}(x_1, x_2) = r^{2m} h_{\pm}(\varphi), \quad |\varphi| < \alpha \quad (1.1)$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты. В этом случае точку  $O$  называем особой точкой типа вершины "клюва" (фигура).



Материал упругого тела  $\Omega$  будем считать однородным и изотропным, с константами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Полагаем, что основания  $\Gamma_{\pm} = \{x: z = \pm r^{2m} h_{\pm}(\varphi), r > 0, |\varphi| < \alpha\}$  свободны от напряжений. На боковых поверхностях  $\Sigma_{\pm} = \{x: -r^{2m} h_-(\varphi) < z < r^{2m} h_+(\varphi), r > 0, \varphi = \pm\alpha\}$  поставим одно из двух условий: либо нулю равен вектор смещений  $u$  (условие Дирихле), либо нулю равны компоненты  $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi z}$  тензора напряжений (условие Неймана). Из рассмотрения не исключается случай, когда в (1.1) переменная  $\varphi$  пробегает единичную окружность  $S_1^1$ , т.е. две

гладкие поверхности, ограничивающие тело, касаются в точке  $O$ , и  $\Sigma_{\pm}$  – пустые множества.

Далее приводится формальное (без строгого обоснования) построение асимптотики напряженно-деформированного состояния около точки  $O$ ; используются методы исследования краевых задач в тонких областях (см. [1–4] и др.). Применение таких методов обусловлено тем, что тело  $\Omega$  вырезает на сфере  $S_{\delta}^2$  с центром  $O$  и с малым радиусом  $\delta$  область, которая представляет собой тонкий (шириной  $O(\delta^{2m-1})$  и длиной  $O(\delta)$ ) криволинейный пояс, а именно геометрия множества  $\Omega \cap S_{\delta}^2$  и определяет поведение решения вблизи особенности (ср. с [5–7]). Отметим, что те же самые методы позволяют изучить асимптотику на бесконечности решений упругих задач в слое или его секторе [8,9].

Асимптотика поля смещений  $u$  вблизи вершины клюва содержит (как и в задачах с особенностями границы других типов) линейную комбинацию специальных асимптотических решений  $u$  с коэффициентами, зависящими от данных задачи в целом (от нагрузки и от всей области  $\Omega$ ). Сами же решения  $u$  определяются только формой клюва (соотношениями (1.1)) и локальными свойствами упругого материала. В случае конической точки асимптотические решения имеют простой вид

$$\rho^{\Lambda} \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} (\ln \rho)^k \Phi^{(q-k)}(\omega), \quad q = 0, \dots, \kappa - 1 \quad (1.2)$$

где  $\rho, \omega$  – сферические координаты,  $\Lambda$  и  $\Phi^{(0)}, \dots, \Phi^{(\kappa-1)}$  – некоторые число и вектор-функции. Для вершины клюва структура асимптотического решения значительно усложняется и требует отдельного исследования, что и составляет предмет статьи.

На протяжении всей работы используется прием введения фиктивного малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Видно, что соотношения (1.1) инвариантны относительно неравномерного растяжения координат

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \mapsto (y, \zeta) \\ y &= (y_1, y_2) = \varepsilon^{-\gamma} (x_1, x_2), \quad \zeta = \varepsilon^{-1} x_3, \quad \gamma = (2m)^{-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Так как  $\gamma < 1$ , то  $\zeta$  естественно объявить "быстрой" переменной, расщепить операторы задачи в ряды по степеням  $\varepsilon^{1-\gamma}$  и затем воспользоваться алгоритмами из [1–4]. Таким образом удастся избавиться от переменной  $z = x_3$ , которая изменяется в узком, исчезающем при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , интервале, и получить систему трех дифференциальных уравнений в угле  $K = \{(x_1, x_2): r > 0, |\varphi| < \alpha\}$ , которой должен удовлетворять главный член  $(v, w)$  асимптотического решения  $u$ . Вывод системы и преобразование ее к самосопряженной форме представлены в разд. 2. Раздел 3 посвящен рассмотрению случая касания гладких поверхностей – обсуждаются общие вопросы отыскания степенных решений вырождающейся системы на  $K = \mathbb{R}^2 \setminus 0$  ("полный" угол), приводятся явные формулы при наличии симметрии  $h_+ = h_-$  и дается истолкование решениям, растущим около  $O$ . В разд. 4 считается, что боковая поверхность  $\Sigma_{\pm}$  "клюва" жестко закреплена. Соответственно на сторонах угла  $K$  ставятся условия Дирихле; при этом процедура отыскания степенных решений краевой задачи в  $K$  остается прежней. Новый момент в разд. 4 – построение асимптотических поправок, появляющихся в  $u$  из-за пограничных слоев вблизи боковой поверхности  $\Sigma_{\pm}$ . Как и в [1, 2], требование экспоненциального затухания пограничного слоя позволяет вывести и сами краевые условия на  $\partial K$ ; для случая свободной боковой поверхности это делается в разд. 5.

**2. Вывод системы предельных уравнений.** В координатах (1.3) оператор Ламе

записывается следующим образом:

$$L(\nabla_x) = \varepsilon^{-2} \{L^0(\partial_\zeta) + \varepsilon^{1-\gamma} L^1(\nabla, \partial_\zeta) + \varepsilon^{2-\gamma} L^2(\nabla)\} \quad (2.1)$$

$$L(\nabla_x) = \mu \nabla_x \cdot \nabla_x + (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot$$

$$\nabla_x = (\partial / \partial x_1, \partial / \partial x_2, \partial / \partial x_3)^\pm, \quad \nabla = (\partial_1, \partial_2)^\pm, \quad \partial_i = \partial / \partial y_i, \quad \partial_\zeta = \partial / \partial \zeta$$

$$L^0(\partial_\zeta) = \text{diag}\{\mu, \mu, 2\mu + \lambda\} \partial_\zeta^2$$

$$L^1(\nabla, \partial_\zeta) = (\lambda + \mu) \partial_\zeta \begin{vmatrix} 0 & \nabla \\ \nabla' & 0 \end{vmatrix}, \quad L^2(\nabla) = \begin{vmatrix} L(\nabla) & 0 \\ 0 & \mu \nabla \cdot \nabla \end{vmatrix},$$

Здесь  $L(\nabla)$  – двумерный оператор Ламе с константами  $\lambda$  и  $\mu$ ,  $t$  – знак транспонирования, точкой обозначено скалярное произведение (т.е.  $\nabla_x \cdot$  и  $\nabla \cdot$  – операции дивергенции в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$ ). Кроме того, здесь и далее принято такое соглашение при записи  $(3 \times 3)$ -матриц: верхний левый блок имеет размеры  $2 \times 2$ , а в нижнем правом углу расположен скаляр. Через  $B^\pm(\varepsilon, x, \nabla_x)$  обозначим  $(3 \times 3)$ -матричный дифференциальный оператор краевых условий (в напряжениях) на основаниях  $\Gamma_\pm$ . Единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma_\pm$  имеет вид

$$n_\pm(\varepsilon, x) = [1 + \varepsilon^2 |\nabla H_\pm(y)|^2]^{-1/2} (-\varepsilon \nabla H_\pm(y), \pm 1)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & [1 + \varepsilon^2 |\nabla H_\pm(y)|^2]^{1/2} B^\pm(\varepsilon, x, \nabla_x) = \\ & = \varepsilon^{-1} \{B^{0\pm}(\partial_\zeta) + \varepsilon^{1-\gamma} B^{1\pm}(y, \nabla, \partial_\zeta) + \varepsilon^{2-2\gamma} B^{2\pm}(y, \nabla)\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$B^{0\pm}(\partial_\zeta) = \pm \text{diag}\{\mu, \mu, 2\mu + \lambda\} \partial_\zeta$$

$$B^{1\pm}(y, \nabla, \partial_\zeta) = - \begin{vmatrix} 0 & \lambda \nabla H_\pm \\ \mu (\nabla H_\pm)' & 0 \end{vmatrix} \partial_\zeta \pm \begin{vmatrix} 0 & \mu \nabla \\ \lambda \nabla' & 0 \end{vmatrix}$$

$$B^{2\pm}(y, \nabla) = - \begin{vmatrix} \partial_1 H_\pm \mathbf{B}^{(1)} + \partial_2 H_\pm \mathbf{B}^{(2)} & 0 \\ 0 & \mu \nabla H_\pm \cdot \nabla \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(1)}(\nabla) = \begin{vmatrix} (2\mu + \lambda) \partial_1 & \lambda \partial_2 \\ \mu \partial_2 & \mu \partial_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(2)}(\nabla) = \begin{vmatrix} \mu \partial_2 & \mu \partial_1 \\ \lambda \partial_2 & (2\mu + \lambda) \partial_2 \end{vmatrix}$$

Отметим, что  $\mathbf{B}^{(i)}(\nabla)v$  – векторы двумерных напряжений (плоская деформация).

Операторы (2.1) и (2.2) содержат малый параметр при некоторых из старших производных. В соответствии с [1–4] формальный ряд для решения вне конических окрестностей боковых поверхностей  $\Sigma_\pm$  ищем в виде

$$u(\varepsilon, y, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha_j} U^j(y, \zeta), \quad \alpha = 1 - \gamma \quad (2.3)$$

$$U^0(y, \zeta) = (0, w(y)), \quad U^1(y, \zeta) = (v(y) + V^1(y, \zeta), 0)$$

$$U^2(y, \zeta) = (0, W^2(y, \zeta)), \quad U^3(y, \zeta) = (V^3(y, \zeta), 0)$$

Функция  $w$  (нормальное смещение) и вектор-функция  $v = (v_1, v_2)$  (смещения в касательной к клюву плоскости) подлежат определению. Остальные неизвестные в ряде (2.3) выражаются через  $v, w$  и находятся следующим образом: разложения (2.1) – (2.3) подставляются в однородное уравнение Ламе и однородные

краевые условия на  $\Gamma_{\pm}$ , а затем собираются коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . В результате получается рекуррентная последовательность обыкновенных дифференциальных (по  $\zeta$ ) уравнений на отрезке  $\Upsilon(y) = [-H_-(y), H_+(y)]$ , параметрически зависящая от переменных  $y = (y_1, y_2)$ :

$$\begin{aligned} L^0 U^j &= -L^1 U^{j-1} - L^2 U^{j-2}, \quad \zeta \in \Upsilon(y) \\ B^{0\pm} U^j &= -B^{1\pm} U^{j-1} - B^{2\pm} U^{j-2}, \quad \zeta = \pm H_{\pm}(y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом  $j = 0, 1, \dots$  и  $U^j = 0$  для  $j < 0$ . Очевидно, что уравнения (2.4) при  $j = 0$  выполняются. Решая задачи (2.4) для  $j = 1, 2$ , находим, что

$$\begin{aligned} V^1(y, \zeta) &= -\zeta \nabla w(y) \\ W^2(e, \zeta) &= \lambda[\lambda + 2\mu]^{-1} (\frac{1}{2} \zeta^2 \nabla \cdot \nabla w(y) - \zeta \nabla \cdot v(y)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Задача (2.4) с номером  $j = 3$  разрешима не всегда: для существования вектора  $V^3$  из (2.3) необходимо, чтобы компоненты (векторных) правых частей  $F$  и  $G^{\pm}$  уравнений (2.4) удовлетворяли при  $i = 1, 2$  условию

$$-\int_{\Upsilon(y)} F_i(y, \zeta) d\zeta + G_i^+(y) - G_i^-(y) = 0 \quad (2.6)$$

Учитывая (2.4), (2.5) переписываем соотношения (2.6) в виде системы двух уравнений, связывающей вектор  $v$  и скаляр  $w$ :

$$-Q(H_1; y, \nabla)v(y) + Q(H_2; y, \nabla)\nabla w(y) = 0, \quad y \in K \quad (2.7)$$

$$H_1 = H_+ + H_-, \quad H_2 = \frac{1}{2}(H_+^2 - H_-^2)$$

$$Q = (Q_1, Q_2); \quad Q_j(H; y, \nabla)v(y) = \partial_1 \{H(y)\tau_{j1}(v; y)\} + \partial_2 \{H(y)\tau_{j2}(v; y)\}$$

$$\tau_{jk}(v; y) = \mu(\partial_j v_k(y) + \partial_k v_j(y)) + \delta_{j,k} 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1} \nabla \cdot v(y), \quad j, k = 1, 2$$

Подчеркнем, что  $\tau = \|\tau_{jk}\|$  — тензор напряжений для плоского напряженного состояния. При условии (2.7) рассматриваемая задача имеет решение

$$\begin{aligned} V^3(y, \zeta) &= (\lambda + 2\mu)^{-1} [\frac{1}{6} \zeta^3 (3\lambda + 4\mu) \nabla \nabla \cdot \nabla w(y) - \\ &- \frac{1}{2} \zeta^2 \{(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla v(y) + 2(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot v(y)\} + \\ &+ \zeta (2\mu)^{-1} \{Q(H_+ - H_-; y, \nabla)v(y) - \frac{1}{2} Q(H_+^2 + H_-^2; y, \nabla)\nabla w(y)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Обратимся к системе (2.4) в случае  $j = 4$ . Теперь, вообще говоря, неразрешимым является (скалярная) задача для третьей компоненты  $W_4$  вектора  $U^4$ . Благодаря (2.5), (2.8) условие (2.6) преобразуется в новое уравнение, связывающее  $v$  и  $w$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{H_2(y)Q(H_1; y, \nabla)v(y) + 2\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} H_3(y)\nabla \nabla \cdot \nabla w(y) + \\ + \frac{1}{2} H_1(y)[-Q(H_+ - H_-; y, \nabla)v(y) + \frac{1}{2} Q(H_+^2 + H_-^2; y, \nabla)\nabla w(y)]\} = 0 \\ H_3 = \frac{1}{3}(H_+^3 + H_-^3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Итак, построена система уравнений (2.7), (2.9) в угле  $K$ , которой должны удовлетворять главные члены  $v$  и  $w$  ряда (2.1). Теперь устраним фиктивный малый параметр, положив в (1.3)  $\varepsilon = 1$  и  $x = (y, \zeta)$ . Далее будет проверено, что малость следующих за  $U^0$  и  $U^1$  членов ряда обеспечивается скоростью их убывания при  $r \rightarrow 0$ .

Полученная система не является формально самосопряженной. Однако этот недостаток можно устранить: умножим (2.7) на  $\frac{1}{2}(H_+ - H_-)$  применим оператор

$\nabla \cdot$  и сложим полученный результат с (2.9). Исходная система преобразуется в эквивалентную ей самосопряженную систему уравнений с частными производными

$$-Q(H_1; y, \nabla)v(y) + Q(H_2; y, \nabla)\nabla w(y) = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \{-Q(H_2; y, \nabla)v(y) + Q(H_3; y, \nabla)\nabla w(y)\} = 0 \quad (2.11)$$

Будем кратко записывать уравнения (2.10), (2.11) в виде

$$T^{11}(y, \nabla)v(y) + T^{12}(y, \nabla)w(y) = 0 \quad (2.12)$$

$$T^{21}(y, \nabla)v(y) + T^{22}(y, \nabla)w(y) = 0$$

где  $T^{11}$  –  $(2 \times 2)$ -матрица,  $T^{12}$  – столбец и  $T^{21}$  – строка;  $T^{22}$  – скалярный дифференциальный оператор.

**3. Точка касания гладких поверхностей.** Если  $K$  – проколота плоскость  $\mathbb{R}^2 \setminus O$  (полный угол), то сама система уравнений (2.12) определяет возможные "начала"  $(v, w)$  асимптотических решений  $u$ . Коэффициенты дифференциальных операторов  $T^{jk}$  имеют сильное, порядка  $r^{2m(j+k-1)}$ , вырождение в точке  $O$  и потому применить общие результаты [10–12] непосредственно не удастся. Однако после умножения уравнений (2.10), (2.11) на  $r^{-2m}$  и  $r^{-4m}$  соответственно и замены  $w \mapsto w' = r^{2m}w$  элементы  $S^{jk}(y, \nabla)$  получающегося таким способом дифференциального оператора запишутся так:

$$S^{11}(y, \nabla) = r^{-2}S^{11}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r), \quad S^{12}(y, \nabla) = r^{-3}S^{12}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r) \quad (3.1)$$

$$S^{21}(y, \nabla) = r^{-3}S^{21}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r), \quad S^{22}(y, \nabla) = r^{-4}S^{22}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r)$$

Указанные в (3.1) особенности коэффициентов согласованы с порядками дифференциальных операторов и допустимы в теории эллиптических задач в областях с коническими или угловыми точками (см. [10–12] и др.). Отсюда вытекает, в частности, что имеется счетный набор линейно независимых степенных (подобных (1.2)) решений системы (2.12) на  $\mathbb{R}^2 \setminus O$ ; эти решения представимы в виде

$$v(y) = r^{\Lambda+1} \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} (\ln r)^k \Phi^{(q-k)}(\varphi)$$

$$w(y) = r^{\Lambda+2-2m} \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} (\ln r)^k \Phi_3^{(q-k)}(\varphi) \quad (3.2)$$

Для того чтобы пояснить, как находятся числа  $\Lambda$  и цепочки  $\Phi^{(0)} = (\Phi^{(0)}, \Phi_3^{(0)})$ ,  $\Phi^{(1)} = (\Phi^{(1)}, \Phi_3^{(1)})$ , ..., фигурирующие в (3.2), понадобятся дополнительные сведения о системе (2.12).

Пусть  $v_r$  и  $v_\varphi$  – полярные компоненты вектора  $v$ . Запишем матричный оператор  $T$  из (2.12) в полярных координатах  $r, \varphi$ . В силу формул (2.7) и (2.10), (2.11) для этого перейдем к полярным координатам в уравнениях равновесия (преобразуем оператор  $Q$ ), где в качестве тензоров напряжений выступают тензоры  $H_{\tau}(v)$  и  $H_{\tau}(w)$ . В результате система (2.12) приобретает вид

$$r^{2m-2}T^{11}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r)(v_r, v_\varphi) + r^{4m-3}T^{12}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r)w = 0 \quad (3.3)$$

$$r^{4m-3}T^{21}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r)(v_r, v_\varphi) + r^{6m-4}T^{22}(\varphi, \partial_\varphi, r\partial_r)w = 0$$

На единичной окружности  $S_1^1$  рассмотрим пучок  $\Lambda \mapsto T(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda)$  полиномиально

зависящий от комплексного параметра  $\Lambda$

$$T(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda) = \begin{vmatrix} T^{11}(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda+1) & T^{12}(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda+2-2m) \\ T^{21}(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda+1) & T^{22}(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda+2-2m) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Можно проверить (см. с [12], разд. 3.5), что функции (3.2) удовлетворяют уравнениям (3.3) в том и только в том случае, если число  $\Lambda$  является собственным числом пучка (3.4) на  $S_1^1$ , а векторы  $\Phi^{(0)}, \dots, \Phi^{(q)}$  образуют жорданову цепочку, отвечающую этому собственному числу (т.е.  $\Phi^{(0)}$  – собственный, а  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(q)}$  – присоединенные векторы).

Для любых вектор-функций  $(v^i, w^i) \in C_0^\infty(K)^3$  верна формула Грина

$$\langle T^{11}v^1 + T^{12}w^1, v^2 \rangle_K + \langle T^{21}v^1 + T^{22}w^1, w^2 \rangle_K = 2E(v^1, w^1; v^2, w^2) \quad (3.5)$$

$$2E(v^1, w^1; v^2, w^2) = W(v^1, v^2; H_1) - W(\nabla w^1, v^2; H_2) - W(v^1, \nabla w^2; H_2) + W(\nabla w^1, \nabla w^2; H_3)$$

$$W(v^1, v^2; H) = \frac{1}{2\mu} \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \langle H\tau_{ij}(v^1), \tau_{ij}(v^2) \rangle_K - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \langle H\tau_{ii}(v^1), \tau_{jj}(v^2) \rangle_K \right\}$$

Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  обозначено скалярное произведение в  $L_2(K)^3$ .

Из (3.5) вытекает такая формула Грина:

$$\langle T(v^1 w^1), (v^2, w^2) \rangle_K = \langle (v^1 w^1), T(v^2, w^2) \rangle_K \quad (3.6)$$

Запишем это равенство в полярных координатах  $r, \varphi$ , причем в качестве  $(v^i, w^i)$  выберем функции

$$(v^1(y), w^1(y)) = (r^{\Lambda+1}\Phi(\varphi), r^{\Lambda+2-2m}\Phi_3(\varphi)) \quad (3.7)$$

$$(v^2(y), w^2(y)) = (\chi_\delta(r)r^{M+1}\Psi(\varphi), \chi_\delta(r)r^{M+2-2m}\Psi_3(\varphi))$$

$$M = -\bar{\Lambda} - 2 - 2m$$

Здесь  $\chi_\delta$  – срезка из  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi_\delta(r) = 1$  при  $\delta < r < \delta^{-1}$ ,  $\chi_\delta(r) = 0$  при  $r > 2\delta^{-1}$  или  $r < \delta/2$ . Имеем

$$\begin{aligned} & |2 \ln \delta|^{-1} \int_K \{ (r^{2m-2}T^{11}(r\partial_r)r^{1+\Lambda}\Phi + r^{4m-3}T^{12}(r\partial_r)r^{2-2m+\Lambda}\Phi_3)\chi_\delta r^{1+\bar{M}}\bar{\Psi} + \\ & + (r^{4m-3}T^{21}(r\partial_r)r^{1+\Lambda}\Phi + r^{6m-4}T^{22}(r\partial_r)r^{2-2m+\Lambda}\Phi_3)\chi_\delta r^{2-2m+\bar{M}}\bar{\Psi}_3 \} dy = \\ & = |2 \ln \delta|^{-1} \int_{\delta}^{\delta^{-1}} \int_0^{2\pi} \{ (T^{11}(1+\Lambda)\Phi + T^{12}(2-2m+\Lambda)\Phi_3)\bar{\Psi} + \\ & + (T^{21}(1+\Lambda)\Phi + T^{22}(2-2m+\Lambda)\Phi_3)\bar{\Psi}_3 \} r^{-1} dr d\varphi + o(1) = \\ & = |2 \ln \delta|^{-1} \int_{\delta}^{\delta^{-1}} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \{ (T^{11}(-\Lambda-1-2m)\bar{\Psi} + T^{12}(-\Lambda-4m)\bar{\Psi}_3)\Phi + \\ & + (T^{21}(-\Lambda-1-2m)\bar{\Psi} + T^{22}(-\Lambda-4m)\bar{\Psi}_3)\Phi_3 \} d\varphi \end{aligned}$$

Для сокращения записи опускаются аргументы  $\varphi, \partial_\varphi$ . Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , получаем

$$\langle T(\Lambda)\Phi, \Psi \rangle_{S_1^1} = \langle \Phi, T(-\bar{\Lambda} - 2 - 2m)\Psi \rangle_{S_1^1} \quad (3.8)$$

Следовательно, формально сопряженным с  $T(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda)$  является оператор  $T(\varphi, \partial_\varphi, -\bar{\Lambda} - 2 - 2m)$ . Поэтому спектр пучка (3.4) на комплексной плоскости распо-

жен симметрично относительно прямой  $\{\Lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \Lambda = -1 - m\}$ . Кроме того, ввиду эллиптичности исходного оператора  $T$  спектр пучка состоит [13, 10] из счетного набора нормальных собственных значений, расположенных (за исключением, может быть, конечного числа) в двойном угле  $\{\Lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} \Lambda < k \operatorname{Re} \Lambda\}$ ,  $k > 0$ . Поскольку энергия  $E$  из (3.5) аннулируется лишь на полиномах, то ([12], разд. 5.4) упомянутая прямая свободна от спектра, а значит, целая полоса  $\{\Lambda \in \mathbb{C}: |\operatorname{Re} \Lambda + 1 + m| < \delta\}$  не содержит собственных значений.

Вопрос об отыскании всех собственных чисел и жордановых цепочек пучка (3.4) связан с решением несамосопряженной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, что не удастся сделать в явном виде. Исключения составляют шесть полиномов

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-y_2, y_1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, y_1), (0, 0, y_2) \quad (3.9)$$

Обозначим их  $Z^j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ). Формула (2.3) ставит в соответствие полиномам жесткие смещения. Вектор-функции (3.9) имеют вид (3.2), причем показатель  $\Lambda$  равен  $-1, -1, 0, 2m - 2, 2m - 1, 2m - 1$  соответственно. По свойству симметрии спектра собственными являются также числа  $-1 - 2m, -1 - 2m, -2 - 2m, -4m, -1 - 4m, -1 - 4m$  (повторение указывает на кратность); соответствующие собственные векторы обозначаем  $\Psi^j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ). Решения вида (3.7) с угловыми частями  $\Psi^j$  порождают асимптотические решения  $U^j$ , обращающие функционал энергии в бесконечность. Дадим физическую интерпретацию таких решений.

В частном случае  $H_+ = H_-$  операторы  $T^{12}$  и  $T^{21}$  аннулируются и система (3.3) распадается на две: система для  $v$  и уравнение для  $w$ . Это упрощает нахождение угловых частей  $\Psi^j$ . Например:

$$(\Psi_r^1(\varphi), \Psi_\varphi^1(\varphi)) = \{8\mu\pi h(\lambda^* + 2\mu + m\mu)\}^{-1} \{[\lambda^* + 3\mu + 2m\mu] \cos \varphi,$$

$$-[\lambda^* + 3\mu - 2m\lambda^*] \sin \varphi\}; \quad \Psi_3^1(\varphi) = 0$$

$$(\Psi_r^2(\varphi), \Psi_\varphi^2(\varphi)) = \{8\mu\pi h(\lambda^* + 2\mu + m\mu)\}^{-1} \{[\lambda^* + 3\mu + 2m\mu] \sin \varphi,$$

$$[\lambda^* + 3\mu - 2m\lambda^*] \cos \varphi\}; \quad \Psi_3^2(\varphi) = 0$$

$$\Psi_r^4(\varphi) = \Psi_\varphi^4(\varphi) = 0; \quad \Psi_3^4(\varphi) = [2(\lambda^* + 2\mu)\pi m(3m - 1)^2 h^3]^{-1}$$

$$\lambda^* = (\lambda + 2\mu)^{-1} 2\lambda\mu; \quad h_+(\varphi) = h_-(\varphi) = \frac{1}{2} h(\varphi)$$

Можно проверить, что

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \int_{-H_-}^{H_+} \sigma^{(r)}(U^j) \cdot Z^k \Big|_{r=\varepsilon} d\varphi dz \right\} = \delta_{j,k} \quad \sigma^{(r)} = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz})$$

Таким образом, решения  $u^1, u^2$  отвечают продольным (в направлениях  $y_1, y_2$ ) сосредоточенным в точке  $O$  силам, а  $u^4$  – поперечной (в направлении  $z$ ) силе. Аналогично  $u^3, u^5, u^6$  – сосредоточенные моменты.

Рассмотрим общий случай. Сначала обратимся к системе (2.12). Пусть  $\Phi^1, \dots, \Phi^J$  и  $\Lambda_0$  – собственные векторы и число пучка  $T(\Lambda)$ , а присоединенных векторов нет. Число  $M_0 = -2 - 2m - \Lambda_0$  также оказывается собственным и не обладает присоединенными векторами, причем согласно [11, 12] собственные векторы  $\Psi^1, \dots, \Psi^J$  можно выбрать так, чтобы выполнялись условия биортогональности и нормировки

$$\int_0^{2\pi} \partial_\Lambda T(\varphi, \partial_\varphi, \Lambda_0) \Phi^j(\varphi) \cdot \Psi^k(\varphi) d\varphi = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, J \quad (3.10)$$

(Отметим, что в [11, 12] указаны аналогичные условия и в случае нетривиальных жордановых цепочек.) Если  $X^1 = (v^1, w^1), \dots, X^J = (v^J, w^J)$  и  $Y^1 = (V^1, W^1), \dots, Y^J = (V^J, W^J)$  – решения вида (3.7), построенные по наборам  $\Lambda_0, \Psi^1, \dots, \Psi^J$  и  $M_0, \Psi^1, \dots, \Psi^J$  соответственно, то условия (3.10) эквивалентны соотношениям

$$\langle T_\chi X^j, Y^k \rangle_K - \langle \chi X^j, T Y^k \rangle_K = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, J \quad (3.11)$$

Здесь  $\chi$  – срезка из  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , равная единице вблизи начала координат. Наконец интегрируя по частям, приводим (3.11) к виду

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \sum_{l,i=1}^2 \int_0^{2\pi} n_l \{ [-H_1 \tau_{ii}(v^j) + H_2 \tau_{ii}(\nabla w^j)] V_i^k - [-H_1 \tau_{ii}(V^k) + H_2 \tau_{ii}(\nabla W^k)] v_i^j + \\ & + [H_2 \tau_{ii}(v^j) - H_3 \tau_{ii}(\nabla w^j)] \partial_i W^k - [H_2 \tau_{ii}(V^k) - H_3 \tau_{ii}(\nabla W^k)] \partial_i w^j + \\ & + \partial_i [-H_2 \tau_{ii}(v^j) + H_3 \tau_{ii}(\nabla w^j)] W^k - \\ & - \partial_i [-H_2 \tau_{ii}(V^k) + H_3 \tau_{ii}(\nabla W^k)] w^j \} |_{r=\varepsilon} d\varphi = \delta_{j,k} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$n = (n_1, n_2) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

Подчеркнем, что левые части (3.12) и (3.11) не зависят от выбора срезки  $\chi$  и от числа  $\varepsilon > 0$  соответственно.

Покажем теперь, как равенство (3.12) порождает аналогичные условия нормировки асимптотических решений  $X^j$  и  $Y^k$ , построенных согласно (2.3) и (2.5), (2.8) по решениям  $X^j$  и  $Y^k$ . С этой целью вычислим интеграл по поясу  $\Xi(\varepsilon)$ , вырезанному цилиндрической поверхностью  $\{x: r = \varepsilon\}$  из области  $\Omega$

$$\int_{\Xi(\varepsilon)} \{ \sigma^{(r)}(X^j) \cdot Y^k - \sigma^{(r)}(Y^k) \cdot X^j \} ds_x \quad (3.13)$$

$$\Xi(\varepsilon) = \{x: r = \varepsilon, \varphi \in [0, 2\pi), -H_-(x_1, x_2) < x_3 < H_+(x_1, x_2)\}$$

В силу (2.3), (2.5), (2.8) он с точностью  $o(1)$  равен

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \sum_{l,i=1}^2 \int_0^{2\pi} \int_{-H_-}^{H_+} n_l \{ [\tau_{ii}(v^j) - x_3 \tau_{ii}(\nabla w^j)] (V_i^k - x_3 \partial_i W^k) - \\ & - [\tau_{ii}(V^k) - x_3 \tau_{ii}(\nabla W^k)] (v_i^j - x_3 \partial_i w^j) + \\ & + (\frac{1}{2} \partial_i [(H_+ - H_-) \tau_{ii}(v^j) - \frac{1}{2} (H_+^2 + H_-^2) \tau_{ii}(\nabla w^j)] - \\ & - x_3 \partial_i \tau_{ii}(v^j) + \frac{1}{2} x_3^2 \partial_i \tau_{ii}(\nabla w^j)) W^k - \\ & - (\frac{1}{2} \partial_i [(H_+ - H_-) \tau_{ii}(V^k) - \frac{1}{2} (H_+^2 + H_-^2) \tau_{ii}(\nabla W^k)] - \\ & - x_3 \partial_i \tau_{ii}(V^k) + \frac{1}{2} x_3^2 \partial_i \tau_{ii}(\nabla W^k)) w^j \} |_{r=\varepsilon} d\varphi dx_3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выполним интегрирование по  $x_3 \in [-H_-, H_+]$ , заменим векторы  $(v^j, w^j), (V^k, W^k)$  их представлениями (3.7) в полярных координатах и прибавим к результату следующий интеграл, равный нулю в силу уравнений (2.7):

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \sum_{l,i=1}^2 \int_0^{2\pi} n_l \frac{1}{2} (H_+ - H_-) \{ \partial_i [-H_1 \tau_{ii}(v^j) + H_2 \tau_{ii}(\nabla w^j)] W^k - \\ & - \partial_i [-H_1 \tau_{ii}(V^k) + H_2 \tau_{ii}(\nabla W^k)] w^j \} |_{r=\varepsilon} d\varphi \end{aligned}$$

После таких операций получаем, что интеграл (3.14) совпадает с левой частью (3.12). Следовательно, предел интеграла (3.13) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равен символу Кронекера  $\delta_{j,k}$ .

Если теперь в качестве  $Y^k$  брать жесткие смещения (3.9), то согласно сказанному найдется такой набор асимптотических решений  $\{U^1, \dots, U^6\}$ , что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Xi(\varepsilon)} \sigma^{(r)}(U^p) \cdot Z^q ds_x = \delta_{p,q}, \quad p, q = 1, \dots, 6$$

Это равенство позволяет интерпретировать поля смещений  $U^1, \dots, U^6$  как отвечающие сосредоточенным силам и моментам.

Отметим еще, что приведенные условия биортогональности и нормировки играют важную роль при выводе интегральных формул для коэффициентов из асимптотических разложений решений задач вблизи особенностей границы (см. [11], [12], гл. 3, 4; в теории трещин в подобных формулах фигурируют весовые функции [14, 15]).

**4. Случай жесткого защемления боковой поверхности.** Если на  $\Sigma_{\pm}$  поставить условия Дирихле, то предельная система уравнений (2.12) в угле  $K$  снабжается следующими краевыми условиями:

$$v_1(y) = v_2(y) = 0, \quad w(y) = 0, \quad \partial_{\varphi} w(y) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \pm \alpha \quad (4.1)$$

Теперь краевой задаче (2.12), (4.1) отвечает пучок, составленный из дифференциального оператора (3.4) на дуге  $(-\alpha, \alpha)$  и краевых условий в точках  $\varphi = \pm \alpha$ . Иными словами, для определения показателя  $\Lambda$  и угловых частей  $\Phi_i$  в разложениях (3.2) необходимо решить задачу на собственные значения

$$T(\varphi, \partial_{\varphi}, \Lambda)\Phi(\varphi) = 0$$

$$\Phi_1(\pm\alpha) = \Phi_2(\pm\alpha) = \Phi_3(\pm\alpha) = \partial_{\varphi}\Phi_3(\pm\alpha) = 0 \quad (4.2)$$

Соответствующий пучок сохраняет все свойства пучка (3.4) (с той разницей, что векторы (3.9) перестают быть решениями краевой задачи (2.12), (4.1)).

Сформулируем утверждение об асимптотике решения задачи в области  $\Omega$ , сделав (для краткости) несколько упрощающих предположений. Допустим, что в полосе  $\{\Lambda \in \mathbb{C}: 0 \leq \operatorname{Re} \Lambda + 1 + m < \delta_1\}$  расположено единственное собственное число  $\Lambda_0$  задачи (4.2), которое к тому же является простым: Пусть  $\Phi^0$  – собственный вектор, отвечающий  $\Lambda_0$ , и  $u^0$  – отрезок асимптотического ряда (2.3), в котором

$$v^0(y) = r^{\Lambda_0+1}(\Phi_1^0(\varphi), \Phi_2^0(\varphi)), \quad w^0(y) = r^{\Lambda_0+2-2m}\Phi_3^0(\varphi),$$

$$u^0(x) = \sum_{j=0}^3 U^j(x) \quad (4.3)$$

Тогда энергетическое решение задачи о деформации тела  $\Omega$  нагрузками, приложенными на удалении от вершины  $O$ , допускает асимптотическое представление

$$u(x) = c_0 u^0(x) + o(r^{\delta}) \times (r, r, r^{2-2m}), \quad r \rightarrow 0$$

$$\operatorname{Re} \Lambda_0 < \delta < \min\{\delta_1, 2m - 1 + \operatorname{Re} \Lambda_0\}. \quad (4.4)$$

В (4.4)  $c_0$  – постоянная, зависящая от данных задачи в целом (от нагрузки и от геометрии области). Причина появления числа  $\delta_1$  в ограничениях на величину  $\delta$  ясны: в асимптотике вектора  $u$  фигурирует асимптотическое решение  $u^1$ , отвечающее собственному числу  $\Lambda_1$  на прямой  $\{\Lambda: \operatorname{Re} \Lambda = -1 - m + \delta_1\}$ . Неравенство  $\delta < 2m - 1 + \operatorname{Re} \Lambda_0$  возникает потому, что в формулу (4.3) не включены решения типа пограничного слоя. Этот пограничный слой компенсирует невязки, оставляемые решением  $u^0$  в краевых условиях на боковых поверхностях  $\Sigma_{\pm}$  и убывает при удалении от  $\Sigma_{\pm}$  с экспоненциальной скоростью. Покажем, как он строится

и к чему приводит его учет в упрощенной симметричной ситуации, когда

$$H_+ = H_- = \frac{1}{2}H.$$

Схема отыскания пограничного слоя та же, что и в теории тонких пластин. Рассмотрим одну из боковых поверхностей клюва, для определенности,  $\Sigma_-$ . Вводя фиктивный малый параметр  $\varepsilon$ , аналогично (1.3), определим в окрестности  $\Sigma_-$  специальные координаты

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varepsilon^{\gamma-1} H(\xi_3)^{-1} (y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha), & \xi_2 &= H(\xi_3)^{-1} \zeta \\ \xi_3 &= y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha & (H(r) &= H(r \cos \alpha, r \sin \alpha)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ввиду дополнительного множителя  $\varepsilon^{\gamma-1}$  в первой формуле из (4.5) (растяжение нормали к  $\Sigma_-$ ) теперь "быстрыми" оказываются переменные  $\xi^0 = (\xi_1, \xi_2)$ , составляющие декартовы координаты в плоскостях, нормальных к  $\Sigma_-$ . Переменную  $\xi_1$  следует считать медленной. Это соответствует новому расщеплению оператора Ламе

$$L(\nabla_x) = \varepsilon^{-2} H(\xi_3)^{-2} L^0(\nabla^0) + \dots \quad (4.6)$$

Здесь  $\nabla^0 = (\partial/\partial \xi_1, \partial/\partial \xi_2)$ , многоточием обозначены младшие слагаемые,  $L^0$  – блочно-диагональный оператор размерами  $3 \times 3$ ; его верхним блоком служит двумерный оператор Ламе с константами  $\lambda$  и  $\mu$ , а нижний правый элемент – оператор Лапласа  $\mu \nabla^0 \cdot \nabla^0$ . Подобную структуру с главной частью  $\varepsilon^{-1} H(\xi_3)^{-1} B^{0\pm}(\nabla^0)$  имеет и оператор  $B^\pm(x, \nabla_x)$  краевых условий на  $\Gamma_\pm$ . Наконец, около  $\Sigma_-$  область  $\Omega$  задается неравенствами

$$\xi_1 > 0, \quad |\xi_2| < \frac{1}{2} H(\xi_3)^{-1} H(y), \quad \xi_3 > 0 \quad (4.7)$$

Так как согласно (4.5) справедливо соотношение  $H(y) = H(\xi_3) + O(\varepsilon^{1-\gamma})$  вблизи  $\Sigma_-$ , то при учете (4.7) и (4.6) получаем, что после формального перехода к  $\varepsilon = 0$  появляется предельная задача в полуполосе  $\Pi = \{\xi^0 \in \mathbb{R}^2: \xi_1 > 0, |\xi_2| < \frac{1}{2}\}$ , зависящая от параметра  $\xi_3$ :

$$L^0(\nabla^0)V(\xi) = F(\xi), \quad \xi^0 \in \Pi \quad (4.8)$$

$$B^{0\pm}(\nabla^0)V(\xi_1, \pm \frac{1}{2}, \xi_3) = G^\pm(\xi_1, \xi_3), \quad \xi_1 > 0 \quad (4.9)$$

$$V(0, \xi_2, \xi_3) = G^0(\xi_2, \xi_3), \quad |\xi_2| < \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

В задаче для главного члена пограничного слоя отсутствуют массовые силы  $F$ , а боковые стороны  $\Pi$  свободны от напряжений, т.е. однородное равенство (4.9) означает, что аннулируются выражения  $\sigma_{j2}(V; \xi_1, \pm \frac{1}{2})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , причем

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(V) &= \lambda(\partial V_1/\partial \xi_1 + \partial V_2/\partial \xi_2), & \sigma_{3k}(V) &= \sigma_{k3}(V) = \mu \partial V_3/\partial \xi_k \\ \sigma_{jk}(V) &= \mu(\partial V_j/\partial \xi_k + \partial V_k/\partial \xi_j) + \delta_{jk} \lambda(\partial V_1/\partial \xi_1 + \partial V_2/\partial \xi_2), & j, k &= 1, 2 \end{aligned}$$

Если  $H_+ = H_-$  (симметричный клюв), то система (2.12) распадается: уравнения (2.10) и (2.11) принимают вид  $T^{11}v = 0$  и  $T^{22}w = 0$ . Пусть сначала  $w = 0$ . Так как выполнены равенства (4.1), то старший член невязки ряда (2.3) в краевых условиях на  $\Sigma_\pm$  определяется слагаемым

$$U^2(y, \zeta) = (0, -\lambda[\lambda + 2\mu]^{-1} \zeta \nabla \cdot v(y)) \quad (4.11)$$

Таким образом, для компенсации невязки нужно решить задачу (4.8)–(4.10) с правыми частями

$$F = 0, \quad G^\pm = 0, \quad G^0(\xi_2, \xi_3) = H(\xi_3) \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \xi_2 \nabla \cdot v(\xi_3) e^2 \quad (4.12)$$

где  $e^j$  – орт оси  $\xi_j$ . Решение  $V$  такой задачи имеет [16] следующую асимптотику

на бесконечности:

$$V(\xi) = H(\xi_3)c_1(\nu)\nabla \cdot v(\xi_3)e^1 + o(\exp(-\delta_0\xi_1)), \quad \xi_1 \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

Здесь  $\delta_0 > 0$ ,  $c_1(\nu)$  – величина, зависящая только от коэффициента Пуассона  $\nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1}$  (ее график приведен в [16], с. 20). При  $\nu > 0$  это решение не исчезает на бесконечности, и тем самым нарушается основное требование, предъявляемое к пограничному слою. Положение можно исправить, изменив вид слагаемого (4.11):

$$U^2(y, \zeta) = (v^1(y), -\lambda[\lambda + 2\mu]^{-1}\zeta\nabla \cdot v^0(y)) \quad (4.14)$$

При этом  $v^0 \equiv v$ , а  $v^1 = (v_1^1, v_2^1)$  – вектор-функция, подлежащая определению. Изменяется и вид невязки: к последнему выражению из (4.12) добавляется величина  $-v_\varphi^1(\xi_3)e^1 - v_r^1(\xi_3)e^3$ . Сумма  $V^1$  этой величины и прежнего решения  $V$  является решением задачи (4.8) – (4.10) с новой правой частью. В силу (4.13)

$$V^1(\xi) = \{H(\xi_3)c_1(\nu)\nabla \cdot v^0(\xi_3) - v_\varphi^1(\xi_3)\}e^1 + v_r^1(\xi_3)e^3 + o(\exp(-\delta_0\xi_1)), \quad \xi_1 \rightarrow \infty$$

Теперь требование экспоненциального затухания пограничного слоя доставляет краевое условие для неизвестного вектора  $v^1$

$$v_r^1(y) = 0, \quad v_\varphi^1(y) = H(y)c_1(\nu)\nabla \cdot v^0(y) \quad \text{при} \quad \varphi = \pm\alpha \quad (4.15)$$

В (4.15) также выписано условие, получающееся при рассмотрении пограничного слоя вблизи  $\Sigma_+$ . Система уравнений для  $v^1$  имеет вид

$$T^{11}(y, \nabla)v^1(y) = 0, \quad y \in K \quad (4.16)$$

Она появляется как условие разрешимости задачи (2.4) при  $j = 4$ , возникающей дополнительно в связи с изменением (4.14) члена (4.11) ряда (2.3) (напомним, что подобная система для  $v^0$  возникла при решении задачи (2.4), где  $j = 3$ ). Итак, получилась задача в угле  $K$  с правой частью специального вида, решение которой отыскивается согласно [12], разд. 3.5. Если  $\Lambda_0 + 2m - 1$  не является собственным числом пучка, то

$$v^1(y) = r^{\Lambda_0 + 2m} Y^1(\varphi) \quad (4.17)$$

Угловая часть  $Y^1$  находится из задачи

$$T(\gamma, \partial_\varphi, \Lambda_0 + 2m - 1)Y^1(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (-\alpha, \alpha)$$

$$Y_r^1(\pm\alpha) = 0, \quad Y_\varphi^1(\pm\alpha) = h(\pm\alpha)c_1(\nu)\partial_\varphi\Phi_\varphi^0(\pm\alpha)$$

Если же число  $\Lambda_0 + 2m - 1$  – собственные, то множитель  $Y^1$  из (4.17) приобретает полиномиальную зависимость от  $\ln r$  (сравни с (3.2)).

Аналогично построению поправки  $v^1$  в асимптотическом решении, отвечающем продольной деформации симметричного клюва, вычисляются поправки  $w^1$  и  $w^2$  в "изгибном" решении, которое представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & (0, w^0(y)) + \varepsilon^{1-\gamma}(\zeta\nabla w^0(y), w^1(y)) + \\ & + \varepsilon^{2-2\gamma}(\zeta\nabla w^1, w^2 + 1/2\lambda[\lambda + 2\mu]^{-1}\zeta^2\nabla \cdot \nabla w^0(y)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь  $w^0 \equiv w$  и в предположении, что числа  $\Lambda_0 + 2m - 1$  и  $\Lambda_0 + 4m - 2$  не являются собственными для упоминавшегося пучка,

$$w^1(y) = r^{\Lambda_0 + 1} Y_3^1(\varphi), \quad w^2(y) = r^{\Lambda_0 + 2m} Y_3^2(\varphi) \quad (4.19)$$

В силу (4.1) первые два слагаемых из (4.18) удовлетворяют краевому условию

Дирихле на  $\Gamma_{\pm}$ , если

$$w^1(y) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \pm \alpha \quad (4.20)$$

Для компенсации невязки третьего слагаемого привлекается решение  $V^2$  типа пограничного слоя – решение задачи (4.8) – (4.10) с правыми частями

$$F = 0, \quad G^{\pm} = 0, \quad G^0(\xi_2, \xi_3) = \partial_1 w^1(\xi_3) H(\xi_3) \xi_2 e^1 - \\ - w^2(\xi_3) e^2 - \frac{1}{2} H(\xi_3)^2 \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} \nabla \cdot \nabla w^0(\xi_3) \xi_2^2 e^2$$

Используя обозначения  $c(v) \equiv c_2(v)$  и  $b(v)$  (см. [17], с. 644; там же указан график функции  $v \mapsto c(v)$ ), выписываем асимптотику

$$V^2(\xi) = [\partial_1 w^1(\xi_3) H(\xi_3) \xi_2 + c_2(v) H(\xi_3)^2 \nabla \cdot \nabla w^0(\xi_3) \xi_2] e^1 + \\ + [-w^2(\xi_3) + (b(v) - c_2(v) \xi_1) \nabla \cdot \nabla w^0(\xi_3) H(\xi_3)^2] e^2 + o(\exp(-\sigma_0 \xi_1)), \quad \xi_1 \rightarrow +\infty$$

Потребовав экспоненциального исчезновения при  $\xi_1 \rightarrow +\infty$  вектора  $V^2$ , приходим к равенствам

$$r^{-1} \partial_{\varphi} w^1(y) = -c_2(v) H(y) \partial_{\varphi}^2 w^0(y) \quad (4.21)$$

$$w^2(y) = b(v) H(y)^2 \partial_{\varphi}^2 w^0(y)$$

Итак, функция  $w^1$  из (4.18) находится как решение задачи, включающей краевые условия (4.20), (4.21) и уравнение

$$T^{22}(y, \nabla) w^1(y) = 0, \quad y \in K$$

Это уравнение есть условие разрешимости задачи (2.4) при  $j = 4$ . Угловая часть  $\Upsilon_3^1$  в представлении (4.19) для  $w^1$  определяется из соотношений

$$T^{22}(\varphi, \partial_{\varphi}, \Lambda_0 + 1) \Upsilon_3^1(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (-\alpha, \alpha)$$

$$\Upsilon_3^1(\pm\alpha) = 0, \quad \partial_{\varphi} \Upsilon_3^1(\pm\alpha) = -h(\pm\alpha) c_2(v) \partial_{\varphi}^2 \Phi_3^0(\pm\alpha)$$

Отметим, наконец, что недостающие уравнение и краевое условие для  $w^2$  возникают на следующем шаге алгоритма (разрешимость задачи (2.4) при  $j = 6$  и требование экспоненциального убывания соответствующего члена пограничного слоя).

**5. Боковые поверхности свободны от напряжений.** Пусть напряжения  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{\varphi z}$  равны нулю на  $\Sigma_{\pm}$  около вершины клюва. Построим пограничные слои, возникающие вблизи боковых поверхностей, и из требования их экспоненциального убывания определим краевые условия, которыми снабжается система уравнений (2.12) для вектор-функции  $(v, w)$ . Члены ряда (2.3) оставляют невязки в краевых условиях на  $\Sigma_{\pm}$ . В соответствии с формулами (2.5), (2.8) старшие члены этих невязок вычисляются так:

$$\sigma_{r\varphi}(u) \sim \tau_{vs}(v) - x_3 \tau_{vs}(\nabla w) \\ \sigma_{\varphi\varphi}(u) \sim \tau_{vv}(v) - x_3 \tau_{vv}(\nabla w) \\ \sigma_{z\varphi}(u) \sim \sum_{i=v,s} \partial_i \left\{ \frac{1}{2} (H_+ - H_-) \tau_{vi}(v) - x_3 \tau_{vi}(v) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (H_+^2 + H_-^2) \tau_{vi}(\nabla w) + \frac{1}{2} x_3^2 \tau_{vi}(\nabla w) \right\} \quad (5.1)$$

Здесь  $\tau_{sv}$ ,  $\tau_{vv}$  – компоненты тензора напряжений (для плоского напряженного состояния), записанного в локальных координатах  $v, s$ , которые вводятся вблизи  $\partial K$ . Отметим, что  $\xi_2 = v(\varepsilon H(\xi_3))^{-1}$ ,  $\xi_3 = s$ .

Рассмотрим поверхность  $\Sigma_-$  (для определенности) и перейдем в ее окрестности к быстрым переменным (4.5). Область  $\Omega$  определяется аналогично (4.7) соотношениями

$$\xi_1 > 0, \quad \xi_2 \in [-N(\xi_3)^{-1}N_-(y), N(\xi_3)N_+(y)], \quad \xi_3 > 0$$

в которых  $N = N_+ + N_-$  и подобно (4.5)  $N_{\pm}(r) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ . Таким образом, если положить  $\varepsilon = 0$ , то область  $\Omega$  превратится в полуслой  $\{\xi \in \mathbb{R}^3, \xi_3 > 0, \xi^0 \in \Pi\}$ , где

$$\Pi = \Upsilon \times \mathbb{R}_+^1, \quad \Upsilon = [-N(\xi_3)^{-1}N_-(\xi_3), N(\xi_3)^{-1}N_+(\xi_3)] \quad (5.2)$$

Обращаем внимание на два факта: во-первых, интервал  $\Upsilon$  из (5.2) не зависит от  $\xi_3$  ввиду представления (1.1), а во-вторых, полуполоса стала несимметричной из-за отказа от условия  $N_{\pm} = \frac{1}{2}N$ , введенного в разд. 4. Главные члены расщеплений вида (4.6) операторов  $L$  и  $B$  остаются теми же, что и в разд. 4. Значит, как и ранее получаем, что главный член  $V$  пограничного слоя удовлетворяет однородным уравнениям (4.8), (4.9) в "новой" полосе (5.2) и краевым условиям

$$V^{0\pm}(\nabla^0)V(0, \xi_2, \xi_3) = G^0(\xi_2, \xi_3), \quad \xi_2 \in \Upsilon \quad (5.3)$$

$$G^0(\xi_2, \xi_3) = \{-\tau_{vv}(v; \xi_3) + \xi_2 N(\xi_3) \tau_{vw}(\nabla w; \xi_3)\} e^1 + \\ + \{-\tau_{vs}(v; \xi_3) + \xi_2 N(\xi_3) \tau_{vs}(\nabla w; \xi_3)\} e^3$$

Условиями разрешимости такой задачи в классе функций, исчезающих на бесконечности, служат равенства

$$\int_{\Upsilon} G_j^0(\xi_2, \xi_3) d\xi_2 = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \int_{\Upsilon} -\xi_2 G_1^0(\xi_2, \xi_3) = 0 \quad (5.4)$$

т.е. обращение в нуль главного вектора и главного момента нагрузки.

Сначала рассмотрим первое ( $j = 1$ ) и последнее равенства в (5.4). Вычислим интегралы и устраним фиктивный параметр, положив  $\varepsilon = 1$ . Поскольку  $N_{\pm}(\xi_3) = N_{\pm}(y)$  при  $y \in \partial K$ , то получающиеся соотношения принимают вид

$$-N_1(y) \tau_{vv}(v; y) + N_2(y) \tau_{vw}(\nabla w; y) = 0 \quad (5.5)$$

$$N_2(y) \tau_{vv}(v; y) - N_3(y) \tau_{vw}(\nabla w; y) = 0, \quad y \in \partial K \setminus 0 \quad (5.6)$$

(сюда включены и краевые условия, возникающие при исследовании пограничного слоя вблизи  $\Sigma_+$ ). Из (5.6), (5.5) вытекает, что  $\tau_{vv}(v) = \tau_{vw}(\nabla w) = 0$  при  $\varphi = \pm \alpha$ , т.е.  $G^0 \equiv 0$ . Так как первые пары строк в (4.8), (4.9), (5.3) составляют плоскую задачу теории упругости в полуполосе для вектора  $(V_1, V_2)$ , то сказанное означает, что  $V_1 = V_2 = 0$ . Соотношение из (5.4), отвечающее  $j = 3$ , доставляет еще одно краевое условие

$$-N_1(y) \tau_{vs}(v; y) + N_2(y) \tau_{vs}(\nabla w; y) = 0, \quad y \in \partial K \setminus 0 \quad (5.7)$$

При этом функция  $V_3$  отлична от нуля: она является исчезающим на бесконечности решением задачи Неймана

$$\nabla^0 \cdot \nabla^0 V_3(\xi) = 0, \quad \xi^0 \in \Pi \\ \mu \partial V_3(\xi) / \partial \xi_2 = 0, \quad \xi_1 > 0, \quad \xi_2 = \pm N(\xi_3)^{-1} N_{\pm}(\xi_3) \quad (5.8)$$

$$\mu \partial V_3(\xi) / \partial \xi_1 = -\tau_{vs}(v; \xi_3) + \xi_2 N(\xi_3) \tau_{vs}(\nabla w; \xi_3), \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 \in \Upsilon$$

Заметим, что в силу (5.7) правая часть (5.8) равна

$$A(\xi_3) (\xi_2 - \frac{1}{2} N(\xi_3)^{-1} [N_+(\xi_3) - N_-(\xi_3)])$$

$$A(\xi_3) = N(\xi_3) \tau_{vs}(\nabla w; \xi_3).$$

Система (2.12) нуждается в четырех краевых условиях, а пока найдено только три. Дело в том, что компонента  $G_2^0$  оказалась нулевой и соотношение с номером  $j = 2$  из (5.4) не сформировало четвертое условие. Таким образом, приходится обращаться к следующему члену  $\varepsilon H(\xi_3)V^1(\xi_3)$  пограничного слоя. Вектор  $V^1$  удовлетворяет задаче (4.8), (4.9), (5.3) с некоторыми правыми частями  $F$ ,  $G^\pm$  и  $G^0$ . Опять-таки имеется четыре условия разрешимости задачи в классе убывающих вектор-функций; однако понадобится только одно

$$\int_{\Pi} F_2(\xi) d\xi^0 - \sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} G_2^{\pm}(\xi_1, \xi_3) d\xi_1 + \int_{\Upsilon} G_2^0(\xi_2, \xi_3) d\xi_2 = 0 \quad (5.9)$$

(равна нулю вторая компонента главного вектора нагрузки). Подчеркнем, что оставшиеся три условия используются (аналогично изложенному в разд. 4) для определения граничных данных для  $(v^1, w^1)$ .

Уточним формулу (4.6): второй член расщепления оператора  $L(\nabla_x)$  имеет вид  $\varepsilon^{-1}H(\xi_3)^{-1}L^1(\partial/\partial\xi)$ , причем  $L^1$  – блочный антидиагональный оператор с верхним правым  $2 \times 1$  – блоком  $(\lambda + \mu)D_3\nabla^0$  и нижним левым  $1 \times 2$  – блоком  $(\lambda + \mu)D_3\nabla^0$ . (выражение для  $D_3$  см. ниже). Применяя оператор к сумме  $V_3e^3 + \varepsilon H(\xi_3)V^1$ , выводим, что

$$F_2(\xi) = -(\lambda + \mu)H(\xi_3)D_3\partial_2V_3(\xi) \quad (5.10)$$

Двучленное разложение оператора краевых условий доставляет соотношение

$$G_2^{\pm}(\xi_1, \xi_3) = \mp \mu H'(\xi_3)\partial_2V_3(\xi) - \lambda D_3V_3(\xi) \quad (5.11)$$

$$D_3 = \partial/\partial\xi_3 - H^{-1}H'(\xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2), \quad \partial_j = \partial/\partial\xi_j \quad (j=1,2)$$

Штрих означает производную по  $\xi_3$ , далее аргумент  $\xi_3$  опускается. Функция  $G_2^0$  с точностью до множителя совпадает со старшим членом невязки, оставляемой решением  $u$  в краевом условии для  $\sigma_{z\varphi}$  на  $\Sigma_{\pm}$  (см. (5.1))

$$G_2^0 = H \sum_{i=v,s} \partial_i \{ -\frac{1}{2}(H_+ - H_-)\tau_{vi}(v) + \xi_2 H \tau_{vi}(v) + \frac{1}{4}(H_+^2 + H_-^2)\tau_{vi}(\nabla w) - \frac{1}{2}\xi_2^2 H^2 \tau_{vi}(\nabla w) \} \quad (5.12)$$

Для того чтобы вычислить интегралы, участвующие в (5.9), представим функцию  $V_3$  в виде произведения  $AP(\xi^0)$  (величина  $A$  определена после (5.8)). В силу (5.10) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} F_2(\xi) d\xi^0 &= -(\lambda + \mu) \int_{\Pi} (A'H - AH')\partial_2P(\xi^0) - AH'\{\xi_1\partial_1\partial_2P(\xi^0) + \\ &+ \xi_2\partial_2\partial_2P(\xi^0)\} d\xi^0 = -(\lambda + \mu) \sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} (A'H - AH')P(\xi^0) - \\ &- AH'\{\xi_1\partial_1P(\xi^0) - P(\xi^0)\} d\xi_1 = -(\lambda + \mu)(AH') \sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} p(\xi^0) d\xi_1 \end{aligned}$$

(в контурных интегралах  $\xi_2 = \pm H^{-1}H_{\pm}$ , т.е. интегрирование ведется по основаниям полосы  $\Pi$ ). Второе слагаемое из (5.9) определяется с учетом (5.11)

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} G_2^{\pm}(\xi_1) d\xi_1 &= \sum_{\pm} \int_0^{\infty} -HH'\mu\partial_2P(\xi^0) \pm \\ &\pm \lambda\{A'HP(\xi^0) - AH'(\xi_1\partial_1P(\xi^0) + \xi_2\partial_2P(\xi^0))\} d\xi_1 = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\pm} \pm \lambda \int_0^{\infty} \{A'NP(\xi^0) - AN'\xi_1 \partial_1 P(\xi^0)\} d\xi_1 =$$

$$= \lambda(AN)'\sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} P(\xi^0) d\xi_1 \text{ при } \xi_2 = \pm N^{-1}N_{\pm}$$

Значит сумма, двух первых членов, входящих в (5.6), есть

$$-\mu(A(\xi_3)N(\xi_3))'\sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} P(\xi_1, \pm N^{-1}N_{\pm}) d\xi_1 \quad (5.13)$$

и теперь необходимо найти значение интеграла. Это делается при помощи формулы Грина. Рассмотрим функцию  $Y(\xi^0) = \xi_2$ . Очевидно,  $Y$  – гармоническая функция, удовлетворяющая условию  $\partial_2 Y = 1$  на основаниях полуполосы и условию  $\partial_1 Y = 0$  на ее торце. Согласно (5.8) функция  $P$  также является гармонической, причем  $\partial_2 P = 0$  при  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_2 = \pm N^{-1}N$  и  $\partial_1 P = \mu^{-1}(\xi_2 - 1/2N^{-1}[N_+ - N_-])$  при  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 \in \Upsilon$ . Применим формулу Грина

$$0 = \int_{\Pi} \{Y\nabla^0 \cdot \nabla^0 P - P\nabla^0 \cdot \nabla^0 Y\} d\xi^0 - \int_{\Upsilon} Y \partial_1 P d\xi_2 - \sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} P d\xi_1$$

откуда

$$\sum_{\pm} \pm \int_0^{\infty} P(\xi_1, \pm N^{-1}N_{\pm}) d\xi_1 = -\frac{1}{12\mu}$$

Выражение (5.13) приобретает вид  $1/12(AN)'$ . Наконец, интегрированием (5.12) завершаем преобразование равенства (5.9). Окончательно, упомянутое требование (5.9) затухания пограничного слоя  $V^{-1}$  означает, что

$$\begin{aligned} & 1/12 \partial_s [H_1(y)^3 \tau_{v_s}(\nabla w; y)] + \sum_{i=v,s} H_1(y) \partial_i \{-1/2(H_+(y) - H_-(y)) \times \\ & \times \tau_{v_i}(v; y) + 1/4(H_+(y)^2 + H_-(y)^2) \tau_{v_i}(\nabla w; y)\} + \\ & + H_2(y) \partial_i \tau_{v_i}(v; y) - 1/2 H_3(y) \partial_i \tau_{v_i}(\nabla w; y) = 0, \quad y \in \partial K \setminus 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Итак, соотношения (5.5) – (5.7) и (5.14) составляют необходимый набор краевых условий для системы (2.12). Однако они записаны в неудобной форме (это кажется вполне естественным, если вспомнить, что в разд. 2 приходилось приводить систему к самосопряженному виду). Преобразуем равенства (5.5) – (5.7) и (5.14) так, чтобы в результате получились естественные краевые условия для системы (2.12). Заметим, что в силу упоминавшегося в разд. 3 свойства энергии  $E$  – она аннулируется только полиномами – такая запись задачи доказывает ее эллиптичность (ср. с [12], § 5.5). Соотношения (5.5) – (5.7) оставим без изменений, а к (5.14) прибавим уравнения (2.10), умноженное на  $1/2(H_+ - H_-)$  и результат действия оператора  $1/2 \partial_s (H_+ - H_-)$  на (5.7). Вместо (5.4) имеем

$$\partial_v (-H_2 \tau_{vv}(v) + H_3 \tau_{vv}(\nabla w)) + 2 \partial_s (-H_2 \tau_{v_s}(v) + H_3 \tau_{v_s}(\nabla w)) = 0 \quad (5.15)$$

Если через  $N$  обозначить матричный оператор краевых условий (5.5), (5.7), (5.15), и (5.6), то для вектор-функций  $(v^i, w^i) \in C_0^{\infty}(\bar{K} \setminus 0)^3$  будет верна формула Грина

$$\langle T(v^1, w^1), (v^2, w^2) \rangle_K - \langle N(v^1, w^1), (v^2, w^2 \partial_v w^2) \rangle_K = 2E(v^1, w^1; v^2, w^2)$$

Введем пучок  $\Lambda \mapsto \|\|T(\varphi, \partial_{\varphi}, \Lambda), N_{\pm}(\varphi, \partial_{\varphi}, \Lambda)\|\|$ , отвечающий задаче (2.12), (5.5), (5.7), (5.15), в котором оператор  $N_{\pm}$  определяется аналогично (3.4). А

именно перепишем рассматриваемые краевые условия в полярных координатах:

$$r^{2m-1}N_{\pm}^{j1}(\varphi, \partial_{\varphi}, r\partial_r)(v_r, v_{\varphi}) + r^{4m-2}N_{\pm}^{j2}(\varphi, \partial_{\varphi}, r\partial_r)w = 0, \quad j = 1, 2$$

$$r^{4m-2}N_{\pm}^{31}(\varphi, \partial_{\varphi}, r\partial_r)(v_r, v_{\varphi}) + r^{6m-3}N_{\pm}^{32}(\varphi, \partial_{\varphi}, r\partial_r)w = 0,$$

$$r^{4m-1}N_{\pm}^{41}(\varphi, \partial_{\varphi}, r\partial_r)(v_r, v_{\varphi}) + r^{6m-2}N_{\pm}^{42}(\varphi, \partial_{\varphi}, r\partial_r)w = 0$$

Тогда матричный оператор  $N_{\pm}$  состоит из двух блоков с компонентами  $N_{\pm}^{k1}(\varphi, \partial_{\varphi}, \Lambda + 1)$  и  $N_{\pm}^{k2}(\varphi, \partial_{\varphi}, \Lambda + 2 - 2m)$ . Введенный пучок сохраняет все свойства пучка  $T$ , упоминавшиеся в разд. 3. при этом полиномы (3.2) являются степенными решениями однородной задачи (2.12), (5.5) – (5.7), (5.15)), а "парные" к ним асимптотические решения  $U^1, \dots, U^6$  допускают ту же физическую интерпретацию, что и в разд. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
3. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
4. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 120 с.
5. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решения задачи Дирихле вблизи изолированной особенности границы // Вестн. ЛГУ. 1977. № 13. Вып. 3. С. 60–66.
6. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трехмерного абсолютно жесткого пика, внедренного в упругое тело // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 10–19.
7. Nazarov S.A. Asymptotics of the Stokes system solutions at a surfaces contact point // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1991. Т. 312, № 1. P. 207–211.
8. Назаров С.А. Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя // Докл. АН Арм ССР. 1988. Т. 87. № 4, С. 156–159.
9. Назаров С.А. Об эффекте трехмерности вблизи вершины трещины в тонкой пластине // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 500–510.
10. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
11. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
12. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
13. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–160.
14. Vueskner H.F. A novel principle for the computation of stress intensity factor // Z. angew. Math. Mech. 1970. V. 50. № 9. P. 529–546.
15. Rice J.R. Some remarks on elastic crack-tip stress fields // Intern. J. Solids and Structures. 1972. V. 8. № 6. P. 751–758.
16. Зорин И.С., Назаров С.А. Двучленная асимптотика решения задачи о продольной деформации пластины, заземленной по краю // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. Вып. 2. С. 10–21.
17. Зорин И.С., Назаров С.А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 642–650.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
12.V.1992