

УДК 539.3

© 1993 г. Х.Б. Толипов

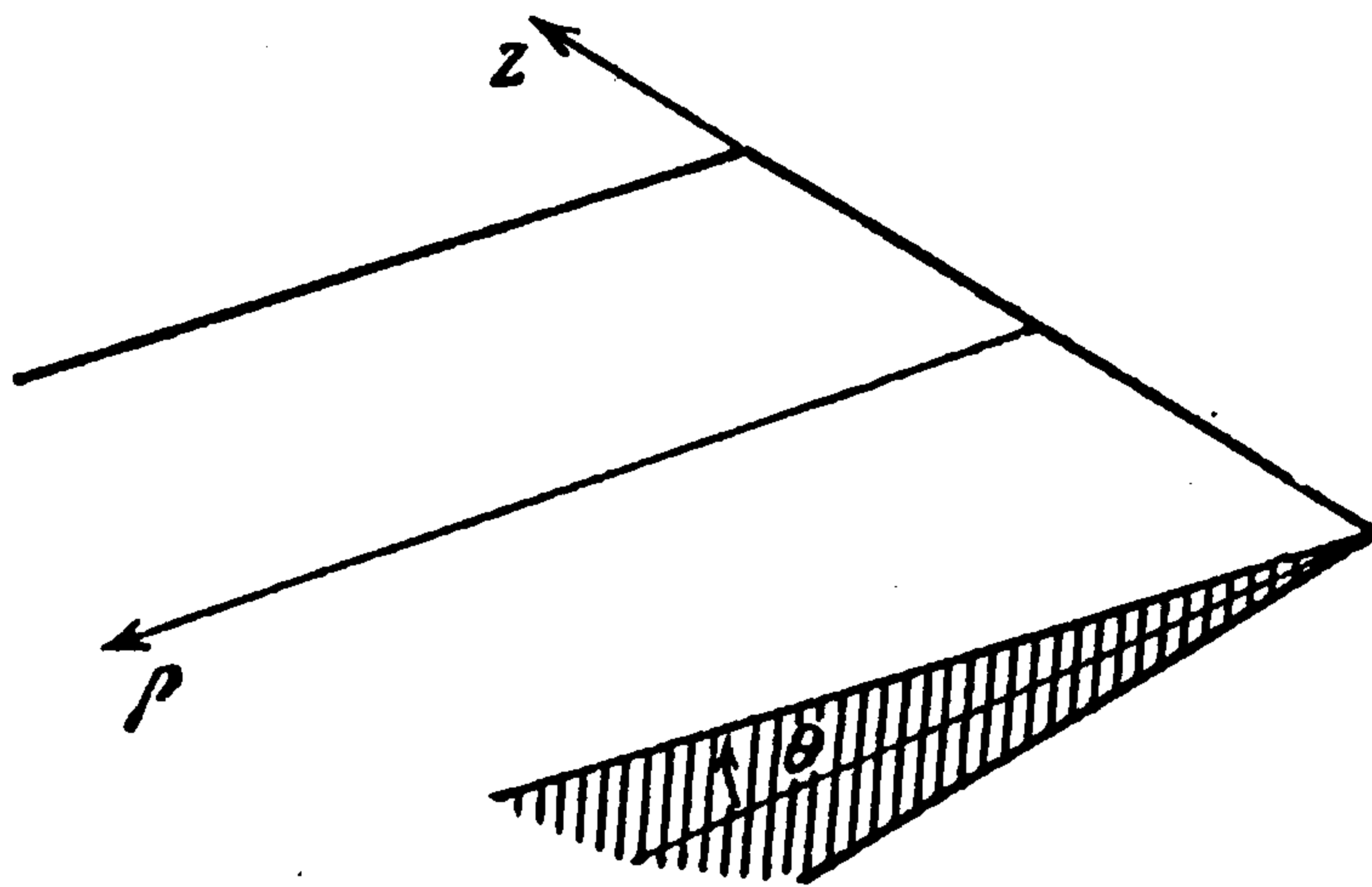
**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ УГЛОВЫХ ОБЛАСТЕЙ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ
УСЛОВИЯМИ**

В виде комбинаций функций Макдональда получены решения задачи теории упругости для клина с однородными граничными условиями. Определены поля смещений волн, распространяющихся в клине, ранее не описанные в литературе. Исходя из физических соображений, определены амплитуды смещений для отраженных, преломленных и объемных волн, согласующиеся с экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченную пластину в виде клина с плоскими поверхностями (фиг. 1). Исходным при рассмотрении процесса распространения волн является векторное дифференциальное уравнение движения частиц в отсутствие объемных сил:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } U + \mu \Delta u = \rho_0 \ddot{U} \quad (1.1)$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе, U – вектор смещения, ρ_0 – плотность среды.



Фиг. 1

Вектор смещений выразим в виде [1]:

$$U = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi_1 k + \text{rot rot } \psi_2 k \quad (1.2)$$

где векторный потенциал выражается через две скалярные функции ψ_1 и ψ_2 , φ – скалярный потенциал, k – единичный орт по оси z . В этом случае удастся разделить решение векторного волнового уравнения для каждой из функций ψ_1 и ψ_2 :

$$\Delta \varphi + K_l^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi_j + K_t^2 \psi_j = 0; \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

где K_l, K_t – волновые числа соответственно продольных и поперечных волн.

Граничные условия имеют вид

$$\frac{\sigma_{\theta\rho}}{\mu} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \rho \partial \theta \partial z} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial z}$$

$$\frac{\sigma_{\theta z}}{\mu} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta \partial \rho^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{K_i^2}{2} \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \theta^2 \partial z}$$

Условия задачи требуют обращения в нуль напряжений $\sigma_{\theta\rho}$, $\sigma_{\theta z}$, $\sigma_{\theta\theta}$ при значениях угла клина $\theta = \theta_0$ и $\theta = -\theta_0$.

2. Частное решение задачи. В качестве решений уравнений (1.3) рассмотрим следующие функции:

$$\varphi = (a_0 \operatorname{ch} v_1 \theta + b_0 \operatorname{sh} v_1 \theta) \exp[i(pz - \omega t)] \quad (2.1)$$

$$\psi_j = (a_j \operatorname{ch} v_2 \theta + b_j \operatorname{sh} v_2 \theta) \exp[i(pz - \omega t)]$$

где p – волновое число, v_1, v_2 – характеристики поля, связанные с волновыми числами, ω – круговая частота. После подстановки этих функций в уравнения (1.3) получим

$$a_0 = A_0 K_{v_1}(\rho\alpha) + B_0 I_{v_1}(\rho\alpha), \quad b_0 = C_0 K_{v_1}(\rho\alpha) + D_0 I_{v_1}(\rho\alpha) \quad (2.2)$$

$$a_j = A_j K_{v_2}(\rho\beta) + B_j I_{v_2}(\rho\alpha), \quad b_j = C_j K_{v_2}(\rho\beta) + D_j I_{v_2}(\rho\beta)$$

$$\alpha = \sqrt{p^2 - K_i^2}, \quad \beta = \sqrt{p^2 - K_i^2}$$

где I_{v_j} , K_{v_j} – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода. Используя асимптотику цилиндрических функций [2] и условие излучения

$$K_\alpha(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \exp(-s), \quad I_\alpha(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp(s), \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad \operatorname{arg} s < \frac{\pi}{2}$$

можно показать, что $B_j D_0 \equiv D_j \equiv 0$.

Подставляя выражения (2.1) в граничные условия (1.4) и приравнявая напряжения нулю, получаем систему из шести уравнений относительно неизвестных $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$. Решение этой системы позволяет определить типы волн, распространяющихся в клиновидной пластине. Интерес представляет ненулевое решение этой системы, условием существования которого будет равенство нулю ее определителя.

Рассмотрим плоские волны, не зависящие в силу симметрии от координаты z . Тогда определитель шестого порядка можно свести к произведению трех определителей второго порядка, соответствующих трем независимым совокупностям компонент смещений:

решение 1

$$A_0, C_0, A_1, C_1 = 0, \quad A_2, C_2 \neq 0, \quad U_\rho = U_\theta = 0$$

$$U_z = [(v_2^2 / \rho - 1 / \rho) K_{v_2}(iK_i \rho) - K'_{v_2}(iK_i \rho)] [A_2 \operatorname{ch} v_2 \theta + C_2 \operatorname{sh} v_2 \theta]$$

решение 2

$$A_1, C_0, A_2, C_2 = 0, \quad A_0, C_1 \neq 0, \quad U_z = 0$$

$$U_\theta = A_0 \rho^{-1} v_1 K_{v_1}(iK_i \rho) \operatorname{sh} v_1 \theta - C_1 K'_{v_2}(iK_i \rho) \operatorname{sh} v_2 \theta$$

$$U_\rho = A_0 K'_{v_1}(iK_i \rho) \operatorname{ch} v_1 \theta + C_1 \rho^{-1} v_2 K_{v_2}(iK_i \rho) \operatorname{ch} v_2 \theta$$

решение 3

$$A_0, C_1, A_2, C_2 = 0, \quad A_1, C_0 \neq 0, \quad U_z = 0$$

$$U_\rho = A_1 \rho^{-1} v_2 K_{v_2}(iK_1 \rho) \operatorname{sh} v_2 \theta + C_0 K_{v_1}^1(iK_1 \rho) \operatorname{sh} v_1 \theta$$

$$U_\theta = -A_1 K_{v_2}'(iK_1 \rho) \operatorname{ch} v_2 \theta + C_0 \rho^{-1} v_1 K_{v_1}(iK_1 \rho) \operatorname{ch} v_1 \theta$$

(штрих означает производную по ρ).

В решении 1 смещения частиц перпендикулярны направлению распространения волны. Таким образом, это решение соответствует поперечным волнам, в которых смещения частиц среды параллельны граничным поверхностям. Волновые движения частиц, соответствующие двум другим решениям, имеют сложный характер. В этих решениях две компоненты смещений отличны от нуля и суммарное волновое движение включает в себе комбинацию волновых движений продольных и поперечных волн. В решении 2 вектор смещения частиц симметричен относительно $\Theta = 0$, т.е. относительно средней плоскости, проходящей через биссектрису угла клина.

Вектор смещений в решении 3 антисимметричен относительно средней плоскости. Рассмотрим уравнения симметричных и антисимметричных волн, которые получаются приравнованием двух соответствующих определителей нулю [3, 4]:

$$\frac{K_{v_1}^+ - 2(K_1^2 / K_1^2 - 1)K_{v_1}(iK_1 \rho)}{K_{v_1}^- K_{v_2}^-} K_{v_2}^+ - \left(\frac{\operatorname{th} v_1 \theta}{\operatorname{th} v_2 \theta} \right)^\kappa = 0 \quad (2.3)$$

$$K_{v_j}^\pm = K_{v_j-2}(iK_1 \rho) \pm K_{v_j+2}(iK_1 \rho)$$

($\kappa = 1$ для симметричных волн, $\kappa = -1$ для антисимметричных волн). Функции Макдональда в этих уравнениях выразим через функции Ганкеля первого и второго рода [2]. Для оценки полученных уравнений применим формулы Лангера [2], которые при произвольном $v \gg 1$ дают асимптотические представления, равномерные в интервале $0 < x < \infty$:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\lambda} e^{-\frac{2}{3}\pi i} H_{\frac{\nu}{3}}^{(2)}(e^{\frac{i}{2}\pi} \nu \omega \lambda)$$

$$(\omega = \sqrt{1 - x^2 / v^2}, \quad \lambda = \omega^{-1} \operatorname{Ar} \operatorname{th} \omega - 1)$$

Зависимости скорости и затухания от расстояния до ребра клина для разных углов клина, полученных из решений уравнений (2.3) приведены на фиг. 2,3. Кривые 1-6 соответствуют значениям угла 0,039; 0,05; 0,1; 0,1; 0,05; 0,039; C – скорость волны в клиновидной пластине, C_R – скорость релеевской волны.

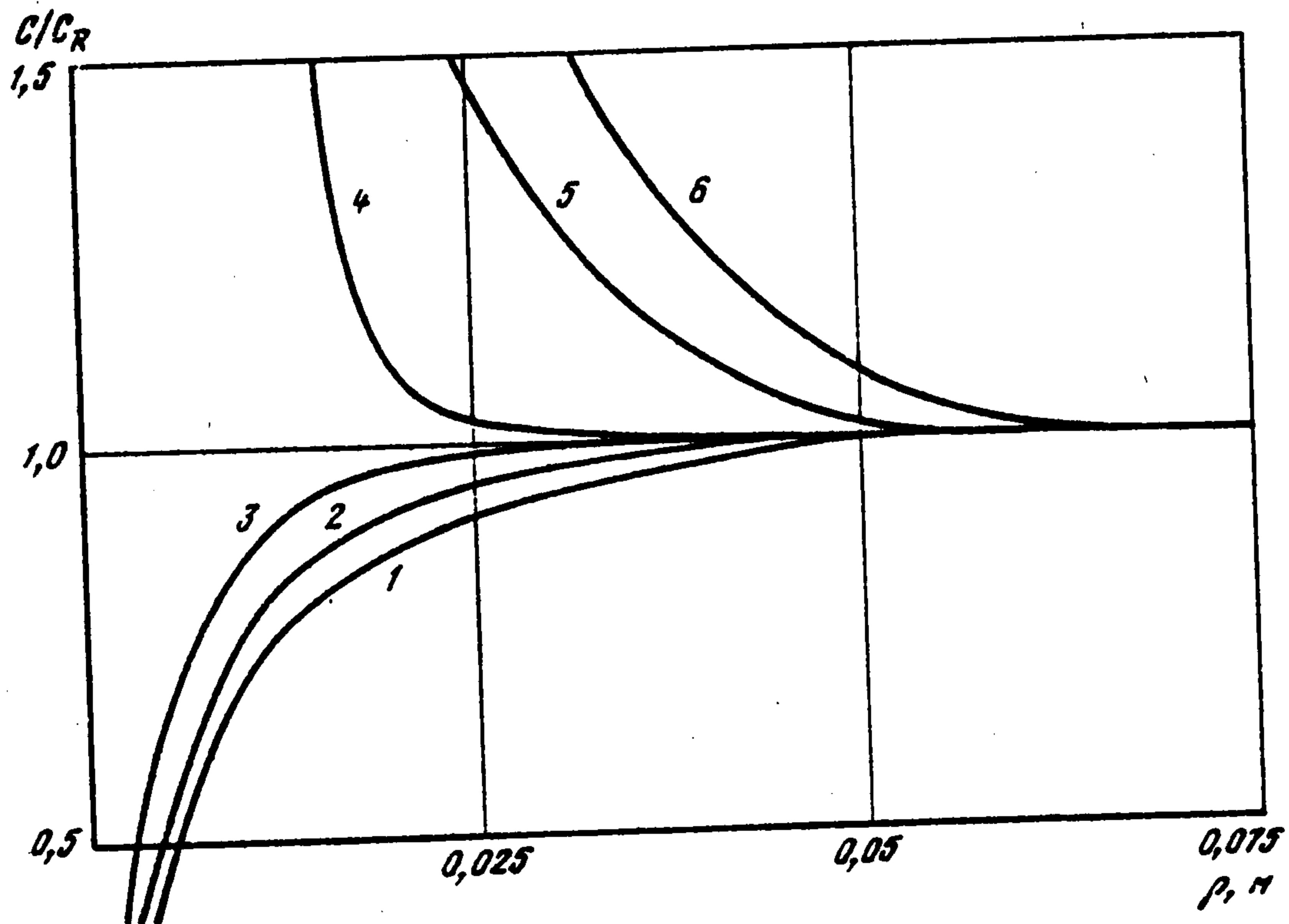
Как показывает анализ, эти кривые характеризуют волны, не описанные ранее. Сравнение этих волн с волнами, распространяющимися в плоскопараллельной пластине, показывает следующее.

В клиновидной пластине в отличие от плоскопараллельной распространяются волны двух типов, в которых движение частиц происходит в плоскости, перпендикулярной поверхности. Для одного типа волн движение частиц происходит симметрично относительно плоскости, проходящей через биссектрису угла клина, для другого типа – антисимметрично относительно той же плоскости.

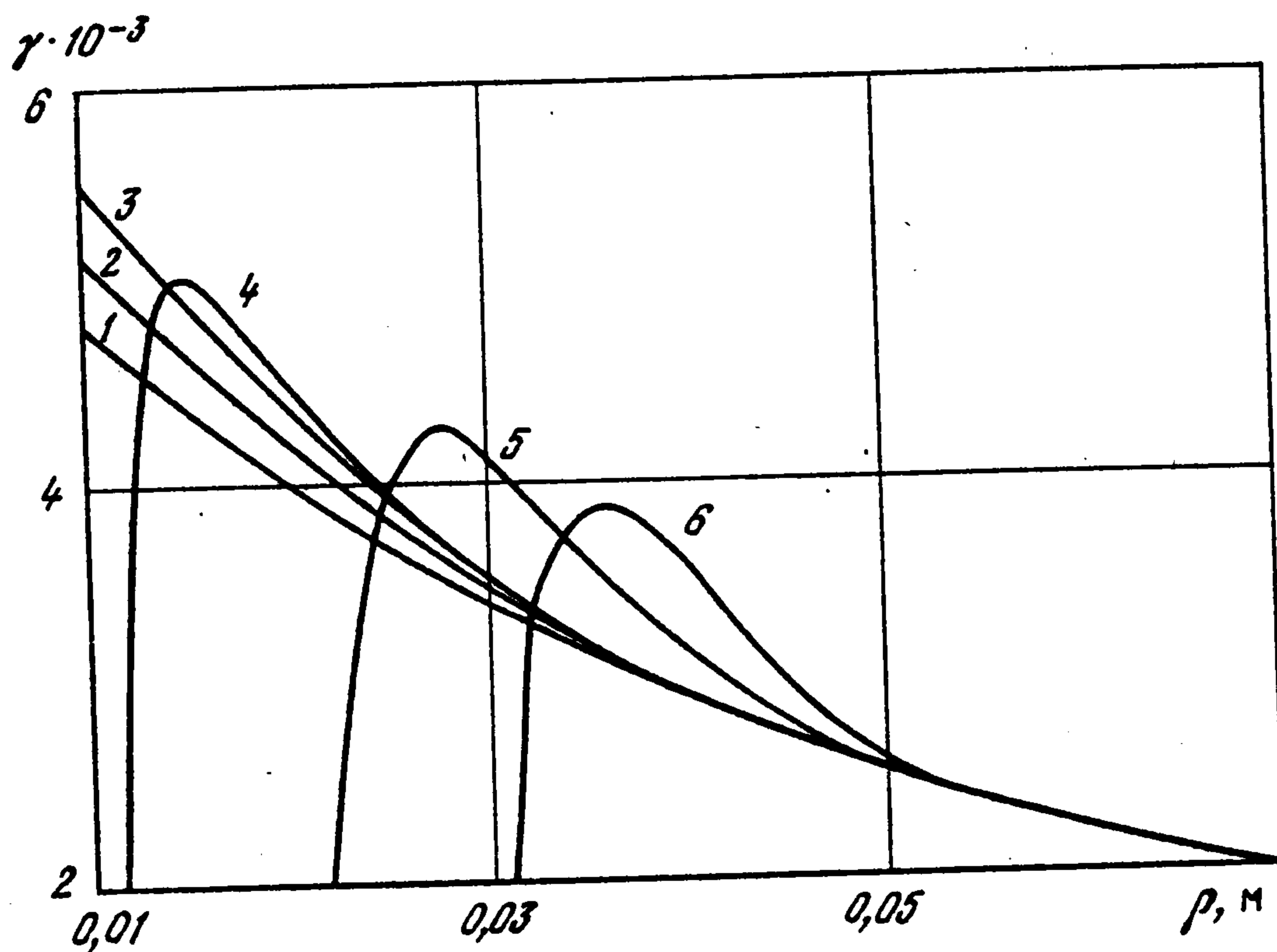
Если в плоскопараллельной пластине при определенной толщине скорость ультразвуковой волны постоянна, то в клиновидной она монотонно изменяется: скорость одной волны растет при приближении к ребру до определенного значения, скорость другой падает до нуля. Вдали от ребра скорости волн обоих типов стремятся к скорости релеевской волны.

Характер распространения волн в клиновидной пластине отличается от плоскопараллельной: волны, у которых смещения частиц антисимметричны относительно плоскости симметрии клина, доходят до его ребра, волны другого типа не достигают этого ребра. Протяженность этой "пробки" зависит от длины волны λ :

$$l = 0,76 \lambda \operatorname{ctg} \theta \quad (2.4)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Полное решение задачи. Волновое поле в клине будет состоять из поверхностных отраженных, поверхностных преломленных и объемных волн. Для определения амплитуд этих волн необходимо дополнительное ограничение, каким является условие на ребре, представляющим собой закон сохранения энергии [5]:

$$U = C + O(r^\epsilon)$$

где r – расстояние от текущей точки до ребра клина, ϵ – некоторое положительное число.

Для определения трех разновидностей волн это условие оказывается слабым, поэтому определим амплитуды этих волн из физических представлений с последующей проверкой закона сохранения энергии.

Вдали от ребра распространяется релеевская волна, которая представляет собой совокупность волн расширения–сжатия и волн сдвига, характеризующаяся волновыми

векторами K_1 и K_2 . При приближении к ребру эта волна разделяется на две волны, скорости которых изменяются разным образом (фиг. 2). Возникающий в области ребра сдвиг фаз между волновыми векторами этих волн обуславливает амплитуды поверхностных отраженных, преломленных и объемных волн. Объемная волна формируется при удалении от ребра и обусловлена увеличением скорости отраженной волны вблизи поверхности клина. При этом фронт волны разворачивается и происходит отрыв его от поверхности. Аналогичное явление происходит при прохождении релеевской волной вогнутой поверхности. На фиг. 4 представлена зависимость изменения фаз между K_1 и K_2 указанных волн от угла клина. Зависимости 1, 2, 3 соответствуют преломленным, отраженным и объемным волнам.

Для поверхностной преломленной волны сдвиг фаз между волновыми векторами K_1 и K_2 начинается при угле клина 175° . Это связано с тем, что волновой вектор K_1 в релеевской волне направлен под мнимым углом к поверхности клина и начиная с угла падения волны 85° волновой вектор K_1 составляет со второй гранью клина угол, имеющий действительное значение. Волновой вектор продольной волны неизменен по направлению и связан с особенностью распространения этой волны в клине. "Пробка" у ребра клина смещает частицы среды только в одном направлении – в направлении движения волны. При уменьшении угла клина увеличивается протяженность пробки, и при определенных его углах направление вектора K_1 изменяется на противоположное. Эти углы можно определить из соотношения (2,4): $\operatorname{tg}\theta = 0,76K$ где $K = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$. Следовательно, $\varphi = 2\theta = 113^\circ, 74^\circ, 54^\circ, 42^\circ$.

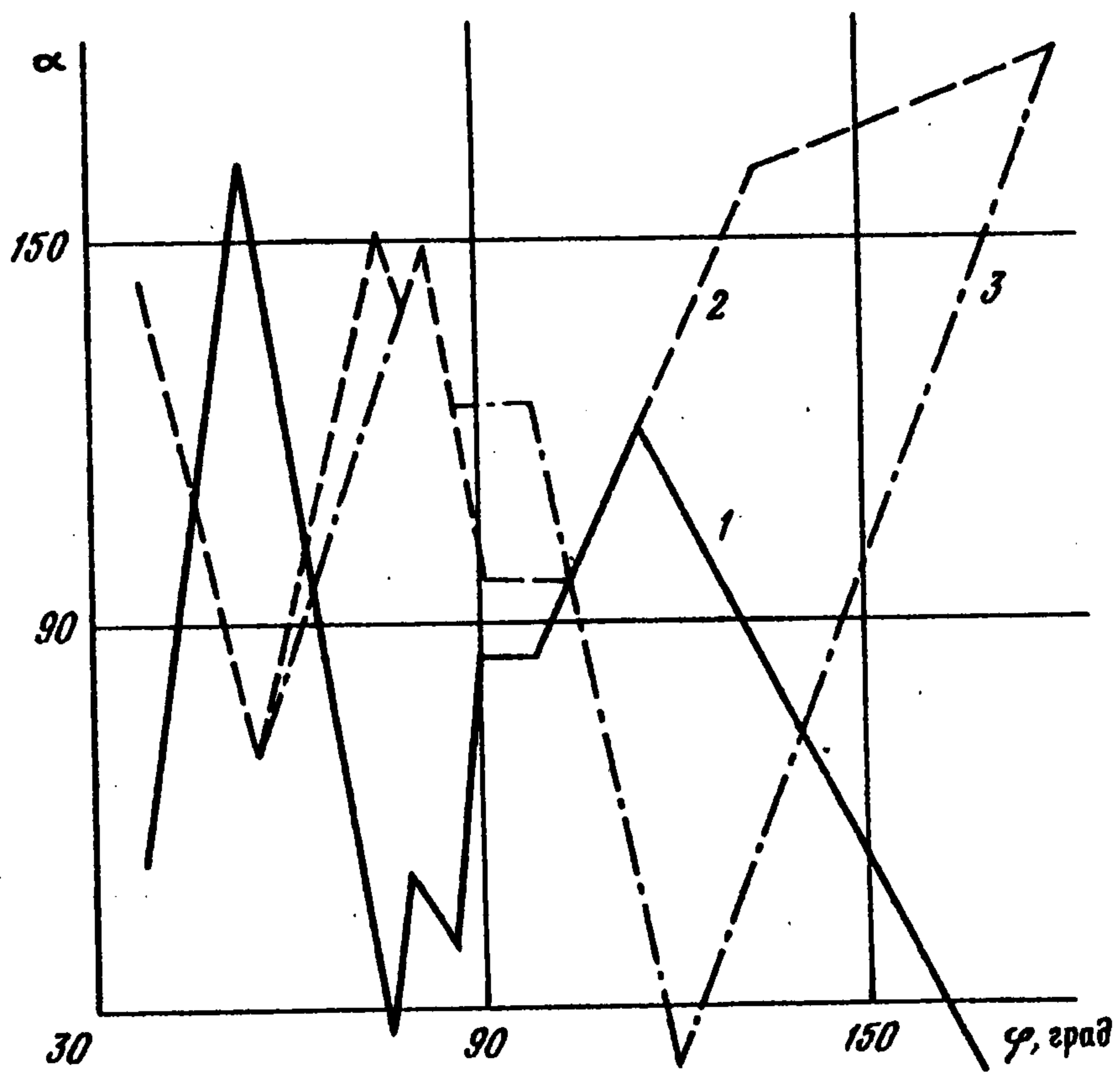
При этих углах клина происходит скачкообразное изменение сдвига фаз между векторами K_1 и K_2 . При углах клина от 175° до 74° сдвиг фаз получен за счет поворота вектора K_1 и обусловлен законами геометрической акустики. При меньших углах клина область изменения скоростей волн увеличивается (фиг. 2) и сдвиг фаз между векторами K_1 и K_2 обусловлен в основном разностью скоростей продольной и поперечной волн. При углах клина от 103° до 93° геометрический поворот вектора K_1 незначителен и сравним с поворотом этого вектора, связанным с приращением скорости поперечной волны. Возникает компенсация этих сдвигов, поэтому в указанном интервале углов разность фаз векторов K_1 и K_2 постоянна. При дальнейшем уменьшении угла клина изменение фазы вектора K_1 за счет геометрического поворота вблизи 90° вначале уменьшается, а затем увеличивается и становится больше изменения фазы, вызванного уменьшением скорости поперечной волны. Это вызывает осцилляции сдвига фаз в интервале углов клина от 96° до 85° .

Для поверхностной отраженной волны при углах клина от 180° до 135° сдвиг фаз волн между векторами K_1 и K_2 обусловлен разностью скоростей между поперечной и продольной волнами. Угол падения поперечной волны на вторую грань клина больше 45° , поэтому происходит ее полное внутреннее отражение. При углах клина меньше 135° добавляется дополнительное отклонение вектора K_1 за счет геометрического отражения. При дальнейшем уменьшении угла клина ниже 90° изменение сдвига фаз волн обусловлено в основном приращением скорости поперечной волны. Осцилляции сдвига фаз волн и постоянный их сдвиг при определенных углах клина объясняются теми же причинами, как в случае преломленной волны.

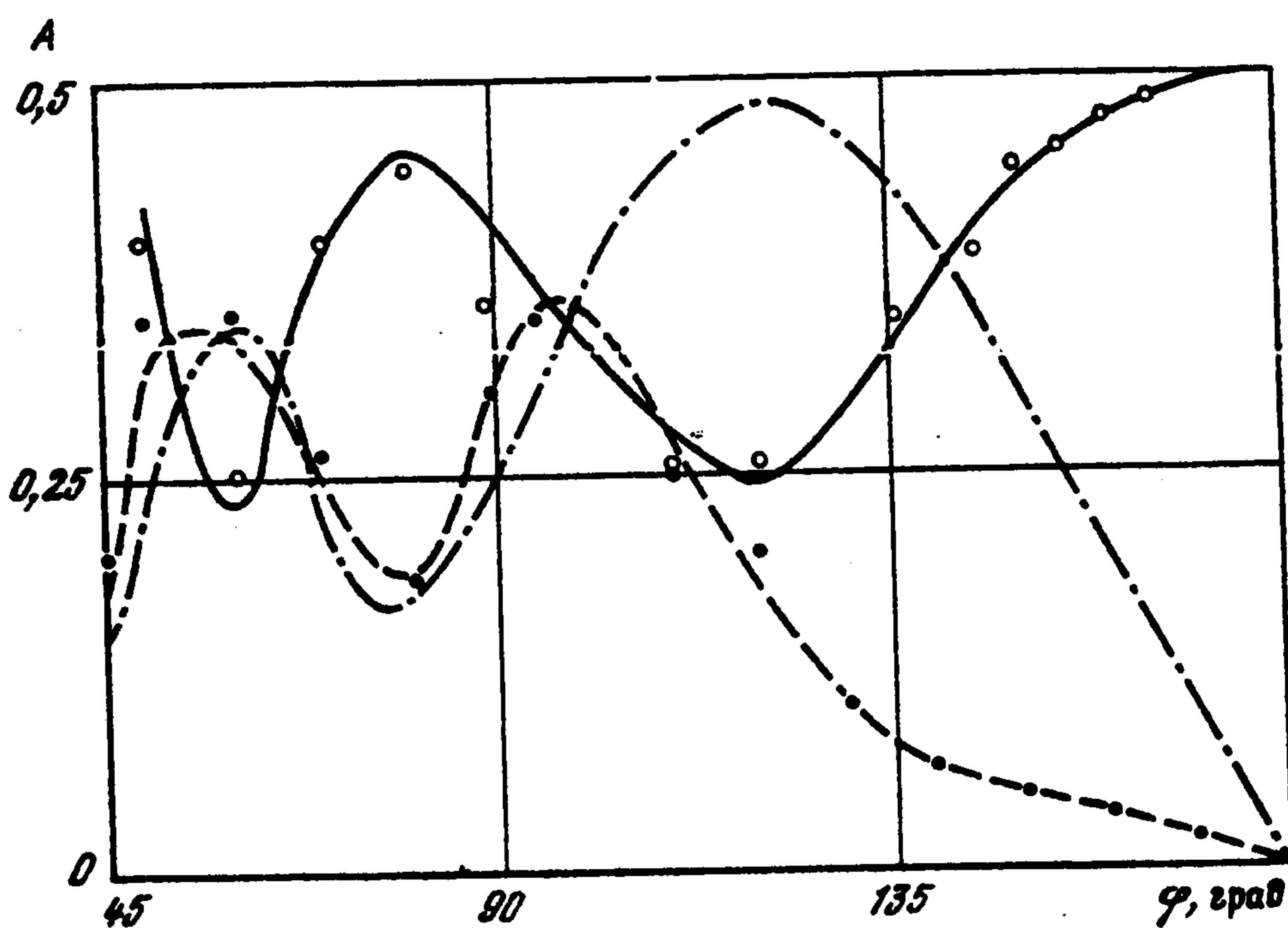
Изменение сдвига фаз между волновыми векторами K_1 и K_2 при формировании объемной волны коррелирует с изменением сдвига фаз для отраженной волны.

При достаточно малых углах клина увеличивается различие скоростей продольных и поперечных волн, что ведет к уменьшению периода осцилляций сдвига фаз волн.

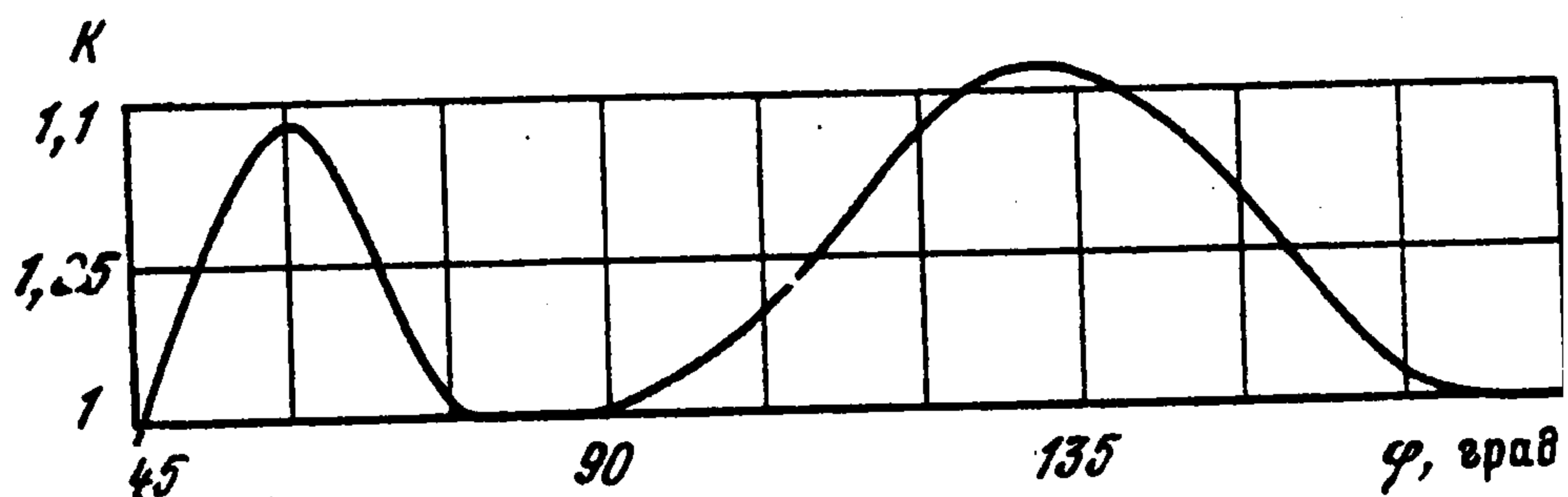
На фиг. 5 приведены зависимости амплитуд отраженных, преломленных и объемных волн от угла клина. Здесь же изображены экспериментальные значения амплитуд отраженных (темные точки) и преломленных (светлые точки) волн, полученные для дюралюминиевых образцов [6].



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 6 приведены результаты численного расчета функции K , равной сумме квадратов амплитуд отраженных, преломленных и объемных волн, при падении релеевской волны нормированной амплитуды. Хорошее согласие значений функции (близкое к единице) с квадратом нормированной амплитуды релеевской волны говорит о выполнении закона сохранения энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.
3. Толипов Х.Б. Исследование параметров акустического поля, возникающего в телах клиновидной формы // Тез. докл. 5-ой научно-техн. конф. Ижевск: ЦДНТП, 1984. с. 135.
4. Толипов Х.Б. Расчет смещений в клине при ЭМА-возбуждении упругих колебаний. Сб. статей / Под ред. Петрова Ю.В. Челябинск, 1988. с. 37–45.
5. Добрушкин В.А. Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей. Минск: Наука и техника, 1988. 416 с.
6. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.

Челябинск

Поступила в редакцию
3.III.1992