ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 5, 1993

УДК 539.3

© 1993 г. Н.К. Ахмедов, М.Ф. Мехтиев

АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УСЕЧЕННОГО ПОЛОГО КОНУСА

Методом непосредственного асимптотического интегрирования уравнений теории упругости [1] исследуется пространственное напряженно-деформированное состояние неоднородного усеченного полого конуса малой толщины. В предположении достаточной гладкости нагрузки строятся неоднородные решения, позволяющие снять нагрузки с боковой поверхности конуса. Затем строятся однородные решения. Получены асимптотические разложения однородных решений, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние при разных граничных условиях на торцах конуса. На основании качественного анализа разъясняется характер напряженно-деформированного состояния. Показано, что оно, как и в случае однородной [2], складывается из трех типов: внутреннего напряженного состояния, простого краевого эффекта и пограничного слоя.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для неоднородного усеченного полого конуса, который представляет собой тело с двумя коническими и двумя сферическими границами. Отнесем конус к сферической системе координат r, θ, φ:

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Введем новые безразмерные переменные η и ρ:

$$\eta = (\theta - \theta_0)/\varepsilon, \quad \rho = r/r_0$$

где $\theta_0 = (\theta_1 + \theta_2)/2$ – угол раствора срединной поверхности конуса, $\varepsilon = (\theta_2 - \theta_1)/2$ – малый параметр, характеризующий толщину конуса, $r_0 = (r_1 r_2)^{1/2}$. Отметим, что $\eta \in [-1, 1]$, $\theta_0 \in]0, \pi/2[$.

Будем считать, что параметры Ламе $G = G(\eta)$, $\lambda = \lambda(\eta)$ – произвольные положительные кусочно-непрерывные функции переменной η.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$L\mathbf{u} \equiv (L_0 + \varepsilon\partial_1 L_1 + \varepsilon^2\partial_1^2 L_2)\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta)^t$, u_r, u_θ – компоненты вектора перемещений, L_k – матричные дифференциальные операторы вида

$$L_0 = \left\| \begin{matrix} \partial G\partial + \varepsilon G \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta)\partial - 2\kappa\varepsilon^2 & \begin{matrix} -\varepsilon\partial G - \varepsilon\kappa\partial - \\ -(G+\kappa)\varepsilon^2 \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) \end{matrix} \\ \varepsilon\partial(\kappa + \lambda) + 2\varepsilon G\partial & \begin{matrix} \partial\kappa\partial + (2\varepsilon G + \varepsilon\partial\lambda) \times \\ \times \operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) - \kappa\varepsilon^2 \times \\ \times \csc^2(\theta_0 + \varepsilon\eta) \end{matrix} \end{matrix} \right\|$$

$$L_1 = \begin{Vmatrix} 2\varepsilon\kappa & \lambda\partial + \partial G + \varepsilon(G+\lambda)\operatorname{ctg}(\theta_0 + \varepsilon\eta) \\ G\partial + \partial\lambda & 2\varepsilon G \end{Vmatrix}$$

$$L_2 = \begin{Vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & G \end{Vmatrix}$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial\eta},\ \ \partial_1 = \rho\frac{\partial}{\partial\rho},\ \ \partial_1^2 = \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2},\ \ \kappa = 2G+\lambda$$

Предположим, что на боковых поверхностях конуса заданы следующие граничные условия:

$$\boldsymbol{\sigma}\big|_{\eta=\pm1} = M\mathbf{u}\big|_{\eta=\pm1} = \mathbf{q}^{\pm}(\rho) \tag{1.2}$$

Здесь:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}),\ \ \mathbf{q}^{\pm}(\rho) = (f^{\pm}(\rho), h^{\pm}(\rho))$$

$$M = (M_0 + \varepsilon\partial_1 M_1)/(\varepsilon\rho)$$

$$M_0 = \begin{Vmatrix} G\partial & -\varepsilon G \\ (\kappa+\lambda)\varepsilon & \kappa\partial + \varepsilon\lambda\operatorname{ctg}(\theta_0+\varepsilon\eta) \end{Vmatrix}$$

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 0 & G \\ \lambda & 0 \end{Vmatrix}$$

Считаем, что нагрузки $f^{\pm}(\rho)$, $h^{\pm}(\rho)$, заданные на боковых поверхностях, – достаточно гладкие функции.

2. Рассмотрим построение частных решений уравнений (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.2), т.е. неоднородным решениям.

Предполагая, что величина ε достаточно мала, а нагрузка, заданная на конических границах относительно ε, имеет порядок единица, для построения неоднородных решений воспользуемся асимптотическим методом [1].

Решение задачи (1.1), (1.2) будем отыскивать в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon^{-1}(\mathbf{u}_0 + \varepsilon\mathbf{u}_1 + \varepsilon^2\mathbf{u}_2 + \ldots),\ \ \mathbf{u}_i = (u_{ri}, u_{\theta i})^{\mathrm{T}},\ \ i = 0,1,2,\ldots \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.1), (1.2) приводит к системе, последовательное интегрирование которой по η, дает соотношения для коэффициентов разложения (2.1), позволяющие получить асимптотические формулы для напряжений. Анализ напряженного состояния показывает, что напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ относительно ε имеют порядок ε^{-1}, а напряжения $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\theta\theta}$ имеют порядок единица.

3. Теперь построим однородные решения. Для этого в (1.2) положим $\mathbf{q}^{\pm} = \mathbf{0}$. Отыскивая решения однородных систем в виде

$$\mathbf{u}(\rho,\eta) = \rho^{z-1/2}\boldsymbol{\upsilon}(\eta),\ \ \ \boldsymbol{\upsilon}(\eta) = (a,b)$$

после разделения переменных приходим к следующей несамосопряженной спектральной задаче:

$$\begin{aligned} &(L_0 + \varepsilon(z-\tfrac{1}{2})(L_1 - \varepsilon L_2) + \varepsilon^2(z-\tfrac{1}{2})^2 L_2)\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{0} \\ &(M_0 + \varepsilon(z-\tfrac{1}{2})M_1)\boldsymbol{\upsilon}\big|_{\eta=\pm1} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу, можно получить из формул для неоднородных решений, если в них положить $\mathbf{q}^{\pm} = \mathbf{0}$. Имеем

$$u_r^{(1)} = (4\rho)^{-1} C_0\{-2g_0G_0^{-1}\operatorname{ctg}\theta_0 + \varepsilon[8\eta - 8G_1G_0^{-1} + 2g_1G_0^{-1} \times$$

$$\times \csc^2\theta_0 + 4G_0^{-1}\operatorname{ctg}^2\theta_0\left(\int_{-1}^{1} 2G\kappa^{-1}(G+\lambda)\int_0^{\eta}\lambda\kappa^{-1}dxd\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{1}\lambda\kappa^{-1}\int_{-1}^{\eta}2G(G+\lambda)\kappa^{-1}dxd\eta\right) + g_0G_0^{-2}\operatorname{ctg}^2\theta_0 \times$$

$$\times\left.\left(\int_{-1}^{1}2\lambda\kappa^{-1}\int_{-1}^{\eta}Gdxd\eta - g_1\right)\right] + O(\varepsilon^2)\} \tag{3.2}$$

$$u_\theta^{(1)} = (2\rho)^{-1}C_0\{2 + \varepsilon\left[\eta g_0G_0^{-1} - \int_0^{\eta}2\lambda\kappa^{-1}dx\right]\operatorname{ctg}\theta_0 + O(\varepsilon^2)\}$$

$$g_k = \int_{-1}^{1}4G\kappa^{-1}(G+\lambda)\eta^k d\eta, \quad G_k = \int_{-1}^{1}G\eta^k d\eta$$

Этим решениям соответствуют собственные значения $z_0 = -\frac{1}{2}$.

Обратимся к построению второго итерационного процесса. Решение будем отыскивать в виде

$$a^{(2)}(\eta) = \varepsilon^{1/2}(a_{20}(\eta) + \varepsilon^{1/2}a_{21}(\eta) + \ldots)$$

$$b^{(2)}(\eta) = b_{20}(\eta) + \varepsilon^{1/2}b_{21}(\eta) + \ldots \tag{3.3}$$

$$z = \varepsilon^{-1/2}(\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \ldots)$$

После некоторых преобразований получаем

$$u_r^{(2)} = \varepsilon^{1/2}\rho^{-1/2}\sum_{j=1}^{4}A_jU_{rj}^{(2)}, \quad u_\theta^{(2)} = \rho^{-1/2}\sum_{j=1}^{4}A_jU_{\theta j}^{(2)} \tag{3.4}$$

$$U_{rj}^{(2)} = \left\{-\alpha_{0j}\eta + \alpha_{0j}^{-1}g_0^{-1}(\alpha_{0j}^2g_1 - t_0\operatorname{ctg}\theta_0) + \varepsilon^{1/2}[\eta(3/2 - \right.$$

$$-\alpha_{0j}\alpha_{1j}\ln\rho) + \alpha_{0j}^{-2}g_0^{-1}((g_0 - t_0/2)\operatorname{ctg}\theta_0 - 3\alpha_{0j}^2g_1/2) +$$

$$\left. +(\alpha_{0j}^2g_1 - t_0\operatorname{ctg}\theta_0)g_0^{-1}\alpha_{0j}^{-1}\alpha_{1j}\ln\rho] + O(\varepsilon)\right\}\exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_{0j}\ln\rho)$$

$$U_{\theta j}^{(2)} = \left\{1 + \varepsilon^{1/2}\alpha_{1j}\ln\rho + O(\varepsilon)\right\}\exp(\varepsilon^{-1/2}\alpha_{0j}\ln\rho)$$

$$t_k = \int_{-1}^{1}2G\lambda\kappa^{-1}\eta^k d\eta$$

Для определения α_{0j} получаем биквадратное уравнение

$$(g_0g_2 - g_1^2)\alpha_{0j}^4 + 2(g_1t_0 - g_0t_1)\operatorname{ctg}\theta_0\alpha_{0j}^2 + (g_0^2 - t_0^2)\operatorname{ctg}^2\theta_0 = 0$$

Из (3.4) следует, что напряжения $\sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$ относительно ε имеют порядок единица, $\sigma_{\theta r}^{(2)}$ – порядок $\varepsilon^{1/2}$, а $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ – порядок ε.

Переходим к построению третьего итерационного процесса. Решение (3.1) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}^{(3)}(\eta)=\varepsilon(\boldsymbol{v}_{30}(\eta)+\varepsilon\boldsymbol{v}_{31}(\eta)+\ldots) \\ &z=\varepsilon^{-1}(\beta_0+\varepsilon\beta_1+\ldots) \qquad (3.5) \\ &\boldsymbol{v}_{3k}=(a_{3k},b_{3k})^T, \quad k=0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

После подстановки (3.5) в (3.1) для первых членов разложения получаем спектральную задачу, описывающую потенциальное решение неоднородной по толщине плиты, которая изучена в [3].

На следующем этапе асимптотического интегрирования получаем краевую задачу для определения $\boldsymbol{v}_{31}$ и β_1.

Итак, решения, соответствующие третьему итерационному процессу, имеют вид

$$\begin{aligned} &u_r^{(3)}=\rho^{-1/2}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}B_kU_{rk}^{(3)}, \quad u_\theta^{(3)}=\rho^{-1/2}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}B_kU_{\theta k}^{(3)} \\ &U_{rk}^{(3)}=\left[p_0\beta_{0k}^{-2}\psi_k''(\eta)-p_2\psi_k(\eta)+O(\varepsilon)\right]\exp(\varepsilon^{-1}\beta_{0k}\ln\rho) \qquad (3.6) \\ &U_{\theta k}^{(3)}=\left[-\beta_{0k}^{-3}(p_0\psi_k'')'-2\beta_{0k}^{-1}p_1\psi_k'+\beta_{0k}^{-1}(p_2\psi_k)'+O(\varepsilon)\right]\exp(\varepsilon^{-1}\beta_{0k}\ln\rho) \\ &p_0=\kappa/(4G(G+\lambda)), \quad p_1=1/(2G), \quad p_2=\lambda/(4G(G+\lambda)) \end{aligned}$$

Здесь $\psi_k(\eta)$ – решение обобщенной спектральной задачи Папковича для неоднородного случая [3, 4].

4. На основе выше проведенного анализа укажем характер построенных решений.

Исследуем связь однородных решений с главным вектором напряжений P, действующих в сечении r = const. Имеем

$$P=2\pi r^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\sigma_{rr}\cos\theta-\sigma_{r\theta}\sin\theta)\sin\theta d\theta \qquad (4.1)$$

Перемещения представим в виде

$$u_r=u_r^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\rho^{z_k-1/2}a_k(\eta), \quad u_\theta=u_\theta^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\rho^{z_k-1/2}b_k(\eta) \qquad (4.2)$$

(включены перемещения, определяемые второй и третьей группами решений).

Для напряжений получим

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\rho^{z_k-3/2}Q_k(\eta), \quad \sigma_{r\theta}=\sigma_{r\theta}^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\rho^{z_k-3/2}T_k(\eta) \qquad (4.3) \\ &Q_k(\eta)=(z_k-1/2)\kappa a_k+\lambda(2a_k+\varepsilon^{-1}b_k'+b_k\operatorname{ctg}(\theta_0+\varepsilon\eta)), \\ &T_k(\eta)=G(\varepsilon^{-1}a_k'+z_k-3/2)b_k) \quad (k=1,2,3,\ldots) \end{aligned}$$

В формулах (4.3) слагаемые $\sigma_{rr}^{(1)}$ и $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ соответствуют собственным значениям $z_0=-1/2$.

Подставляя (4.3) в (4.1), получаем

$$P = 2\pi r_0^2 \varepsilon \omega_0 C_0 + 2\pi r_0^2 \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho^{z_k + 1/2} \omega_k$$

$$\omega_0 = -G_0 g_0^{-1}(t_0 + g_0)\sin 2\theta_0 + O(\varepsilon)$$

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} [Q_k(\eta)\cos(\theta_0 + \varepsilon\eta) - T_k(\eta)\sin(\theta_0 + \varepsilon\eta)]\sin(\theta_0 + \varepsilon\eta)d\eta$$

Докажем, что все $\omega_k = 0$ ($k = 1, 2,...$). Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}\big|_{\rho=\rho_1} &= \rho_1^{z_k - 3/2} Q_k(\eta), \quad \sigma_{r\theta}\big|_{\rho=\rho_1} = \rho_1^{z_k - 3/2} T_k(\eta) \\ \sigma_{rr}\big|_{\rho=\rho_2} &= \rho_2^{z_k - 3/2} Q_k(\eta), \quad \sigma_{r\theta}\big|_{\rho=\rho_2} = \rho_2^{z_k - 3/2} T_k(\eta) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Необходимым условием разрешимости первой задачи теории упругости является условие обращения в нуль главного вектора и главного момента всех внешних сил [5].

В рассматриваемом случае главный вектор внешних сил (4.4) в проекции на ось симметрии $\theta = 0$ дает

$$P_k = (\rho_2^{z_k + 1/2} - \rho_1^{z_k + 1/2})\omega_k = 0$$

Последнее равенство возможно только при $\omega_k = 0$. Для главного вектора окончательно получаем

$$P = 2\pi r_0^2 \varepsilon C_0 \omega_0 \tag{4.5}$$

Напряженное состояние, соответствующее второй и третьей группам решений, является самоуравновешенным в каждом сечении $r = \text{const}$.

Решение (3.2), соответствующее первому асимптотическому процессу, определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Первые члены его разложения по ε определяют безмоментное напряженное состояние. Напряженное состояние, соответствующее решениям (3.4), представляет собою краевые эффекты в прикладной теории оболочек. Первые члены разложения по ε решения (3.4) в совокупности с первыми членами (3.2) и (2.1) можно рассматривать как решения по теории Кирхгофа–Лява. Третий асимптотический процесс определяют решения (3.6), которые имеют характер пограничного слоя. Первые члены (3.6) полностью эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана неоднородной плиты [3, 4].

5. Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с торцевых поверхностей оболочки. Допустим, что на сферической части границы заданы напряжения

$$\sigma_{rr}\big|_{\rho=\rho_s} = f_{1s}(\eta), \quad \sigma_{r\theta}\big|_{\rho=\rho_s} = f_{2s}(\eta), \quad (s = 1,2) \tag{5.1}$$

Здесь $f_{1s}(\eta)$, $f_{2s}(\eta)$ – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия.

Как было показано, несамоуравновешенную часть нагрузки (5.1) можно снять при помощи проникающего решения (3.2), причем связь постоянной C_0 с главным вектором P дается равенством (4.5). Дальше будем предполагать, что $P = 0$. В силу принятого предположения $C_0 = 0$.

Решение будем отыскивать в виде (4.2). Для определения констант C_k, как и в [2, 6], воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. В данном случае вариационный принцип принимает следующую форму:

$$\sum_{s=1}^{2} \rho_s^2 \int_{-1}^{1} [(\sigma_{rr} - f_{1s})\delta u_r + (\sigma_{r\theta} - f_{2s})\delta u_\theta]\Big|_{\rho=\rho_s} \times \tag{5.2}$$

$$\times \sin(\theta_0 + \varepsilon\eta)d\eta = 0$$

Считая δC_k независимыми вариациями, из (5.2) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{jk} C_k = h_j \quad (j = 1,2,3,\ldots) \tag{5.3}$$

Здесь

$$D_{jk} = \left(\rho_1^{z_k+z_j} + \rho_2^{z_k+z_j}\right)\int_{-1}^{1} [Q_k(\eta)a_j(\eta) + T_k(\eta)b_j(\eta)]\sin(\theta_0 + \varepsilon\eta)d\eta$$

$$h_j = \sum_{s=1}^{2} \rho_s^{z_j+3/2} \int_{-1}^{1} \left[f_{1s}(\eta)a_j(\eta) + f_{2s}(\eta)b_j(\eta)\right]\sin(\theta_0 + \varepsilon\eta)d\eta$$

В [7] была доказана разрешимость и сходимость метода редукции для системы (5.3).

Имея в виду, что $\sigma_{rr}^{(2)} = O(1)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)} = O(\varepsilon^{1/2})$, уточним предположения относительно внешней нагрузки.

Допустим, что величины $f_{1s}(\eta)$ имеют порядок единица. Касательные напряжения, заданные на сферических частях границы, разложим в таком виде:

$$f_{2s} = f_{2s}^{(1)} + f_{2s}^{(2)} \tag{5.4}$$

$$f_{2s}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_{2s} d\eta, \quad f_{2s}^{(2)} = f_{2s} - f_{2s}^{(1)}$$

Можно показать, что $f_{2s}^{(1)}$ имеют порядок $\varepsilon^{1/2}$. Тогда $f_{2s}^{(2)}$ могут иметь порядок единица. Таким образом, получим

$$f_{1s} = O(1), \quad f_{2s}^{(1)} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad f_{2s}^{(2)} = O(1) \tag{5.5}$$

Неизвестные постоянные A_j, B_k отыскиваем в виде

$$A_j = A_{j0} + \varepsilon^{1/2} A_{j1} + \varepsilon A_{j2} + \ldots \tag{5.6}$$

$$B_k = B_{k0} + \varepsilon B_{k1} + \varepsilon^2 B_{k2} + \ldots \tag{5.7}$$

Подставляя (5.6), (5.7) в (5.3) и учитывая (5.5), получаем следующие системы бесконечных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{4} c_{ij} A_{j0} = \tau_i \quad (i = 1,2,3,4) \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{nk} B_{k0} = d_n \quad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{5.9}$$

Здесь

$$c_{ij} = (\alpha_{0j} - \alpha_{0i}) g_0^{-1} [g_1(\alpha_{0j}^2 g_1 - t_0 \operatorname{ctg}\theta_0) - g_0(\alpha_{0j}^2 g_2 - t_1 \operatorname{ctg}\theta_0)] \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{2} \exp(\varepsilon^{-1/2}(\alpha_{0j} + \alpha_{0i}) \ln \rho_s)$$

$$\tau_i = \sum_{s=1}^{2} \rho_s^{3/2} \int_{-1}^{1} [f_{1s}(\alpha_{0i}^{-1} g_0^{-1}(\alpha_{0i}^2 g_i - t_0 \operatorname{ctg}\theta_0) - \alpha_{0i}\eta) +$$

$$+ f_{2s}^{(1)}] d\eta \exp(\varepsilon^{-1/2} \alpha_{0i} \ln \rho_s)$$

Матрицы системы (5.9) известны из теории неоднородных плит [3]. На основе системы (5.9) уже неоднократно проводился численный анализ различных задач.

Определение A_{je}, B_{kl} (l = 1, 2,...) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами (5.8), (5.9).

Построенные однородные и неоднородные решения не только раскрывают качественную особенность трехмерного решения в теории неоднородных оболочек, но могут служить эффективным аппаратом для решения конкретных краевых задач и основой для оценки упрощенных теорий.

Отметим, что в случае G = const, λ = const все решения, полученные выше, полностью совпадают с решениями для однородного конуса [2]. В частности, как было показано [2], решение, соответствующее собственным значениям $z_0 = -1/2$, совпадает с известным решением Митчела–Нейбера для конуса [5].

Замечания 1°. В случае $\theta_0 \to 0$ решения, определяемые формулами (3.4) и (3.6), полностью переходят в решения для неоднородного цилиндра [8].

2°. Случай $\theta_0 = \pi/2$ особый и соответствует неоднородной плите переменной толщины (в данной работе не рассматривается).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
2. *Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А.* Асимптотическое исследование решения задачи теории упругости для полого конуса // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1108–1115.
3. *Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А.* К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 119–129.
4. *Устинов Ю.А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 4. С. 755–758.
5. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. *Базаренко Н.А., Ворович И.И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. С. 1035–1052.
7. *Устинов Ю.А., Юдович В.И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ, 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706–714.
8. *Устинов Ю.А.* Осесимметричное напряженно-деформированное состояние неоднородной цилиндрической оболочки малой толщины // Прикладная механика. 1975. Т. 11. Вып. 7. С. 35–41.

Баку

Поступила в редакцию
12.VIII.1992