ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, Вып. 5, 1993

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. А.В. Наседкин

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕНОСЕ ЭНЕРГИИ ОДНОРОДНЫМИ ВОЛНАМИ

Даются строгие доказательства эквивалентности кинематического и энергетического определений групповой скорости для основных типов распространяющихся однородных волн в континуальной лагранжевой системе общего вида. Рассматриваются плоские, цилиндрические и сферические волны в безграничной среде, волны в волноводах, плоские и цилиндрические волны в слое. Указывается применимость полученных результатов для задач теории упругости. Приводятся формулы для энергий упругих волн.

Существующие общие доказательства тождественности кинематического и энергетического определений, основанные на вариационных подходах для лагранжевых континуальных систем [1–5], не являются безупречными в математическом плане и в большинстве относятся только к плоским волнам.

1. Постановка задачи. Рассмотрим континуальную систему общего вида в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть состояние системы описывается лагранжевой плотностью L, которая не зависит явно от координат x_1 x_2, x_3 и времени t и является однородной квадратичной формой от характерных параметров-функций $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_j, t)$ и их первых производных $u_{i,t} = \partial u_i/\partial t$, $u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j$. Таким образом, имеем

$$L = L(u_{i,t}, u_{i,j}, u_i) \tag{1.1}$$

Из принципа Гамильтона для данной системы вытекают уравнения Эйлера–Лагранжа

$$L_{it,t} + L_{ij,j} - L_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{1.2}$$

Здесь и всюду далее в формулах подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу и используются следующие обозначения:

$$L_{it,t} = \partial L_{it} / \partial t, \quad L_{ij,j} = \partial L_{ij} / \partial x_j$$

$$L_{it} = \partial L / \partial u_{i,t}, \quad L_{ij} = \partial L / \partial u_{i,j}, \quad L_i = \partial L / \partial u_i$$

Умножив равенство (1.2) на $u_{i,t}$ и проведя стандартные преобразования, получим уравнение неразрывности для энергии E

$$\partial E / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{1.3}$$

$$E = u_{i,t} L_{it} - L, \quad J_j = u_{i,t} L_{ij} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{J}$ – вектор плотности потока энергии (вектор Умова–Пойтинга), определяющий количество и направление передачи энергии.

Физический смысл вектора $\mathbf{J}$ следует из интегральной формы уравнения (1.3) для объема V (теоремы Пойтинга)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V E d\upsilon + \int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}ds = 0 \tag{1.5}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе объема ∂V.

Предположим, что рассматриваемая лагранжева система находится в режиме свободных установившихся колебаний с частотой ω. Тогда u_i, L, все их частные производные, а следовательно, и E и $\mathbf{J}$, будут периодическими по t с периодом $T = 2\pi/\omega$. Поэтому, осреднив (1.5) по периоду, будем иметь равенство

$$\int_{\partial V} \mathbf{n}\cdot\langle \mathbf{J}\rangle ds = 0$$

$$\langle ...\rangle = \langle ...\rangle_\omega = \frac{1}{T}\int_0^T (...)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.6}$$

выражающее баланс энергии в объеме V для периодических процессов.

Далее будем рассматривать только однородные нормальные распространяющиеся волны (ОВ), которые удовлетворяют однородным уравнениям движения (1.2), а для сред с границами – еще и однородным краевым условиям. Совокупность этих условий порождает дисперсионное соотношение

$$D(\omega, \alpha_j) = 0 \tag{1.7}$$

связывающее частоту ω ($\omega > 0$) и волновые числа α_j. Для ОВ $\operatorname{Im}\alpha_j = 0$ для всех j.

Множество всех вещественных решений α_j уравнения (1.7) при фиксированном ω будем называть полярным.

Кинематической характеристикой ОВ является вектор групповой скорости $\mathbf{c}_g$

$$c_{gj} = \partial\omega / \partial\alpha_j = -D_{,\alpha_j} / D_{,\omega} \tag{1.8}$$

который предполагается отличным от нуля.

Главная задача будет состоять в строгом доказательстве того, что для основных типов ОВ групповая скорость является скоростью переноса энергии, т.е.

$$\mathbf{c}_g = \mathbf{c}_e \tag{1.9}$$

где в зависимости от вида ОВ

$$\mathbf{c}_e = \langle \mathbf{J} \rangle / \langle E \rangle \tag{1.10}$$

или

$$\mathbf{c}_e = \int_S \langle \mathbf{J}\rangle ds \Big/ \int_S \langle E\rangle ds, \quad S \subset \partial V \tag{1.11}$$

если S имеет единую нормаль во всех точках.

По (1.3)–(1.6) $\mathbf{c}_e$ – скорость переноса средней энергии через единичную поверхность с нормалью $\mathbf{n}$ в случае (1.10) или через поверхность S в случае (1.11).

2. Плоские ОВ в безграничной среде. Предположим, что плоская ОВ вида

$$u_i = f_i(\eta), \quad \eta = \omega t - \alpha_j x_j \tag{2.1}$$

удовлетворяет уравнениям движения (1.2), причем функции f_i периодичны по t с периодом T.

Лемма 2.1. Плоская ОВ (2.1) удовлетворяет условию $\delta\langle L\rangle = 0$ для всех вариаций δu_i, сохраняющих зависимость от η и периодичных с тем же периодом, что и сама волна.

Доказательство. Имеем

$$\delta\langle L\rangle = \delta\left\langle L(u_{i,t},u_{i,j},u_i)\right\rangle = \left\langle L_{it}\delta u_{i,t} + L_{ij}\delta u_{i,j} + L_i\delta u_i\right\rangle =$$
$$= \left\langle(-L_{it,t} - L_{ij,j} - L_i)\delta u_i\right\rangle + \left\langle\Phi_{,t}\right\rangle + \left\langle\Phi_{j,j}\right\rangle \tag{2.2}$$
$$(\Phi = \Phi(\eta) = L_{it}\delta u_i, \quad \Phi_j = \Phi_j(\eta) = L_{ij}\delta u_i)$$

Первое слагаемое в правой части (2.2) обращается в нуль в силу уравнений движения (1.2), второе – в силу периодичности $\Phi(\eta)$ по t с периодом T. Наконец, последний интеграл равен нулю фактически по той же причине, что и второй, ибо производную по x_j можно выразить через производную по t

$$\Phi_{j,k} = -\alpha_k\Phi'_j, \quad \Phi_{j,t} = \omega\Phi'_j, \quad \Phi_{j,k} = -\alpha_k\omega^{-1}\Phi_{j,t} \tag{2.3}$$

(штрих означает производную по η).

Подчеркнем, что в условиях леммы 2.1 не требуется, чтобы волны $u_i + \delta u_i$ являлись решениями уравнений (1.2).

Лемма 2.2. Для любой плоской о.в. (2.1) $\langle L\rangle = 0$.

Доказательство. Следуя [5], заменим u_i на $(1 + \varepsilon)u_i$, $0 < \varepsilon \ll 1$. В этом случае вариация $\delta u_i = \varepsilon u_i$ будет удовлетворять условиям леммы 2.1, и поэтому $\delta\langle L\rangle = 0$. Но так как L – однородная квадратичная функция своих аргументов, то $0 = \delta\langle L\rangle = \varepsilon^2\langle L\rangle$, и таким образом, $\langle L\rangle = 0$.

Для формулировки следующей леммы представим лагранжиан L в виде:

$$L = L(\omega, \alpha_j, f_i(\eta)) \tag{2.4}$$

отделив явные зависимости L от ω и α_j от зависимостей L от ω и α_j через η.

Лемма 2.3. Если ω и α_j – соответственно частота и волновые числа ОВ (2.1), то для любых Ω и β_j:

$$\left\langle L(\omega, \alpha_j, f_i(\xi))\right\rangle_\Omega = 0, \quad \xi = \Omega t - \beta_j x_j$$

Так как L – однородная квадратичная форма от $f_i(\eta)$ и $f_i'(\eta)$, а $\langle f_i^{(\prime)}(\eta) f_k^{(\prime)}(\eta)\rangle_\omega = \langle f_i^{(\prime)}(\xi) f_k^{(\prime)}(\xi)\rangle_\Omega$, то лемма 2.3 очевидна.

Теорема 2.1. Для плоской ОВ (2.1) справедливы формулы (1.8)–(1.10).

Доказательство. В процессе доказательства знак равенства будет означать равенство с точностью до членов первого порядка малости.

Рассмотрим близкую к ОВ (2.1) также плоскую ОВ вида

$$u_i + \delta u_i = f_i(\eta + \delta\eta) + \delta f_i(\eta + \delta\eta), \quad \delta\eta = \delta\omega t - \delta\alpha_j x_j \tag{2.5}$$

для которой вариация $\delta f_i(\eta)$ периодична с тем же периодом, что и $f_i(\eta)$.

Поскольку ОВ (2.5) предполагается однородной, то для нее частота $\omega + \delta\omega$ и волновые числа $\alpha_j + \delta\alpha_j$ связаны дисперсионным уравнением (1.7), и следовательно,

$$\delta\omega / \delta\alpha_j = c_{gj} \tag{2.6}$$

Отметим, что ОВ (2.5) имеет уже измененный период, равный $T + \delta T = 2\pi/\Omega$; $\Omega = \omega + \delta\omega$.

С точностью до линейных членов можно записать

$$\delta f_i(\eta+\delta\eta)=\delta f_i(\eta)\approx\delta_c f_i(\eta)$$

$$f_i(\eta+\delta\eta)=f_i(\eta)+\delta_\eta f_i(\eta),\quad \delta_\eta f_i=f_i'(\eta)\delta\eta \tag{2.7}$$

что позволяет вариацию δu_i из (2.5) представить в виде

$$\delta u_i=\delta_c f_i+\delta_\eta f_i \tag{2.8}$$

($\delta_\eta f_i$ – вариация от изменения только величины η, а $\delta_c f_i$ – вариация f_i, не затрагивающая η). По (2.7) $\delta_c f_i$ можно в первом приближении считать функцией, имеющей как период T, так и период $T+\delta T$.

По лемме 2.2 имеем

$$\langle L(u_i+\delta u_i)\rangle_\Omega=0 \tag{2.9}$$

С другой стороны

$$\langle L(u_i+\delta u_i)\rangle_\Omega=\langle L(u_i)\rangle_\Omega+\langle\delta L\rangle_\Omega \tag{2.10}$$

Используя очевидные формулы

$$u_{i,t}=\omega f_i',\quad u_{i,j}=-\alpha_j f_i' \tag{2.11}$$

и представление (1.1) для L, последнее слагаемое в (2.10) можно преобразовать следующим образом:

$$\langle\delta L\rangle_\Omega=\langle\delta L(\omega f_i',-\alpha_j f_i',f_i)\rangle_\Omega=I_{\omega\alpha}+I_c+I_\eta \tag{2.12}$$

Здесь

$$I_{\omega\alpha}=\langle L_{it}f_i'\rangle_\Omega\delta\omega-\langle L_{ij}f_i'\rangle_\Omega\delta\alpha_j$$

$$I_\gamma=\langle L_{it}\omega\delta_\gamma f_i'-L_{ij}\alpha_j\delta_\gamma f_i'+L_i\delta_\gamma f_i\rangle_\Omega,\quad \gamma=c,\eta \tag{2.13}$$

Заметим, что для величин первого порядка малости

$$\langle\ldots\rangle_\Omega=\langle\ldots\rangle_\omega \tag{2.14}$$

По (2.14) и лемме 2.1 $I_c=0$, так как в I_c участвует лишь вариация $\delta_c f_i$, сохраняющая зависимость от η.

Далее, в обозначении (2.4)

$$I_\eta=\langle L(\omega,\alpha_j,f_i(\eta+\delta\eta))\rangle_\Omega-\langle L(\omega,\alpha_j,f_i(\eta))\rangle_\Omega$$

и при учете леммы 2.3

$$I_\eta=-\langle L(u_i)\rangle_\Omega$$

Используя полученные значения для I_c и I_η, из (2.9), (2.10), (2.12) имеем

$$I_{\omega\alpha}=0 \tag{2.15}$$

После умножения (2.15) на ω и учета (2.11), (2.13), (2.14) и леммы 2.2 ($\langle L\rangle=0$), окончательно получаем

$$\delta\omega/\delta\alpha_j=\langle J_j\rangle/\langle E\rangle$$

что по (2.6) и доказывает теорему 2.1.

Данное доказательство теоремы 2.1 по форме наиболее близко к приведенному в [5]. Однако леммы 2.1 и 2.2 были сформулированы [5] для интеграла по прямоугольному объему от $\langle L \rangle$ с длиной ребер, равной целому числу длин волн, а теорема 2.1 доказана лишь для вариаций ω и α_j, сохраняющих период T.

3. Цилиндрические ОВ в безграничной среде. Рассмотрим лагранжеву систему, в которой зависимости от переменной x_3 отсутствуют. Цилиндрические ОВ, удовлетворяющие требованию конечности величины переносимой энергии через части поверхностей радиуса $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ при $r \to \infty$, имеют вид

$$u_i = \int_\Gamma f_i(\omega, \alpha_m, \eta) d\gamma, \quad \eta = \omega t - \alpha_m x_m \tag{3.1}$$

где Γ – связная часть полярного множества, а индекс m принимает значения 1 и 2.

Предположим, что в полярной системе координат

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta \tag{3.2}$$

при больших r для ОВ (3.1) справедливы асимптотические представления

$$u_i = r^{-1/2} f_{ia}(\omega, \alpha_{mc}, \eta), \quad \eta = \omega t - r(\alpha_{1c}\cos\theta + \alpha_{2c}\sin\theta) \tag{3.3}$$

где f_{ia} также периодичны по t с периодом T, а α_{mc} определяются из системы уравнений

$$D(\omega, \alpha_m) = 0, \quad c_{g\theta} = -c_{g1}\sin\theta + c_{g2}\cos\theta = 0 \tag{3.4}$$

В терминах метода стационарной фазы [6] в случае осциллирующего интеграла (3.1) α_{1c}, α_{2c} – невырожденные стационарные точки первого порядка.

В (3.3) α_{1c} и α_{2c} – функции от θ. Однако с точностью до членов порядка $r^{-1/2}$

$$u_{i,m} = -\alpha_{mc} r^{-1/2} f'_{ia}, \quad f'_{ia} = \partial f_{ia} / \partial\eta \tag{3.5}$$

Из идентичности структур формул (3.5) и (2.11) вытекает справедливость всех результатов разд. 2 для цилиндрических ОВ (3.3) в дальнем поле. При этом α_j и f_i следует лишь заменить на α_{mc} и $r^{-1/2} f_{ia}$.

Отметим, что в полярной системе координат (3.2) компоненты вектора Умова–Пойтинга

$$J_r = J_1\cos\theta + J_2\sin\theta, \quad J_\theta = -J_1\sin\theta + J_2\cos\theta$$

по (1.9), (1.10), (3.4) даются соотношениями

$$\langle J_r \rangle = c_{gr}\langle E \rangle, \quad \langle J_\theta \rangle = 0$$
$$(c_{gr} = c_{g1}\cos\theta + c_{g2}\sin\theta) \tag{3.6}$$

4. Сферические ОВ в безграничной среде. Сферические ОВ в трехмерной лагранжевой системе определяются через плоские ОВ формулой

$$u_i = \int_\Gamma f_i(\omega, \alpha_j, \eta) d\gamma, \quad \eta = \omega t - \alpha_j x_j \tag{4.1}$$

и в отличие от (3.1) теперь Γ – связная часть полярного множества в трехмерном пространстве α_1, α_2, α_3.

Пусть в сферической системе координат

$$x_1 = R\cos\theta\sin\varphi, \quad x_2 = R\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = R\cos\varphi$$

сферическая ОВ (4.1) имеет при больших R главный член асимптотики вида

$$u_i = R^{-1} f_{ia}(\omega, \alpha_{jc}, \eta)$$
$$\eta = \omega t - R(\alpha_{1c}\cos\theta\sin\varphi + \alpha_{2c}\sin\theta\sin\varphi + \alpha_{3c}\cos\varphi) \tag{4.2}$$

причем значения α_{jc} определяются из системы уравнений

$$D(\omega, \alpha_j) = 0, \quad c_{g\theta} = 0$$
$$c_{g\varphi} = c_{g1}\cos\theta\cos\varphi + c_{g2}\sin\theta\cos\varphi - c_{g3}\sin\varphi = 0 \tag{4.3}$$

Аналогично предыдущему в случае осциллирующего интеграла (4.1) система (4.3) по методу стационарной фазы определяет невырожденные стационарные точки.

Вместо формул (3.5) теперь с точностью до R^{-1} будем иметь

$$u_{i,j} = -\alpha_{jc} R^{-1} f'_{ia}$$

и очевидно, что теорема 2.1 распространяется для дальнего поля $R \gg 1$ и на сферические о.в. (4.2).

Для компонент вектора $\mathbf{J}$ в сферической системе координат по (1.9), (1.10), (4.2) в дальнем поле имеем

$$\langle J_R \rangle = c_{gR}\langle E \rangle, \quad \langle J_\theta \rangle = 0, \quad \langle J_\varphi \rangle = 0$$
$$(c_{gR} = c_{g1}\sin\varphi\cos\theta + c_{g2}\sin\varphi\sin\theta + c_{g3}\cos\varphi)$$

5. ОВ в волноводах. Пусть волновод бесконечно протяжен вдоль оси x_1 и имеет постоянное сечение S. Предположим, что ОВ вида

$$u_i = f_i(\omega, \alpha_1, x_2, x_3, \eta), \quad \eta = \omega t - \alpha_1 x_1 \tag{5.1}$$

удовлетворяет уравнениям движения (1.2) и однородным краевым условиям на границе волновода $\partial S = \partial S_u \cup \partial S_\sigma$

$$u_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial S_u \tag{5.2}$$

$$n_m L_{im} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial S_\sigma \tag{5.3}$$

где индекс m принимает значения 2 и 3.

Для ОВ (5.1) в обозначении

$$\overline{(\ldots)} = \int_S (\ldots) ds \tag{5.4}$$

имеют место следующие леммы и теорема.

Лемма 5.1. ОВ (5.1) удовлетворяет условию $\delta\langle \overline{L} \rangle = 0$ для всех вариаций δu_i, сохраняющих зависимость от η, периодичных по t с периодом T и удовлетворяющих главным граничным условиям (5.2) $\delta u_i = 0$ на ∂S_u.

Лемма 5.2. Для любой ОВ (5.1) $\langle \overline{L} \rangle = 0$.

Лемма 5.3. Если ω и α_1 – соответственно собственная частота и волновое число ОВ (5.1), то для любых Ω и β_1

$$\langle \overline{L}(\omega, \alpha_1, f_i(\Omega, \beta_1, x_2, x_3, \xi)) \rangle_\Omega = 0, \quad \xi = \Omega t - \beta_1 x_1$$

Теорема 5.1. Для ОВ (5.1) справедливы формулы (1.8)–(1.11), в которых $j = 1$.

Леммы 5.1–5.3 и теорема 5.1 доказывается по аналогичным схемам, что и соответствующие леммы и теорема из разд. 2. Требуются лишь замена L на $\overline{L}$ по (5.4) и небольшие изменения, связанные с интегрированием по S и иной формой ОВ. Так, в процессе доказательства леммы 5.1 достаточно учесть, что формулы (2.3) для $\langle\overline{\Phi_{j,j}}\rangle$ справедливы лишь при $j = 1$, а для $j = 2, 3$ имеем

$$\langle\overline{\Phi_{2,2}}\rangle + \langle\overline{\Phi_{3,3}}\rangle = \langle\overline{(L_{im}\delta u_i)_{,m}}\rangle = \left\langle \int\limits_{\partial S} n_m L_{im}\delta u_i ds \right\rangle$$

что равно нулю в силу граничных условий (5.2) и (5.3). При доказательстве теоремы 5.1 в вариацию $\delta_c f_i$ из (2.8) следует включить все вариации f_i, ω и α_1, не затрагивающие величины η. Наконец, в формулах (2.9)–(2.16) следует поставить черту над всеми величинами, связанными с L, положить $j = 1$ и отдельно выписать производные по $u_{i,2}$ и $u_{i,3}$.

Теорема 5.2. Теорема 5.1 справедлива также для систем, в которых лагранжиан L удовлетворяет всем указанным в разд. 1 условиям, но может еще и явно зависеть от x_2 и x_3, т.е. $L = L(x_2, x_3, u_{i,t}, u_{i,j}, u_i)$.

Заметим, что в ходе доказательств лемм 2.1–2.3 и теоремы 2.1 независимость лагранжиана (1.1) от x_1, x_2 и x_3 была необходима только лишь для формул (2.3). Однако как раз эти формулы при $j = 2$ и $j = 3$, и не требуются для доказательства леммы 5.1.

Замечание. В двумерных задачах, в которых нет зависимостей от x_3, все утверждения остаются в силе, если под S понимать толщину волновода. Результаты справедливы также для поверхностных волн в полуплоскости $x_2 \geqslant 0$, только теперь $S = [0, \infty)$.

6. Плоские ОВ в слое. Пусть в бесконечно протяженном по x_1 и x_2 слое толщины S по x_3 плоская ОВ вида

$$u_i = f_i(\omega, \alpha_1, \alpha_2, x_3, \eta), \quad \eta = \omega t - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \tag{6.1}$$

удовлетворяет уравнениям движения (1.2) и однородным краевым условиям (5.2), (5.3) на границе ∂S, где $m = 3$.

Интегралы (5.4) теперь являются одномерными. В этом обозначении для плоской ОВ (6.1) справедливы аналогичные леммы 5.1–5.3 и теоремы 5.1, 5.2, в которых $j = 1, 2$; $m = 3$; а L может зависеть явно от x_3. Изменения в ходе доказательств очевидны. Отметим лишь, что в формулировке леммы 5.3 для ОВ (6.1) должна фигурировать величина

$$\langle\overline{L}(\omega, \alpha_1, \alpha_2, f_i(\Omega, \beta_1, \beta_2, x_3, \xi))\rangle_\Omega, \quad \xi = \Omega t - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2$$

равная нулю для любых Ω; β_1 и β_2.

Итак, для плоских ОВ (6.1) в слое $c_{gj} = \langle\overline{J_j}\rangle / \langle\overline{E}\rangle, \quad j = 1,2$.

7. Цилиндрические ОВ в слое. Цилиндрические ОВ представляются через плоские ОВ в слое интегралами вида

$$u_i = \int\limits_\Gamma f_i(\omega, \alpha_m, x_3, \eta) d\gamma, \quad \eta = \omega t - \alpha_m x_m \tag{7.1}$$

где индекс m принимает значения 1 и 2.

Предположим, что в цилиндрической системе координат r, θ, x_3, где r и θ определены по (3.2), при больших r для ОВ (7.1) справедливо асимптотическое представление типа (3.3), причем f_{ia} зависит также и от x_3.

Повторяя рассуждения из разд. 3 при учете изменений, связанных с интегрированием по толщине слоя, для дальнего поля $r \gg 1$ будем иметь

$$\langle \bar{J}_r \rangle = c_{gr} \langle \bar{E} \rangle, \quad \langle \bar{J}_\theta \rangle = 0$$

Данный результат, аналогично замечанию из разд. 5, справедлив как для каналовых волн в слое, так и для поверхностных волн в полупространстве, причем L может явно зависеть от x_3.

8. Упругие ОВ. Лагранжиан L и энергия E для анизотропной упругой среды имеют вид

$$L = T - W, \quad E = T + W \tag{8.1}$$

$$T = \tfrac{1}{2} \rho u_{i,t}^2, \quad W = \tfrac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{8.2}$$

При постоянных плотности ρ и упругих модулях c_{ijkl} лагранжиан L удовлетворяет требованиям из разд. 1. Таким образом, для однородных анизотропных упругих сред справедливы все результаты разд. 2–7. При этом для волноводов и слоя допускается также неоднородность среды по сечению.

По доказанному ранее для всех рассмотренных типов волн $\langle L \rangle = 0$ или $\langle \bar{L} \rangle = 0$. Поэтому, используя (8.1), для волн в безграничной среде и для волн в волноводе или слое соответственно имеем

$$\langle T \rangle = \langle W \rangle, \quad \langle \bar{T} \rangle = \langle \bar{W} \rangle, \quad \langle E \rangle = 2\langle T \rangle, \quad \langle \bar{E} \rangle = 2\langle \bar{T} \rangle \tag{8.3}$$

Для гармонических ОВ

$$u_i = \begin{cases} \operatorname{Re} \upsilon_i \cos\eta - \operatorname{Im} \upsilon_i \sin\eta \\ \operatorname{Re} \upsilon_i \sin\eta + \operatorname{Im} \upsilon_i \cos\eta \end{cases}, \quad \eta = \omega t - \alpha_k x_k$$

где $k = 1$; $k = 1, 2$ или $k = 1, 2, 3$, а амплитудные функции υ_i могут зависеть от ω, α_k и тех пространственных переменных, которые не входят в η, формулам (8.3) при учете (8.2) можно придать удобный для расчетов вид (звездочка означает комплексное сопряжение) $\langle E \rangle = \tfrac{1}{2}\omega^2 \rho \upsilon_i \upsilon_i^*$, $\langle \bar{E} \rangle = \tfrac{1}{2}\omega^2 \int_S \rho \upsilon_i \upsilon_i^* ds$.

Заметим, что все полученные результаты фактически носят локальный характер, и поэтому не обязательны требования безграничности среды или бесконечная протяженность волноводов и слоя. Необходимо только выполнение остальных принятых условий в исследуемых областях среды. Так например; формулы (3.6) и (4.4) справедливы соответственно и для дальних полей цилиндрических волн внутри полуплоскости и сферических волн внутри полупространства и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M.* General theorems of the equivalence of group velocity and energy transport // Phys. Rev. 1957. V. 105. № 4. P. 1129–1137.
2. *Lighthill M.J.* Group velocity // J. Inst. Math. and Applic. 1965. V. 1. № 1. P. 1–28.
3. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solid. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1975. 425 p.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
6. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
7.IV.1992