УДК (532.5 + 539.3) : 534.1

© 1993 г. П.А. Якубенко

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Формулируется эффективное достаточное условие неустойчивости для некоторого класса одномерных слабо неоднородных динамических систем произвольной природы. На основе предложенного условия рассматривается неустойчивость бесконечно протяженной слабо неоднородной упругой трубы, заполненной движущейся жидкостью.

1. Рассматривается система, параметры которой зависят от одной пространственной переменной x и не зависят от времени t. Пусть эта зависимость характеризуется некоторым характерным масштабом L. Имеется некоторое основное состояние системы $\Psi(x)$, которое требуется исследовать на устойчивость по отношению к малым возмущениям с характерной длиной волны λ. Предполагается, что параметры исследуемой системы меняются достаточно медленно. Под этим подразумевается то, что $\varepsilon = \lambda/L \ll 1$. Вводится медленная переменная $X = \varepsilon x$. Пусть поведение малых возмущений $\psi(x, X, t)$ описывается уравнением

$$D\left[-i\frac{\partial}{\partial x},\ i\frac{\partial}{\partial t},\ \mathbf{R}(X),\ \varepsilon\frac{d\mathbf{R}}{dX}(X),\ldots\right]\psi(x,X,t)=0 \tag{1.1}$$

где D – линейный оператор, $\mathbf{R}(X)$ – вектор параметров системы. Как обычно, решение уравнения (1.1) ищется в виде $\phi(x, X)e^{-i\omega t}$, где $\omega \in C$ – неизвестная собственная частота, $\phi(x, X)$ – собственная функция, подчиненная соответствующим граничным условиям.

Основное состояние $\Psi(x)$ считается устойчивым [1], если для всех возможных собственных частот $\mathrm{Im}\,\omega < 0$, и неустойчивым, если существует хотя бы одна собственная частота ω_*, такая, что

$$\mathrm{Im}\,\omega_* > 0 \tag{1.2}$$

"Замораживая" X в уравнении (1.1) и беря $\phi(x, X) = Ae^{ikx}$, получим локальное дисперсионное уравнение

$$D(k,\omega,\mathbf{R}(X),0,\ldots)=0 \tag{1.3}$$

Можно представить, что уравнение (1.3) соответствует некоторой фиктивной однородной системе с параметрами, соответствующими данному X. Такая однородная система может быть исследована на наличие абсолютной неустойчивости [2, 3]. В работах [4, 5] предлагается следующий подход для нахождения собственных частот ω_*. Вводится функция $k_0(X)$ как выбранное соответствующим способом [3] решение уравнения $\partial\omega(k, X)/\partial k = 0$, отвечающее за наличие абсолютной неустойчивости при фиксированном значении X. Здесь $\omega(k, X)$ – решение уравнения (1.3). Определяется также функция $\omega_0(X) \equiv \omega(k_0(X), X)$ и рассматривается аналитическое продолжение этой функции в комплексную плоскость X. Если ближайшей к оси ReX особенностью функции $\omega_0(X)$ является седловая точка X_S, т.е. точка, в которой выполняется условие $\partial\omega_0(X_S)/\partial X = 0$, тогда существует [4, 5] собственная частота $\omega_* = \omega_S + O(\varepsilon)$, где $\omega_S = \omega_0(X_S)$. В частности, если Im $\omega_S > 0$, то рассматриваемая система будет неустойчивой в смысле определения (1.2).

2. Приведенный выше критерий может служить достаточным условием неустойчивости для широкого круга динамических систем. Однако он требует, в общем случае, исследования поведения функции $\omega_0(X)$ на комплексной плоскости X, что может представлять серьезные затруднения в случае сложного вида этой функции. В данной работе предлагается критерий неустойчивости для некоторого класса систем, для которого заключение о неустойчивости может быть получено в результате исследования параметров системы лишь при действительных значениях X. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть динамическая система обладает следующими свойствами:

1) Все параметры системы $R_1(X), \ldots, R_n(X)$ – аналитические функции в некоторой области, содержащей ось ReX, на комплексной плоскости X.

2) $\forall X \in \mathbb{R}$: $\operatorname{Im} R_j(X) = 0, \quad j = 1,\ldots,n$

3) $\exists X_0 \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial R_j}{\partial \operatorname{Re} X}(X_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n$

4) Однородная система с параметрами $R_1(X_0), \ldots, R_n(X_0)$ обладает абсолютной неустойчивостью.

Тогда такая система будет неустойчивой в смысле определения (1.2).

Доказательство. Функция $\omega_0(X)$ для данной системы может быть представлена в виде $\omega_0(X) = \Omega_0(R_1(X), \ldots, R_n(X))$, откуда

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial X}(X) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Omega_0}{\partial R_j}\frac{\partial R_j}{\partial X}(X) \tag{2.1}$$

Из предположений 1–3 следует, что

$$\frac{\partial R_j}{\partial X}(X_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n \tag{2.2}$$

Тогда из (2.1) и (2.2) получим, что $\partial\omega_0(X_0)/\partial X = 0$. Это означает, что X_0 – седловая точка для функции $\omega_0(X)$. В силу предположения 4 получаем, согласно определению функции $\omega_0(X)$, что Im$\omega_0(X_0) > 0$. Это и означает неустойчивость рассматриваемой системы в смысле определения (1.2).

3. Проиллюстрируем применение полученной теоремы, а также критерия работ [4, 5] на примере задачи о поведении малых изгибных колебаний бесконечно протяженной в обоих направлениях упругой трубы, заполненной движущейся жидкостью. Пусть параметры рассматриваемой системы слабо зависят от пространственной переменной x и не зависят от времени t. Предполагается, что деформация трубы сводится к изгибу оси, поперечное сечение трубы при этом остается неизменным. Уравнение для прогиба трубы $\xi(x, t)$ имеет вид [7]

$$\rho_1(x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \rho_2(x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \upsilon(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\xi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D(x)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)$$

где $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ – массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины, $D(x)$ – жесткость трубы на изгиб, $\upsilon(x)$ – скорость жидкости.

Для каждого фиксированного значения $X = \varepsilon x$ можно получить дисперсионное уравнение

$$D(X)k^4 - \upsilon^2(X)k^2 + 2\rho_2(X)\upsilon(X)\omega k - \omega^2(\rho_1(X) + \rho_2(X)) = 0$$

При фиксированном X это уравнение соответствует некоторой трубе с постоянными параметрами. Для однородной системы такого типа было установлено [8], что система линейно неустойчива при любых значениях параметров. Было также получено, что неустойчивость абсолютна, если

$$\rho_2(X) > 8\rho_1(X) \tag{3.1}$$

Сделаем дополнительные уточнения относительно вида параметров рассматриваемой системы. Будем считать трубу круглой, с внешним радиусом $R(X)$ и внутренним радиусом $r(X)$, и состоящей из однородного материала с плотностью ρ_T. Жидкость будем считать идеальной, несжимаемой с плотностью ρ_F. Тогда параметры системы будут иметь вид

$$\rho_1(X) = \pi\rho_T(R^2(X) - r^2(X)), \quad \rho_2(X) = \pi\rho_F r^2(X)$$

$$D(X) = E\frac{\pi}{4}(R^4(X) - r^4(X)), \quad \upsilon(X) = Q/(\pi\rho_F r^2(X))$$

где E – модуль Юнга трубы, Q – массовый расход жидкости. Таким образом, все параметры системы будут функциями только R и r.

Применим доказанную в разд. 2 теорему к исследованию описанной выше круглой трубы. Пусть на действительной оси X имеется некоторая область D, в которой выполнено условие (3.1) абсолютной неустойчивости для однородной системы. Если при этом $R(X)$ и $r(X)$ достигают одновременно экстремального значения в некоторой точке из области D, то в силу теоремы можно сделать заключение о неустойчивости такой трубы.

Конкретными примерами описанной выше ситуации служат круглые трубы с постоянным внешним или внутренним радиусом, а также трубы с постоянной толщиной стенок. Если такие трубы имеют участки, удовлетворяющие условиям (3.1), то они неустойчивы.

Рассмотрим также один случай неустойчивости трубы, в котором для применения условий неустойчивости работ [4, 5] требуется исследование поведения функции $\omega_0(X)$ на комплексной плоскости X. Пусть зависимости $R(X)$ и $r(X)$ имеют в безразмерных переменных следующий вид:

$$R(X) = a_1 + b/\left((X+c)^2 + d\right)$$

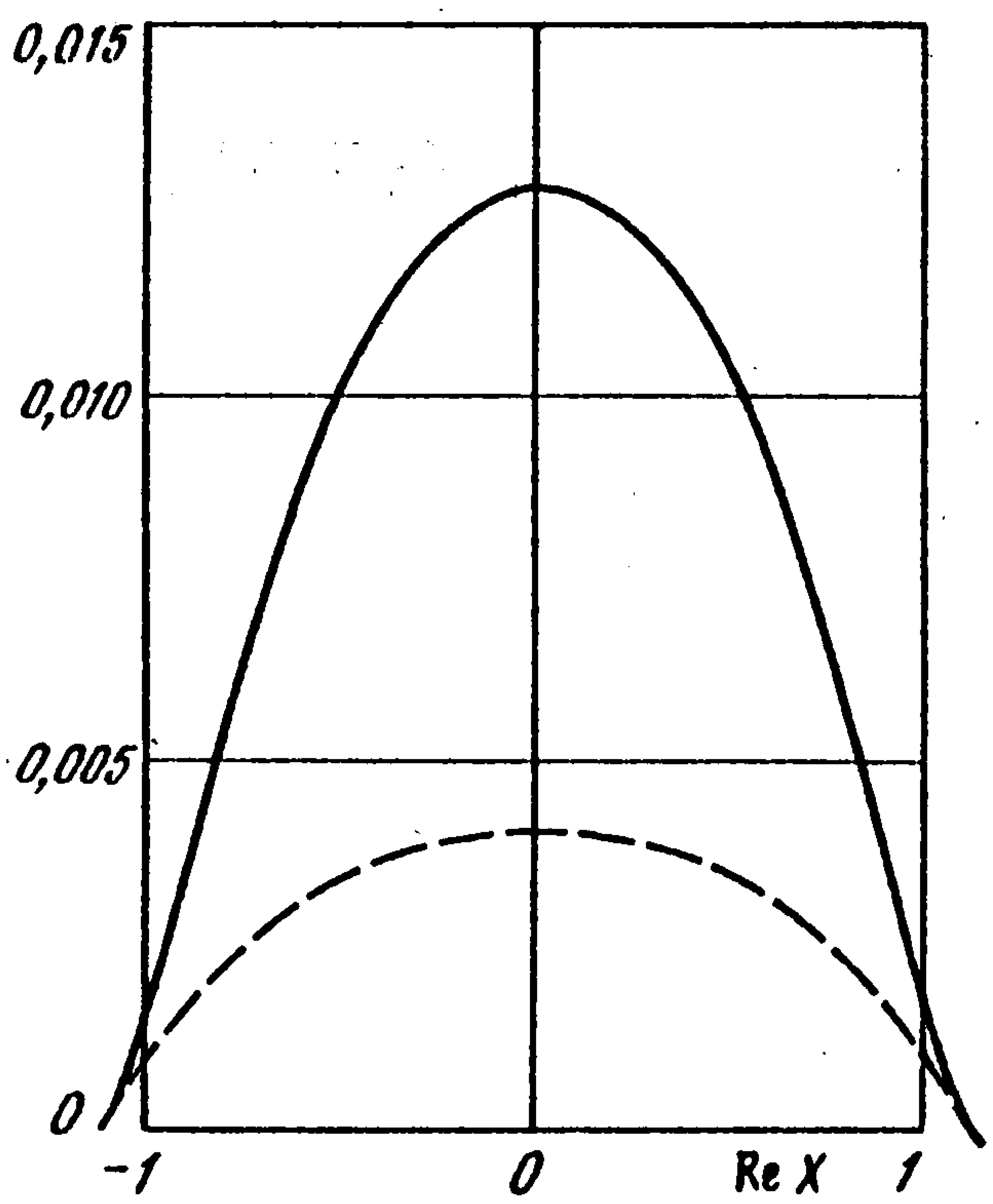
$$r(X) = a_2 - b/\left((X-c)^2 + d\right)$$

где a_1, a_2, b, c, d – действительные постоянные. При $c \neq 0$ параметры рассматриваемой системы, очевидно, не удовлетворяют условиям приведенной в раз. 2 теоремы.

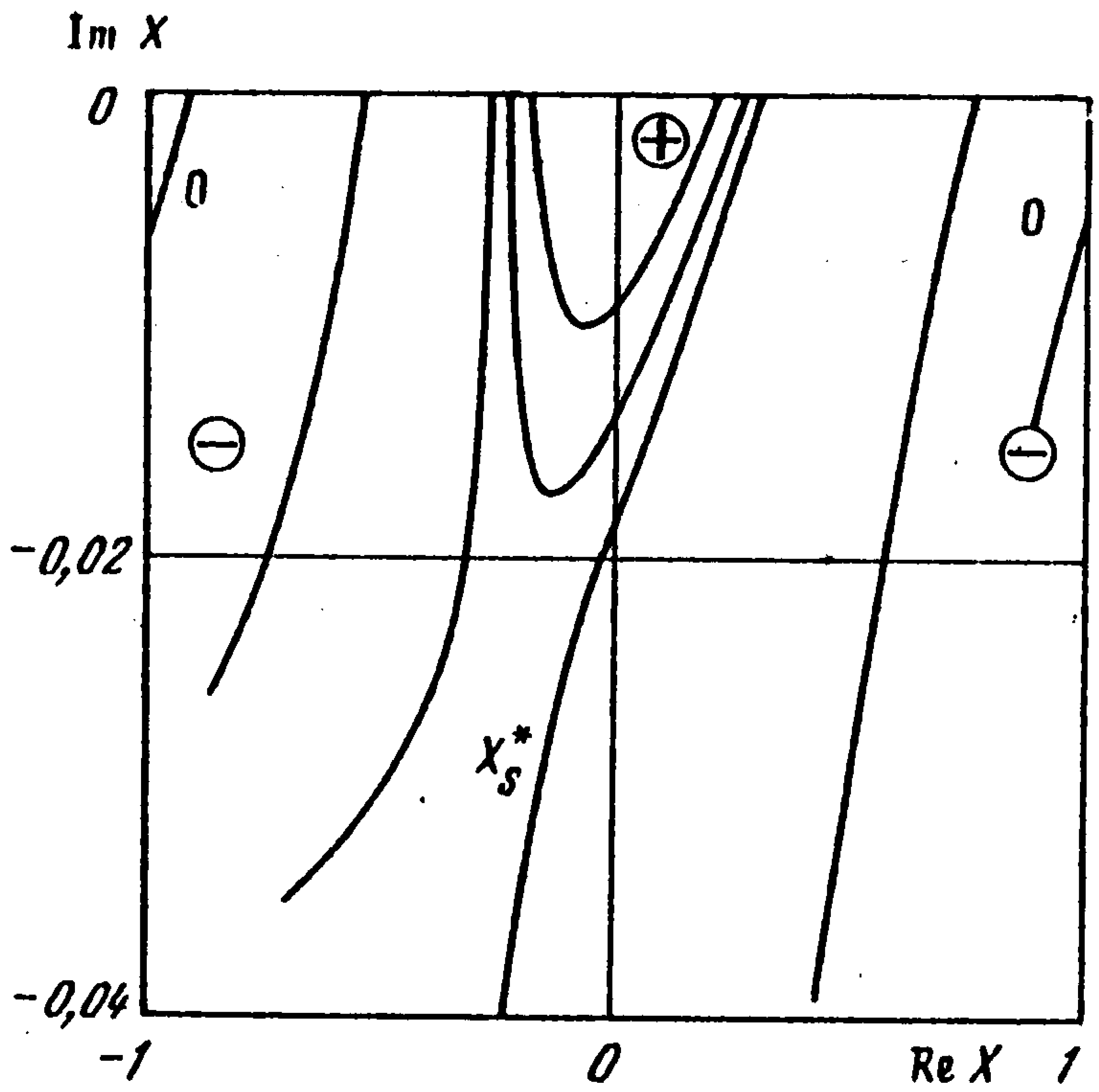
Функция $\omega_0(X)$ в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\omega_0(X) = \frac{\upsilon^2(X)}{16}\left(\frac{D(X)}{\rho_1(X)+\rho_2(X)}(8\beta(X) - 6\beta^2(X) + 2\alpha(X))\right)^{1/2}(3\beta(X) + \alpha(X))$$

$$\beta(X) = \rho_2(X)/(\rho_1(X) + \rho_2(X)), \quad \alpha(X) = i(8\beta(X) - 9\beta^2(X))^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

По причине достаточно сложного вида полученной фнкции $\omega_0(X)$ исследования этой функции в данной работе проводились численно. Для широкого диапазона значений параметров задачи был исследован рельеф функции $\omega_0(X)$ в окрестности оси ReX. Для всех рассмотренных значений параметров было получено, что если на некотором участке оси ReX выполнены условия абсолютной неустойчивости (3.1), то вблизи этого участка в комплексной плоскости X у функции $\omega_0(X)$ существует седловая точка X_S функции $\omega_0(X)$, причем Im$\omega_0(X_S) > 0$. Таким образом, система в рассмотренных случаях является неустойчивой согласно критерию работ [4, 5].

На фиг. 1 представлены графики зависимостей Im$\omega_0(X)$ (сплошная линия) и $\rho_1(X)/\rho_2(X) - 1/8$ (штрихи) для действительных X при $a_1 = 1{,}995$, $a_2 = 2{,}005$, $b = 0{,}015$, $c = 1$, $d = 4$. Как видно из этих графиков, условие абсолютной неустойчивости для однородной системы, соответствующей фиксированному X, совпадает с (3.1). На фиг. 2 показаны линии Im$\omega_0(X)$ = const на комплексной плоскости X, полученные в процессе численного исследования $\omega_0(X)$. Знаки плюс(минус) указывают направление роста (убывания) Imω_0. Нулем отмечены линии Im$\omega_0 = 0$. В найденной седловой точке $X_S = (-0{,}25; -0{,}026)$ имеем Im$\omega_0(X_S) = 0{,}0121 > 0$, что свидетельствует о неустойчивости системы.

Отметим в заключение, что, как показано в [9], сформулированный в данной работе критерий неустойчивости, как и критерии работ [4, 5], являются только достаточными для неустойчивости, и невыполнение этих критериев не означает устойчивости исследуемой системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
2. *Bers A., Briggs R.J.* Criteria for determining absolute instability and distinguishing between amplifying and evanescent waves // Bull. Amer. Phys. Soc. 1964. V. 9. № 3. P. 304–305.
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука. 1979. 527 с.
4. *Chomaz J.M., Huerre P., Redekopp L.G.* A frequency selection criterion in spatially developing flows // Stud. Appl. Math. 1991. V. 84. № 2. P. 119–144.

5. *Huerre P., Monkewitz P.A.* Local and global instabilities in spatially-developing flows // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto Calif.: Annu Revs Inc., 1990. V. 22. P. 473–537.
6. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. 148–153.
7. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
8. *Куликовский А.Г., Шикина И.С.* Об изгибных колебаниях длинной трубы, заполненной движущейся жидкостью // Изв. АН АрмССР. Т. 41. № 1. 1988. С. 31–39.
9. *Куликовский А.Г.* О потере устойчивости слабо неоднородными течениями в протяженных областях. Возникновение поперечных колебаний трубы с текущей в ней жидкостью // ПММ, 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 93–99.

Москва

Поступила в редакцию
2.III.1993