

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. Ю.Б. Назаренко

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКОЙ ЖЕСТКОСТИ

Предлагается основанный на вариационных принципах новый подход, позволяющий определять динамические перемещения цилиндрической оболочки произвольного контура на основе решения задачи для круговой формы [1]. Применение этого подхода совместно с методом малого параметра [2] существенно повышает точность оценки распределения напряжений. При значительном удалении точечного источника, удовлетворяющего условию излучения Зомерфельда, решение распространяется на случай дифракции сферических волн на цилиндрической полости, подкреплённой впаянной оболочкой жесткости.

1. Дифракция сферических волн на цилиндрической полости кругового очертания. Будем искать решение уравнения движения для изотропного упругого массива при помощи скалярного φ и векторного ψ потенциалов, связанных с перемещениями зависимостью Гельмгольца [3].

Введем цилиндрическую систему координат, направив ось z вдоль оси цилиндрической плоскости, и представим уравнение движения через потенциалы в виде

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi_l + \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

где φ — скалярный потенциал, ψ_l — проекции векторного потенциала на оси координат, C_1 и C_2 — продольная и поперечная скорости распространения волны.

Представим падающую волну в плоскости, нормальной оси полости с прямолинейным фронтом, изменяющуюся по известному закону вдоль оси z . Пренебрегая составляющей механического воздействия вдоль оси полости, примем скалярный потенциал падающей волны, удовлетворяющий этим условиям и уравнению (1.1), в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0 \gamma_i^n I_n(\alpha r) \cos \epsilon \exp[-i(Kz + \omega t)]$$

$$\alpha = \sqrt{v^2 + K^2}, \quad \epsilon = n(\theta - \chi). \quad (1.2)$$

Потенциалы продольной φ^* и поперечной ψ^* отраженных волн зададим рядами

$$\begin{Bmatrix} \varphi^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} H_n \left(\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} r \right) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \epsilon \exp[-i(Kz + \omega t)],$$

$$\beta = \sqrt{w^2 + K^2} \quad (1.3)$$

где φ_0 — максимальная амплитуда динамического воздействия, I_n и H_n — функции Бесселя и Ганкеля, A_n и B_n — постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий, v и w — волновые числа, определяемые соотношениями $v = \omega/C_1$ и $w = \omega/C_2$, ω — круговая частота, K — константа разделения; χ — угол между

направлением распространения продольной волны и вертикальной осью, совпадающей с началом отсчета угла θ , $\gamma = 1$ при $n > 0$ и $\gamma = 0,5$ при $n = 0$.

Для оценки напряженно-деформированного состояния среды в объемной постановке примем условие достаточной удаленности источника излучения от полости и рассмотрим скалярный потенциал φ и проекцию потенциала ψ на ось z . Проекции векторного потенциала на другие оси положим, так же как и при плоской постановке задачи, равными нулю ввиду их несущественного влияния. Это вытекает из общего решения системы дифференциальных уравнений в трехмерном упругом массиве методом малого возмущения, согласно которому оно определяется решением нулевого приближения, не учитывающего члены с малыми значениями коэффициентов, и возмущения в решении, определяемого по известной методике при соответствующем их учете.

Поскольку для указанных проекций векторного потенциала нулевое решение соответствует плоской волне и равно нулю, возмущения для них также равны нулю. Таким образом, будем считать только возмущения для тех потенциалов, которые имели решения, и для плоской постановки задачи.

Напряжения в массиве при отражении волны на цилиндрической полости определяются суммой потенциалов падающей (1.2) и отраженных (1.3) волн. Вычислив их по известной методике, определим компоненты напряженного состояния в плоскости $r\theta$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-i(Kz + \omega t)] \cos \epsilon \{ \lambda(1 - K^2) \alpha^2 [-2\gamma\varphi_0 i^n f_1 - A_n f_2] + \\ &+ \mu [4\gamma\varphi_0 i^n F_1 + 2A_n F_2 - 2B_n F_3] \} \\ \sigma_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-i(Kz + \omega t)] \cos \epsilon \{ \lambda(1 - K^2) \alpha^2 [-2\gamma\varphi_0 i^n f_4 - A_n f_6] - \\ &- \mu [4\gamma\varphi_0 i^n F_4 + 2A_n F_5 - 2B_n F_3] \} \\ \sigma_{r\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-i(Kz + \omega t)\} \mu \sin \epsilon [4\varphi_0 i^n L_4 + 2A_n L_5 + B_n F_6]\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$F_{1,2} = \left[\frac{(n+n^2)}{r^2} - \alpha^2 \right] f_{1,2} - \frac{\alpha}{r} g_{1,2}, \quad F_3 = \frac{(n+n^2)}{r^2} f_6 - \frac{n\beta}{r} g_6$$

$$F_4 = F_1 + \alpha^2 f_5, \quad L_{4,5} = F_{4,5} + \frac{\alpha}{r} (1-n) g_{4,5}$$

$$F_6 = \frac{2\beta}{r} g_6 + \left[\beta^2 - \frac{2(n+n^2)}{r^2} \right] f_6, \quad f_1 = f_4 = I_n(\alpha r), \quad f_2 = f_5 = H_n(\alpha r),$$

$$g_1 = g_4 = I_{n-1}(\alpha r)$$

$$g_2 = g_5 = H_{n-1}(\alpha r), \quad f_6 = H_n(\beta r), \quad g_6 = H_{n-1}(\beta r)$$

Здесь λ и μ — постоянные Ляме. Коэффициенты A_n и B_n в выражениях (1.4) определяются из граничных условий на круговом контуре полости, а константа разделения K — из аппроксимации фронта сферической волны, удовлетворяющей условию излучения Зомерфельда [4], вдоль полости

$$\varphi = \frac{\varphi_0^*}{S} \exp\{i\omega(S/C_1 - t)\} \quad (1.5)$$

где S — расстояние от точечного источника до полости, φ^* — максимальное давление на фронте волны.

2. Дифракция сферических волн на цилиндрической полости с некруговым контуром. Представим контур полости в виде

$$r = r_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp(ik\theta) \quad (2.1)$$

Здесь r_0 — приведенный радиус контура выреза, S_k — амплитуда отклонения контура от круговой формы k гармоники в разложении Фурье. При незначительных отклонениях контура от круговой формы решение задачи можно свести к полярно-симметричной, используя метод малого параметра [2]. Задача решается путем линеаризации распределения напряжений в пределах отклонения контура от круговой формы, переноса граничных условий на круговой контур и представляется в виде напряжений нулевого приближения $\sigma^{(0)}$, а также возмущений в напряжениях $\sigma^{(1)}$, вызванных отклонениями контура от круговой формы. Эти напряжения представлены для условия плоской деформации [5], но могут быть использованы также и для описания напряженного состояния любого сечения, нормального к оси полости при дифракции сферических волн. Граничные условия в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \cos \epsilon \left\{ \lambda(1-K^2) \alpha^2 [2\gamma\varphi_0 i^n (g_1 \alpha - \frac{n}{r} f_1) + \right. \\ & + A_n (g_2 \alpha - \frac{n}{r} f_2)] - 2\mu [2\gamma\varphi_0 i^n (\xi f_1 - \zeta f_1 + \eta g_1) + A_n (\xi f_2 - \zeta f_2 + \eta g_2) - \\ & \left. - B_n F_7 \right\} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp [i(k\theta - \omega t)] \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ik}{r} \cos \epsilon [\lambda(1-K^2) \alpha^2 (-2\gamma\varphi_0 i^n f_1 - A_n f_2) + \right. \\ & + 2\mu (-2\gamma\varphi_0 i^n F_4 - A_n F_5 + B_n F_3)] - \sum_{n=0}^{\infty} \mu \sin \epsilon [4\varphi_0 i^n L_1 + \\ & \left. + 2A_n L_2 + B_n F_8 \right\} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp [i(k\theta - \omega t)] \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_7 = & \left[\frac{n\beta^2}{r} - \zeta \right] f_6 + \frac{3ng_6\beta}{r^2}, \quad F_8 = \left[2\zeta - \frac{\beta^2(n+2)}{r} \right] f_6 + \\ & + \beta \left[\beta^2 - \frac{2(n^2+2)}{r^2} \right] g_6, \quad \xi = \frac{\alpha^2(1+n)}{r}, \quad \zeta = \frac{n^3+3n^2+2n}{r^3}, \\ \eta = & \alpha \left[\frac{n^2+2}{r^2} - \alpha^2 \right], \quad L_{1,2} = \left[\frac{n\alpha}{r} - \zeta \right] f_{1,2} + \frac{3n\alpha g_{1,2}}{r^2} \end{aligned}$$

3. Подкрепление выреза кольцом жесткости. При наличии плотного контакта между кольцом жесткости и пластиной решение получим путем сведения контактной задачи взаимодействия двух сред с разными механическими характеристиками к однородной за счет эквивалентного изменения параметров кольца. Однако использование метода малого параметра для перехода к полярно-симметричным границам ограничено случаем незначительных отклонений контура отверстий от окружности.

Для устранения этого ограничения предлагается применить принцип эквивалентного изменения жесткости и нагрузки при переходе от некругового кольца к круговому [1] на основании вариационного подхода Ритца — Тимошенко, а также использовать условие достаточной близости минимумов потенциальных

энергий систем для некругового и кругового кольца при незначительных отклонениях контура от окружности.

Учитывая, что истинные перемещения в соответствии с вариационным принципом должны соответствовать минимальной потенциальной энергии, определим их для некругового кольца из решения для кругового при условии равенства их энергий.

Рассмотрим потенциальную энергию некругового кольца с координатами, определенными выражением (2.1) в произвольном интервале $\theta_1 < \theta < \theta_2$, в виде

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{E_r I}{2R_0^2 \rho^2} \left(\frac{d^2 U}{d\theta^2} + U \right)^2 - p \frac{dU}{d\theta} - qU \right] \left(R_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp(ik\theta) \right) d\theta \quad (3.1)$$

а также для кругового кольца с радиусом средней линии R_0

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{E_r I_c}{2R_0^4} \left(\frac{d^2 U}{d\theta^2} + U \right)^2 - p_c \frac{dU}{d\theta} - q_c U \right] R_0 d\theta \quad (3.2)$$

Индексы r относятся к случаю кольца, c — к случаю кругового кольца.

При соотношении $k S_k \ll R_0$, пренебрегая малыми величинами, установим условие эквивалентного перехода к круговому кольцу за счет изменения внешней нагрузки

$$\begin{cases} p_c \\ q_c \end{cases} = \begin{cases} p \\ q \end{cases} \left(1 + \frac{1}{R_0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp(ik\theta) \right) \quad (3.3)$$

и жесткости кольца в каждой ее точке

$$E_r I_c = E_r I (1 + T)$$

$$T = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \left[(2k^2 - 1) \frac{S_k}{R_0} \exp(ik\theta) - \frac{k^2 S_k^2}{R_0^2} \exp(2ik\theta) \right] \quad (3.4)$$

Здесь p и q — радиальная и тангенциальная составляющие внешней нагрузки, действующей на кольцо, $E_r I$ — жесткость некругового кольца, ρ — его радиус кривизны, U — тангенциальные перемещения.

Рассмотрим решение контактной задачи для равномерной составляющей нагрузки. Напряжения нулевого приближения в среде при круговых контурах кольца и некруговых выреза получим при учете принципа неразрывности Сен-Венана. Для этого перейдем к рассмотрению кольца с модулем упругости, как и среды за счет изменения его толщины, при соблюдении постоянства жесткости на одноосное нагружение, а также компенсируем зазор на контуре полости за счет изменения внутренней границы кольца. Тогда координаты внутреннего контура кольца определяются из выражения

$$r = m + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{S_k \exp(ik\theta)}{m}, \quad m = r_2 - \frac{(r_2 - r_1) E_r}{E} \quad (3.5)$$

Здесь r_1 и r_2 — внутренний и внешний приведенные радиусы кольца, E_r — его модуль упругости, E — модуль упругости массива.

Напряжения при равномерной нагрузке для нулевого приближения и для возмущений определим по выражениям [5], устанавливая граничные условия (2.2) с учетом (3.5).

Решение контактной задачи для неравномерной нагрузки получим на основе перехода к однородной среде за счет эквивалентного изменения параметров кольца при неизменной его жесткости для разных условий нагружения, а также компенсации зазора на контуре полости. В этом случае напряжения нулевого приближения определим по выражениям (1.4) при значении внутреннего приведенного кругового контура

$$r = r_2 - (r_2 - r_1) (E_r/E)^{1/3} \quad (3.6)$$

Тогда выражения в напряжениях при граничных условиях (2.2) найдем по выражениям [1] для отклонений контура, устанавливаемых зависимостью

$$s = -W \left[\frac{T(r_2 - r_1)}{3} - \left(\frac{E}{E_r} \right)^{1/2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp(ik\theta) \right] \quad (3.7)$$

Здесь $W = (E_r/E)^{1/3}$ для неравномерных в окружном направлении граничных условий (2.2), $W = E_r/E$ — для равномерных.

Распределение усилий в реальном кольце получим на основе решения дифференциального уравнения силового равновесия в квазистатической постановке кругового кольца при установлении распределения напряжений на внешней его поверхности с учетом их изменений по выражению (3.3) и при переменной жесткости кольца (3.4) по выражениям [1].

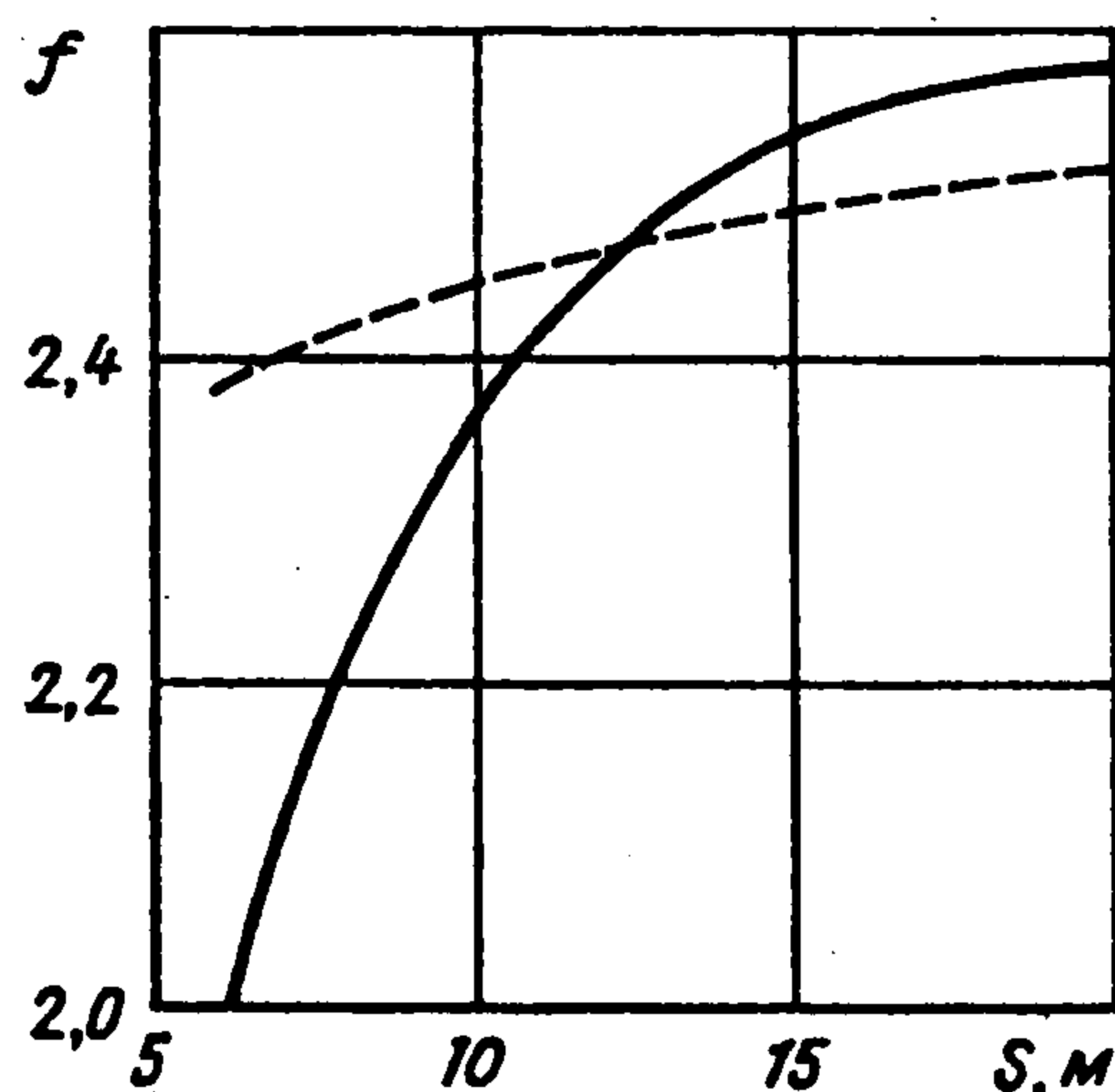
4. Результаты исследований. Оценим влияние близости точечного источника излучения сферических волн с частотой $\omega = 400$ рад/с на цилиндрическую полость с радиусом $r_0 = 1,0$ м, расположенную в среде с модулем упругости $E = 2,4 \cdot 10^3$ МПа и коэффициентом Пуассона 0,2.

Для установления параметров аппроксимации падающей волны (1.2), удовлетворяющей условию излучения Зомерфельда (1.5), разложим выражения (1.2) и (1.5) в ряд Тейлора по переменной z и рассмотрим только те члены, которые оказывают существенное влияние. Тогда, соблюдая условие $K^2 \ll \omega^2/C_2^2$, а также ограничения $LS \ll 1$ и $LK \ll 2$, получаем

$$K = \left[6 - 12 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{L^4 \omega^2}{144 S^2 C_1^2} + \frac{L^2}{6S^2} \right)^{1/2} \right] / L \quad (4.1)$$

Здесь S — наименьшее расстояние от точечного источника до цилиндрической полости.

Длину полости L , на которой выполняются граничные условия, определяем с учетом того, что краевой эффект в начальном сечении $z = 0$ отсутствует. Тогда, принимая во внимание только разложение по косинусам вдоль оси z в выражении (1.2) и рассматривая участок полости в диапазоне $-\pi/2K < \theta < \pi/2K$, устанавливаем, что длина равна 13 м (фигура). Сплошной линией обозначена зависимость концентрации напряжений f от длины полости L , на которой проводится аппроксимация внешнего воздействия.



Для принятых исходных данных показана оценка влияния близости источника излучения волн на цилиндрическую полость и установлена зависимость f в наиболее нагруженных сечениях $\theta = \pm \pi/2$ от удаленности источника S (штриховая линия).

Приведенное решение дифракции сферических волн на цилиндрическую полость позволяет оценить напряженно-деформированное состояние в широких пределах удаленности точечного источника и установить границы применимости плоского решения.

Предложенный подход сведения контактных задач концентрации напряжений на цилиндрических полостях с некруговыми контурами к полярно-симметричным граничным условиям на основе эквивалентного изменения жесткости оболочки и параметров ее нагружения не имеет жестких ограничений на величины отклонений контура оболочки от круговой формы и тем более на их производные, как в методе малого параметра Пальмова. Этот подход хорошо совместим с методом малого параметра [2], и, что самое главное, погрешность при оценке напряженного состояния массива по методу малого параметра будет уменьшена путем компенсации отклонения контура за счет неравномерной жесткости эквивалентного кругового кольца при наложении двух методов. Это дает возможность ожидать достаточно хорошую точность и достоверность предлагаемого подхода решения задач концентрации напряжений на цилиндрических полостях с впаиваемыми оболочками жесткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаренко Ю.Б. Дифракция затухающих волн на горных выработках при пластической работе приконтурной зоны массива // Изв. вузов. Горн. журн. 1988. № 7. С. 31–36.
2. Пальмов В.А. Напряженное состояние вблизи шероховатой поверхности упругих тел // ПММ. 1968. Т. 27. Вып. 5. С. 963–969.
3. Пао Йисин. Динамическая концентрация напряжений в упругой пластине // Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. 1962. № 4. С. 126–134.
4. Купрадзе В.Д. Основные задачи математической теории дифракции. Л.; М.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1935. 111 с.
5. Назаренко Ю.Б. Расчет крепей горных выработок на действие динамической нагрузки // Изв. вузов. Горн. журн. 1986. № 9. С. 22–27.

Московская обл.

Поступила в редакцию
7.IX.1991