УДК (539.3+622.531):534.1

© 1993 г. А.П. Заика, Н.В. Слоновский

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИМОШЕНКО ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА

Асимптотическими методами нелинейной механики получены представления решения уравнения Тимошенко об ударе шара по стержню для всего спектра частот собственных колебаний стержня.

Запишем интегральное уравнение Тимошенко в задаче о поперечном ударе шара по стержню [1] в безразмерном виде

$$s_0(\tau)-\int_0^\tau (\tau-\tau_1)p(\tau_1)d\tau_1 - s_1 p^{2/3}(\tau) - s_2 L(p) = 0 \tag{1}$$

$$L(p)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\int_0^\tau p(\tau_1)\sin[s_3(2n-1)(\tau-\tau_1)]d\tau_1$$

$$p=P/P_m^0, \quad \tau=t/t_1^0 \tag{2}$$

Здесь P_m^0 и t_1^0 – максимум силы удара и его продолжительность, определяемые в соответствии с теорией Герца [2] (в предположении, что стержень заменен полуограниченным телом); параметры $s_0, \ldots, s_3$ определяются однозначно в соответствии с равенством (2).

Имеют место соотношения

$$d^2L(p)/d\tau^2 = L(p'')$$

$$L(p)=\frac{\pi^4}{96}\frac{1}{s_3}p(\tau)+\frac{1}{s_3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}\times$$

$$\times\int_0^\tau p(\tau_1)\sin[s_3(2n-1)^2(\tau-\tau_1)]d\tau_1 \tag{3}$$

$$L(p)=\frac{1}{2}s_3\int_0^\tau p(\tau_1)(\tau-\tau_1)d\tau_1\int_0^1 \theta_2[0|\frac{4}{\pi}s_3(\tau-\tau_1)\gamma]d\gamma$$

Отметим, что штрихи сверху везде означают производные по τ.

Первое равенство (3) получено заменой $\tau_* \to \tau-\tau_1$ перед дифференцированием, третье – подстановкой представления тета-функции $\theta_2\ (0|\cdot)$ в виде ряда и почлененного интегрирования; τ_* – новая переменная интегрирования.

Рассмотрим случай

$$s_3 \gg 1 \tag{4}$$

(малая гибкость стержня, спектр собственных поперечных колебаний стержня – высокочастотный).

Из уравнения (1) имеем $s_1 p^{2/3} \sim s_0\tau$, $\tau \ll 1$, откуда

$$p''(\tau) \sim {}^3/_4(s_0/s_1)^{3/2}\tau^{-1/2}, \quad \tau \ll 1 \tag{5}$$

На основании соотношений (4) и (5) из первого равенства (3) имеем

$$L''_{\tau^2}(p) = {}^3/_4\sqrt{\pi}(s_0/s_1)^{3/2}\,(s_3)^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos[(2n-1)^2 s_3\tau + \pi/4]\,, \quad s_3 \gg 1 \qquad (6)$$

Здесь использовано соотношение

$$\int_0^{s_3\tau} \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \tau_1 \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau_1}} \sim \sqrt{\pi/2}, \quad s_3 \gg 1$$

Дифференцируя уравнение (1) на основании равенства (6) (в связи с быстрой сходимостью оставлен первый член ряда в (6)) приходим к уравнению Дюфринга (с нулевой собственной частотой и без трения)

$$q''_{\tau^2}(\tau) + s_1^{-1} q^{3/2}(\tau) = E^*\cos(s_3\tau + \pi/4)$$

$$q = p^{2/3}, \quad E^* = {}^3/_4\sqrt{\pi}\,\frac{s_0^{3/2}}{s_1^{5/2}}\,\frac{s_2}{s_3^{1/2}} \qquad (7)$$

Начальные условия имеют вид

$$q(0) \equiv q_0 = 0, \quad q'(0) \equiv q'_0 = s_0/s_1 \qquad (8)$$

(второе условие (8) следует из (5)).

Можно утверждать, что высокочастотная асимптотика ($k \to \infty$) решения уравнения типа Дюффринга

$$u'' + A_0 u^s(\tau) = G\cos(k\tau + \alpha) \qquad (9)$$

$$A_1 < A_0 < A_2; \quad 0 < G < G_1; \quad A_1, A_2, \quad G_1 > 0$$

(k, α, s – вещественные числа) с начальными условиями

$$u(0) \equiv u_0 = 0, \quad u'(0) = u'_0 \qquad (10)$$

имеет вид

$$[(s+1)\Omega]^{-1}[B_\mu(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{2}) - B_{\mu_0}(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{2}) = \tau \qquad (11)$$

Расстояние от $\tau = 0$ до τ_1 – первого нуля (или второго при $u_0 = 0$) и величина u_m – максимума $u(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1)$ определяется соотношениями

$$\tau_1 = [(s+1)\Omega]^{-1}[2B(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{2}) - B_{\mu_0}(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{2})]$$

$$u_m = \left\{ \frac{s+1}{2A_0}\,[u_0'^2 + \frac{2A_0}{s+1}\,u_0^{s+1} - 2G/k\,u'_0\cos\alpha] \right\}^{1/(s+1)} \qquad (12)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{2A_0}{s+1}}\,u^{\frac{s-1}{2}}, \quad \mu = [\frac{u(\tau)}{u_m}]^{s+1}, \quad \mu_0 = |\frac{u_0}{u_m}|^{s+1}$$

Здесь $B(\cdot,\cdot)$, $B_\mu(\cdot,\cdot)$ – бета-функция и неполная бета-функция.

Из соотношений (11) и (12) следует, что возмущение не оказывает влияния на $u(\tau)$ при выполнении одного из условий

$$k = \infty, \quad u'_0 = 0, \quad \alpha = \pi/2 \qquad (13)$$

Таким образом, равенство $g = 0$ эквивалентно соотношениям (13). Величины u_m и τ_1, могут быть большими или меньшими их невозмущенных значений в зависимости от знаков u'_0, $\cos\alpha$ и соотношений $s < 1$ или $s > 1$. При $s = 1$ имеет место изохронность – "частота" Ω не зависит от u_0 и u'_0.

Соотношения (11), (12) получаются путем умножения уравнений (9) на $u'(\tau)$ и интегрирования от 0 до τ. Выполняя интегрирование по частям в тригонометрическом интеграле, получим асимптотически точное при $k \to \infty$ соотношение

$$u'^2(\tau) - 2Gk^{-1}\sin(\alpha + k\tau)u'(\tau) - M = 0$$

$$M = u_0'^2 - \frac{2A_0}{s+1}(u^{s+1} - u_0^{s+1}) - 2\frac{G}{k}u_0'\sin\alpha \tag{14}$$

Максимум u_m определяется условием $u'(\tau) = 0$, откуда

$$u_m = \left\{\frac{s+1}{2A_0}\left[u_0'^2 + \frac{2A_0}{s+1}u_0^{s+1} - 2\frac{G}{k}u_0'\cos\alpha\right]\right\}^{1/(s+1)} \tag{15}$$

Решая уравнение (14) относительно $u'(\tau)$ и ограничиваясь величинами первого порядка малости при $k \to \infty$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными с решением

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^{s+1}}} = \Omega\tau, \quad \nu = \mu^{1/(s+1)}, \quad \nu_0 = \mu_0^{1/(s+1)} \tag{16}$$

Соотношение (16) эквивалентно (11). Первое равенство (12) следует из (11). Применительно к рассматриваемому случаю удара следует считать, что

$$u_0 = q_0 = 0, \quad u_0' = q_0' = s_0/s_1, \quad E^* = G, \quad A_0 = 1/s_1, \quad \mu_0 = 0, \quad s = {}^3/_2$$

Величина s зависит от кривизны поверхности в точке контакта [3]. Отсюда

$$\Omega = \frac{4}{5}\kappa\left(1 + \frac{s_1}{s_0}\frac{\sqrt{2}E^*}{s_3}\right)^{2/s}, \quad \kappa = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma({}^2/_5)}{\Gamma({}^9/_{10})} \tag{17}$$

Используя равенство (12), получим

$$P_m = (1 - W_1)^{3/s}P_m^0, \quad t_1 = (1 - W_1)^{-3/s}t_1^0 \tag{18}$$

$$W_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi^6}\frac{1}{1-\sigma^2}\sqrt{\frac{v}{v_0}}\frac{i^{3/2}R^{1/2}}{r^2}\beta^4$$

где t_1, t_1^0 – продолжительности удара в случае стержня и полупространства, i – радиус инерции сечения стержня относительно главной оси, перпендикулярной скорости шара, r – радиус площади сечения стержня ($r = \sqrt{F/\pi}$, где F – площадь сечения стержня), R – радиус шара, β – гибкость стержня ($\beta = l/i$, l – длина стержня), v_0 – скорость шара перед ударом, v – скорость продольных волн в стержне, σ – модуль Пуассона (материалы стержня и шара одинаковы).

Отметим, что зависимость $q = q(\tau)$ является наложением высокочастотных колебаний малой амплитуды на медленный процесс. Это следует из выражения для $q'(\tau)$, полученного решением квадратного уравнения (14). Высокочастотные колебания наблюдались в опытах [4].

Рассмотрим решение при

$$s_3 \ll 1 \tag{19}$$

(большая гибкость стержня, спектр собственных колебаний – низкочастотный). Приближенный, но простой способ состоит в использовании первого члена ряда в $L(p)$ и замены на основании (19) синуса его аргументом. При этом получается уравнение, аналогичное уравнению теории удара Герца, откуда известным методом [2] находим

$$P_m = P_m^0(1 + 2m/M_1)^{-3/s}, \quad t_1 = (1 + 2m/M_1)^{-2/s}t_1^0 \tag{20}$$

где m, M_1 – массы шара и стержня.

Более точный результат может быть найден при дополнительном к (19) требовании $s_2\sqrt{s_3} \ll 1$, или, после подстановки s_2, s_3

$$\frac{6}{\pi^{9/4}}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{8}{15}\right)^{1/5}\frac{1}{(1+\sigma^2)^{1/5}}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/10}\left(\frac{r}{l}\right)^{2/5}\left(\frac{Q}{r^3}\right)^{4/5}\left(\frac{R}{l}\right)^{1/10} \ll 1$$

(где Q объем ударяющего тела), что эквивалентно, например, малой величине ударяющего тела. Подставляя в последнее соотношение (3) выражение $\theta_2(0|\cdot)$, получаемое мнимым преобразованием Якоби, и выполняя интегрирование по частям во внутреннем интеграле, находим, что в ряду, представляющем $\theta_2(0|\cdot)$, основным является слагаемое с нулевым индексом суммирования; остальные члены при условии (19) – быстро колеблющиеся экспоненты мнимого аргумента, их вклад в интеграл по τ_1, асимптотически мал.

Таким образом, получаем

$$L(p)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{s_3}\int_0^{\tau}(\tau-\tau_1)^{1/2}p(\tau_1)\,d\tau_1 \qquad (21)$$

Подстановка этого выражения в (1) приводит к интегральному уравнению с малым параметром $s_2\sqrt{s_3}$, допускающему линеаризацию ядра (оператор в левой части (1) – компактный в банаховом пространстве C [4], аналогичные практические способы линеаризации см. в [5, 6]). Аппроксимируя радикал в (21) полиномом Чебышева первого рода в L^2, получим как и выше, решение уравнения (1), приводящее к соотношениям

$$P_m=(1+W_2)P_m^0,\quad t_1\doteq(1+W_2)^{-2/5}t_1^0$$

$$W_2=\frac{6}{\pi^2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\frac{18}{15}\right)^{1/5}\frac{\Gamma(^3/_4)}{\Gamma(^1/_4)\kappa}\times$$

$$\times\frac{1}{(1-\sigma^2)^{1/5}}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/10}\left(\frac{r}{l}\right)^{2/5}\left(\frac{Q}{r^3}\right)^{4/5}\left(\frac{R}{l}\right)^{1/10} \qquad (22)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае ($s_3 \ll 1$, $s_2\sqrt{s_3} \ll 1$) P_m и t_1 не зависят от гибкости стержня (т.е. от l).

В промежуточном случае при

$$s_3 \sim 1 \qquad (23)$$

ограничиваясь первым членом ряда в (1), аппроксимируем синус полиномом Чебышева первого рода в L^2 ($\sin s_3(\tau-\tau_1) \sim 2J_1(s_3)(\tau-\tau_1)$, где $J_1(\cdot)$ функция Бесселя первого рода, первого порядка). Получим приведенным выше способом

$$P_m=[1+2s_2J_1(s_3)]^{-3/5}P_m^0 \qquad (24)$$

$$t_1=[1+2k_2J_1(s_3)]^{-2/5}t_1^0$$

Для оценки P_m и t_1 в (24) при условии (23) удобно представление [7]

$$J_1(s_3)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{s_3}}{1+s_3}\cos(s_3+\pi/4)$$

асимптотически точное при $s_3\to\infty$.

В случае

$$s_2 \ll 1$$

т.е. при

$$\frac{10}{3\pi^2}\left(\frac{2}{5\pi}\right)^{2/5}\frac{1}{\kappa}\frac{1}{(1-\sigma^2)^{2/5}}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/5}\left(\frac{R}{r}\right)^2\beta \ll 1$$

может быть использован метод усреднения [8]. Усредняя подинтегральную функцию во втором соотношении (3) по τ, получим после дифференцирования равенства (1) автономное дифференциальное уравнение, допускающее решение в замкнутом виде, например, при помощи интеграла энергии.

Рассмотрим решение этого уравнения методом линеаризации. Подстановкой

$$p \to Bp^{2/3}, \quad q = p^{2/3}$$

где B – постоянная, зависящая от способа аппроксимации, получим линейное уравнение с решением

$$q = k_0/k_1 \omega^{-1} \sin\omega\tau, \quad \omega = 2\kappa\sqrt{B/s}(1 + W_3) \tag{25}$$

$$W_3 = \frac{\pi^4 \kappa^2 B}{120} \frac{s_2}{s_3}$$

Отсюда

$$P_m = [^5/_4 B(1 + W_3)]^{-3/4} P_m^0$$

$$t_1 = (\pi/2)\sqrt{5/B}\,\kappa^{-1}\sqrt{1 + W_3}\, t_1^0 \tag{26}$$

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5\pi}{2}}\frac{1}{\pi^2\kappa^2}\frac{1}{(1+\sigma^2)^{4/5}}\frac{Ri}{r^2}\beta^3$$

Рассмотрим точность полученных результатов в частном случае известного решения для полупространства. В связи с тем, что в случае полуограниченного тела $W_1 = W_2 = W_3 = s_2 = 0$, соотношения (18), (20), (22), (25) являются точными. Выражения (26), получаемые линеаризацией в случае полуограниченного тела, представим в виде

$$\eta_p = \left(\frac{4}{5B}\right)^{3/4}, \quad \eta_t = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{\pi}{2\kappa} \tag{27}$$

где η_p и η_t – отношение значений P_m и t_1 для полуограниченного тела, полученных на основании решения (25) линеаризованного уравнения, к их точным значениям P_m^0 и t_1^0; относительные ошибки линеаризации имеют вид $\Delta p = |1 - \eta_p|$, $\Delta t = |1 - \eta_t|$. Для случая аппроксимации Чебышева в L^∞, первого и второго рода в L^2, Лежандра, линейной интерполяции с узлами 0,1 выполнялась линеаризация функции $p^{2/3}$ и из соотношения $p \sim Bp^{2/3}$ определялась соответствующая величина B. Результаты линеаризации приведены ниже

B	0,855	0,889	0,900	0,934	1,00
η_p	0,952	0,925	0,920	0,889	0,847
η_t	1,030	1,010	1,005	0,991	0,954
$\Delta p \times 10^2$	5	7,5	8	11	15
$\Delta t \times 10^2$	3	1	0,5	1	5

Минимальная погрешность Δt = 0,5% соответствует L^∞ (этот же порядок погрешности линеаризации (0,23%) получен [9] при определении частоты нелинейных колебаний). Наибольшая ошибка достигается при интерполяции (являющейся точечным приближением, а не интервальным, как в остальных случаях [10, 11]). Все значения Δp больше соответствующих Δt, что связано с повышенной точностью аппроксимации в точке $\tau = 0$ (и ей сопряженной $\tau = 1$ в автономной системе шар–стержень), величина же P_m определяется при $\tau = ½$. Минимальная величина соответствует аппроксимации Чебышева второго рода, которая дает большую точность при $\tau \sim ½$ [10, 11].

Рассмотренные методы применимы к исследованию поперечного удара в более сложных системах: балках, плитах, оболочках и т.д. Представление деформации под действием нагрузки в виде разложения по собственным функциям [12] в этих случаях дает возможность способом Тимошенко [1] получить интегральное уравнение типа (1), решение которого может быть исследовано приведенными выше методами. При этом основные соотношения (18), (20), (22), (24), (26) могут быть представлены в том же виде.

Усложненные модели деформирования, например реологические, допускают аналогичное исследование; в случае линейных вязкоупругих систем по принципу соответствия определяется одностороннее преобразование Фурье полученных решений, вводятся комплексные упругие постоянные и затем определяется оригинал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935. 674 с.
3. *Кильчевский Н.А.* Теория соударения твердых тел. Киев: Наук. думка, 1969. 246 с.
4. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 494 с.
5. *Бланкьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 494 с.
6. Вибрации в технике / Под ред. В.И. Челомея. М.: Машиностроение. 1979. Т. 2. 351 с.
7. *Слоновский Н.А.* Об одном классе интегральных представлений и некоторых оценках функций Бесселя / Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 5. С. 1101–1105.
8. *Филатов А.Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: ФАН, 1974. 214 с.
9. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1980. 270 с.
10. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 327 с.
11. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
12. Вибрации в технике / Под ред. В.И. Челомея. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 352 с.

Харьков

Поступила в редакцию
23.III.1992