

УДК 624.07:534.1

© 1993 г. В.В. Нестеренко

К ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Предлагается вариационный формализм второго порядка для вывода уравнения Тимошенко и согласованных с ним граничных условий. Исследуются свойства второй высокочастотной моды колебаний, предсказываемой в теории Тимошенко. Показано, что частоты этой моды неаналитически зависят от малого параметра, характеризующего влияние деформации сдвига на поперечные колебания балки. При обращении этого параметра в нуль частоты второй серии не возвращаются к невозмущенным значениям, а уходят на бесконечность. Поэтому они не могут быть предсказаны точно, но сам факт их учета подправляет, улучшает значения частот основной моды колебаний. Энергия балки Тимошенко, посчитанная для этих частот по Остроградскому, оказывается отрицательной. Обсуждается роль, которую играет вторая мода колебаний в теории Тимошенко. Предложен простой способ учета влияния деформации поперечного сечения балки в процессе колебаний на ее собственные частоты.

Уравнение Тимошенко описывает поперечные колебания упругой балки (или стержня) при учете инерции вращения и деформации поперечного сдвига [1]. Для каждой пространственной формы колебаний это уравнение дает два значения частоты, т.е. предсказывает две серии частот или две моды колебаний. Поэтому модель Тимошенко трактуется как двухмодовая аппроксимация точных уравнений теории упругости [2]. Сам Тимошенко рассматривал только низкочастотную моду, а вторую, высокочастотную моду колебаний не обсуждал [1]. Несмотря на обширную литературу по теории Тимошенко [2], роль высокочастотной моды остается не выясненной. В данной заметке предпринимается попытка восполнить этот пробел.

1. Вариационный формализм второго порядка для уравнения Тимошенко. Уравнение Тимошенко [1] можно записать в виде

$$y'' + a_1 y'''' - a_2 y'''' + a_3 y'''' = 0 \quad (1.1)$$

$$a_1 = \frac{E_* I}{\rho F}, \quad a_2 = \frac{I}{F} \left(1 + \frac{E_*}{kG} \right), \quad a_3 = \frac{\rho I}{kFG}$$

Здесь $y(t, x)$ — поперечное смещение балки, точка означает дифференцирование по времени t , штрих — по x , E_* — модуль Юнга, G — модуль сдвига, I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения и перпендикулярной плоскости колебаний, F — площадь поперечного сечения балки, ρ — объемная плотность материала балки, k — коэффициент сдвига (отношение среднего сдвигового напряжения по поперечному сечению балки к максимальному сдвиговому напряжению).

Уравнение (1.1) – можно получить вариационным путем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} L dt dx = 0 \quad (1.2)$$

если лагранжеву плотность взять в виде

$$L(y', y'', y', y'') = \frac{1}{2} [(y')^2 - a_1 (y'')^2 - a_3 (y''')^2 + a_2 y'' y'''] \quad (1.3)$$

В моменты времени t_1 и t_2 в (1.2) должны выполняться условия

$$\delta y(t_1, x) = \delta y(t_2, x) = 0, \quad \delta y'(t_1, x) = \delta y'(t_2, x) = 0 \quad (1.4)$$

Можно убедиться, что из (1.2)–(1.4) непосредственно следует уравнение Тимошенко (1.1). Кроме того, из (1.2) получаем следующие условия на концах балки ($x = x_1, x_2$):

$$[a_1 y'''' - \frac{1}{2} a_2 y'''''] \delta y = 0, \quad [a_1 y'' - \frac{1}{2} a_2 y'''] \delta y' = 0 \quad (1.5)$$

Для шарнирно закрепленного конца балки $y = 0$, а y' может принимать любые значения. В этом случае $\delta y = 0$, а $\delta y'$ – произвольно. Учитывая это и второе соотношение в (1.5), получаем для шарнирно закрепленного конца балки

$$y = 0, \quad y'' = 0 \quad (1.6)$$

В случае жестко заделанного конца балки имеем

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad (1.7)$$

Вариации δy и $\delta y'$ на таком конце также обращаются в нуль. Поэтому условия (1.5) оказываются выполненными и граничных условий, дополнительных к (1.7), здесь не возникает.

Уравнение Тимошенко имеет интеграл движения

$$E = \int_{x_1}^{x_2} (p_1 y' + p_2 y'' - L) dx \quad (1.8)$$

где p_1 и p_2 – канонические импульсы в рассматриваемой задаче [3, 4]

$$p_1 = \partial L / \partial y' - p_2, \quad p_2 = \partial L / \partial y'' \quad (1.9)$$

Используя явный вид лагранжевой функции (1.3), получаем

$$p_1 = y' + a_3 y'''' - \frac{1}{2} a_2 y''', \quad p_2 = -a_3 y'' + \frac{1}{2} a_2 y''' \quad (1.10)$$

Теперь формулу (1.8) можно переписать так:

$$E = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \{ (y')^2 + a_1 (y'')^2 - a_2 y' y'''' + a_3 [2y' y'''' - (y'')^2] \} dx \quad (1.11)$$

Величину E естественно назвать энергией для уравнения Тимошенко, рассчитанной по Остроградскому. Во-первых E – нётеровская сохраняющаяся величина, соответствующая инвариантности действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} L dt dx \quad (1.12)$$

при сдвигах времени $t \rightarrow t + \Delta t$, $\Delta t = \text{const}$ [5]. В теоретической физике такую сохраняющуюся величину общепринято называть энергией [6]. Чтобы формула (1.11) давала величину с размерностью энергии, достаточно помножить E на ρF . Во-вторых, E – значение функции Гамильтона на решениях уравнения (1.1). В рассматриваемой задаче функция Гамильтона должна строиться по Ост-

роградскому, который обобщил канонический формализм на динамические системы с лагранжевой функцией, зависящей от высших производных координат по времени [3].

Первые два слагаемых в (1.11) дают энергию балки в классической теории. Третий член в (1.11) после интегрирования по частям при учете граничных условий (1.6) или (1.7) можно заменить выражением

$$\frac{a_2}{2} \int_{x_1}^{x_2} (y'')^2 dx$$

представляющим собой ротационную энергию балки, так как $y''(t, x)$ — угловая скорость вращения поперечного сечения балки в приближении Релея. Как будет показано ниже (см. разд. 4) величина E не совпадает с механической энергией балки Тимошенко и ее точный физический смысл остается пока неясным.

2. Частотный спектр уравнения Тимошенко. Будем строить решение уравнения (1.1) методом разделения переменных

$$y(t, x) = e^{i\omega t} u(x) \quad (2.1)$$

После подстановки (2.1) в (1.1) и в (1.6), (1.7) получаем уравнение

$$a_1 u'''' + a_2 \omega^2 u'' + \omega^2 (a_3 \omega^2 - 1) u = 0 \quad (2.2)$$

и граничные условия для функции $u(x)$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением балки Тимошенко с шарнирно закрепленными концами, $x_2 = 0, x_2 = l$ (l — длина балки)

$$u(0) = u''(0) = 0, \quad u(l) = u''(l) = 0 \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.2), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), имеет вид

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (2.4)$$

Частотное уравнение

$$a_3 \omega^4 - (1 + a_2 \lambda_n^2) \omega^2 + a_1 \lambda_n^4 = 0 \quad (2.5)$$

определяет две серии действительных частот (две моды колебаний) [7]

$$(\omega_n^\mp)^2 = [1 + a_2 \lambda_n^2 \mp \sqrt{(1 + a_2 \lambda_n^2)^2 - 4a_1 a_3 \lambda_n^4}] / (2a_3), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Можно убедиться, что все частоты действительны. Реально из-за диссипативных процессов частотный спектр обрезается при больших n , но этот вопрос выходит за рамки данного рассмотрения.

Перейдем к обсуждению физического смысла полученного частотного спектра. Появление двух серий частот в теории Тимошенко обусловлено последним слагаемым в уравнении (1.1), содержащим четвертую производную по времени от искомой функции и учитывающим влияние деформации поперечного сдвига на колебания балки. При выводе уравнения Тимошенко это слагаемое вместе с релеевским членом $-a_2 y''''$, учитывающим инерцию вращения отдельного элемента балки в процессе колебаний, рассматривается как малая поправка к классической теории Бернулли — Эйлера, базирующейся на уравнении

$$y'' + a_1 y'''' = 0 \quad (2.7)$$

Следовательно, в теории Тимошенко естественно считать физическими только те частоты, которые при обращении коэффициентов a_2 и a_3 в нуль переходят в частоты уравнения Бернулли – Эйлера (2.7). Этому естественному условию удовлетворяет только серия ω_n^- . Сдвиговые частоты ω_n^+ при $a_3 \rightarrow 0$ уходят на бесконечность.

Коэффициент a_3 в уравнении Тимошенко (1.1) определяется феноменологическим параметром k . Поэтому численное значение a_3 известно заведомо с определенной погрешностью. В физически приемлемой феноменологической теории требуется, чтобы ее предсказания (в данном случае частоты) плавно зависели от феноменологических параметров. Этому условию удовлетворяет серия ω_n^- :

$$(\omega_{*n}^-)^2 = 1 + \alpha_{3n} + O(\alpha_{3n}^2), \quad a_2 = 0 \quad (2.8)$$

$$\omega_{*n}^\pm = \omega_n^\pm / \Omega_n, \quad \Omega_n^2 = a_1 \lambda_n^4$$

$$\alpha_{3n} = a_3 \Omega_n^2 = a_1 a_3 \lambda_n^2 = \frac{E_*}{kG} \left(\frac{I}{F} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \quad (2.9)$$

где Ω_n – частоты колебаний балки в приближении Бернулли – Эйлера.

В асимптотическом разложении (2.8) положено $a_2 = 0$, что вполне допустимо в данном случае [8]. Очевидно, что безразмерный параметр разложения α_{3n} в (2.8) будет мал лишь для низших токов, где, как уже отмечалось выше, только и применима рассматриваемая теория.

Частоты второй серии ω_n^+ сингулярны при $a_3 \rightarrow 0$

$$(\omega_{*n}^+)^2 \sim \alpha_{3n}^{-1}, \quad a_3 \rightarrow 0, \quad a_2 = 0 \quad (2.10)$$

Поэтому небольшие изменения в численных значениях a_3 будут приводить к большим погрешностям в предсказании частот ω_n^+ при $a_3 \rightarrow 0$. Надо иметь в виду также, что частоты ω_m^+ лежат в той же области, что и высшие тона основной серии ω_n^- , $n > m$.

3. Энергия балки Тимошенко по Остроградскому. Решения уравнения (1.1), соответствующие первой (y^-) и второй (y^+) модам, имеют одну и ту же пространственную форму

$$y^\mp = C_n^\mp \sin(\omega_n^\mp t) \sin(n\pi x/l) \quad (3.1)$$

Подстановка (3.1) в уравнение (1.11), использование частотного уравнения (2.5) и последующее интегрирование по dx дают

$$E_n^\mp = \frac{1}{2} M^2 (C_n^\mp)^2 [\Omega_n^2 - a_3 (\omega_n^\mp)^4], \quad n = 1, 2, \dots; \quad M = \rho Fl \quad (3.2)$$

где Ω_n – частоты в теории Бернулли – Эйлера (2.9), M – полная масса балки, C_n^\mp – амплитуды колебаний. Для правильной размерности в формулу (3.2) введен множитель ρF , оговоренный в разд. 1. В безразмерных переменных (2.9), используя асимптотические разложения (2.8) и (2.10), получаем

$$E_n^- = \frac{1}{2} M^2 (C_n^-)^2 \Omega_n^2 (1 - \alpha_{3n} - 2\alpha_{3n}^2 - \dots) \quad (3.3)$$

$$E_n^+ = \frac{1}{2} M^2 (C_n^+)^2 \Omega_n^2 (1 - \alpha_{3n}^{-2} - \dots), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \alpha_{3n} \rightarrow 0$$

Таким образом, при достаточно малых значениях параметра α_{3n} колебания с частотами ω_n^+ приводят к отрицательным значениям энергии E_n^+ . Отсчет энергии при этом выбран так, что покоящаяся балка имеет нулевую энергию.

Оценим численно параметр α_{3n} в (2.9): Для балки прямоугольного-поперечного сечения высотой h и длиной l имеем $I/F = h^2/12$, поэтому

$$\alpha_{3n} = \frac{E_*}{kG} \left(\frac{h}{l} \right)^4 \left(\frac{n\pi}{\sqrt{12}} \right)^4 \quad (3.4)$$

Полагая $E_*/(kG) \sim 3$, $n = 1, 2, 3$ и рассматривая достаточно длинные балки $h/l \sim 10^{-1}$, получаем $\alpha_{3n} \sim 10^{-4}$. Для таких балок энергия E_n^{++} заведомо отрицательна, а $E_n^- > 0$.

Для коротких балок $h/l \sim 1$ и больших n коэффициент α_{3n} может оказаться и не малым. Но здесь нельзя пользоваться асимптотическими разложениями (2.8), (2.10) и (3.3).

Трудности с отрицательными значениями энергии в теориях с высшими производными хорошо известны в физике элементарных частиц [9, 10]. Но до сих пор нет универсального метода трактовки этой проблемы в релятивистски инвариантных полевых моделях [11, 12].

4. Механическая энергия балки Тимошенко. В отличие от полевых теорий с высшими производными, которые рассматриваются в физике элементарных частиц, для балки Тимошенко существует хорошо определенное понятие механической энергии W , которая является суммой кинетической T и потенциальной V энергии ее отдельных элементов [2]

$$W = T + V \quad (4.1)$$

$$T = \frac{\mu}{2} \int_0^l [(\dot{y})^2 + r^2(\dot{\psi})^2] dx, \quad V = \frac{\mu c_0^2}{2} \int_0^l \left[r^2 \psi'^2 + \frac{kG}{E_*} (y' - \psi)^2 \right] dx$$

$$r^2 = I/F, \quad c_0 = \sqrt{E_*/\rho}$$

Здесь по-прежнему $y(t, x)$ — полное поперечное смещение балки, а $\psi(t, x)$ — угол наклона касательной к кривой изгиба, порождаемого только изгибной деформацией балки, r — радиус инерции поперечного сечения, $\mu = \rho F$ — линейная плотность балки. Никаких проблем с отрицательностью этой энергии нет, так как функционал W положительно определен. Варьирование функционала $T - V$ приводит к системе двух сцепляющихся уравнений для $y(t, x)$ и $\psi(t, x)$

$$\psi'' - \frac{1}{c_0^2} \psi'' + \frac{kG}{E_* r^2} (y' - \psi) = 0, \quad y'' - c_0^2 \frac{kG}{E_*} (y'' - \psi') = 0 \quad (4.2)$$

В случае шарнирно закрепленного конца балки условия (1.6) дополняются граничным условием для функции $\psi(t, x)$:

$$\psi' = 0 \quad (4.3)$$

Исключая $\psi(t, x)$ из (4.2), получаем уравнение Тимошенко (1.1). Аналогично можно исключить из (4.2) $y(t, x)$ и прийти к уравнению (1.1), теперь уже для $\psi(t, x)$ ¹.

Решениям (3.1) для $y(t, x)$ соответствует, согласно (4.2), следующее решение для $\psi(t, x)$:

$$\psi^\mp(t, x) = B_n^\mp \sin(\omega_n^\mp t) \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \quad (4.4)$$

¹ На этот момент обратил внимание автора Швец Н.Р.

Подставляя решение (4.4) в уравнения (4.2), получаем то же самое частотное уравнение (2.5) и соотношение между амплитудами C_n^+ и B_n^+

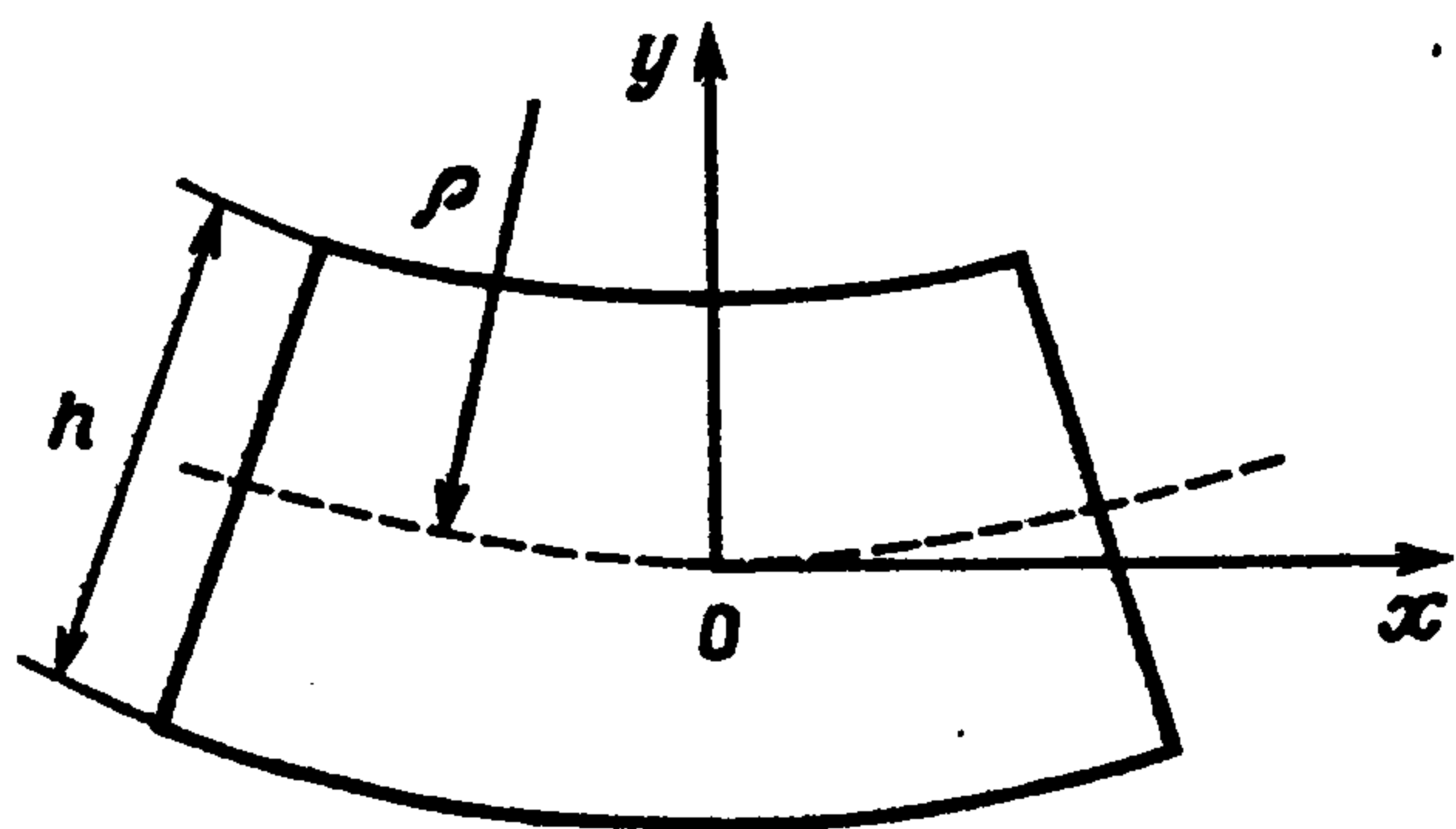
$$\frac{B_n^+}{C_n^+} = \frac{k_n^+}{l}, \quad k_n^+ = n\pi \left[1 - \frac{E_*}{kG} \left(\frac{r}{l} n\pi \right)^2 (\omega_{*n}^+)^2 \right] \quad (4.5)$$

Теперь можно найти отношение энергий для колебаний второй и первой моды, имеющих один и тот же номер n . Для определенности предположим, что амплитуды этих колебаний равны: $C_n^- = C_n^+$. Подставляя (3.1) и (4.4) в (4.1), получаем при учете соотношений (4.5)

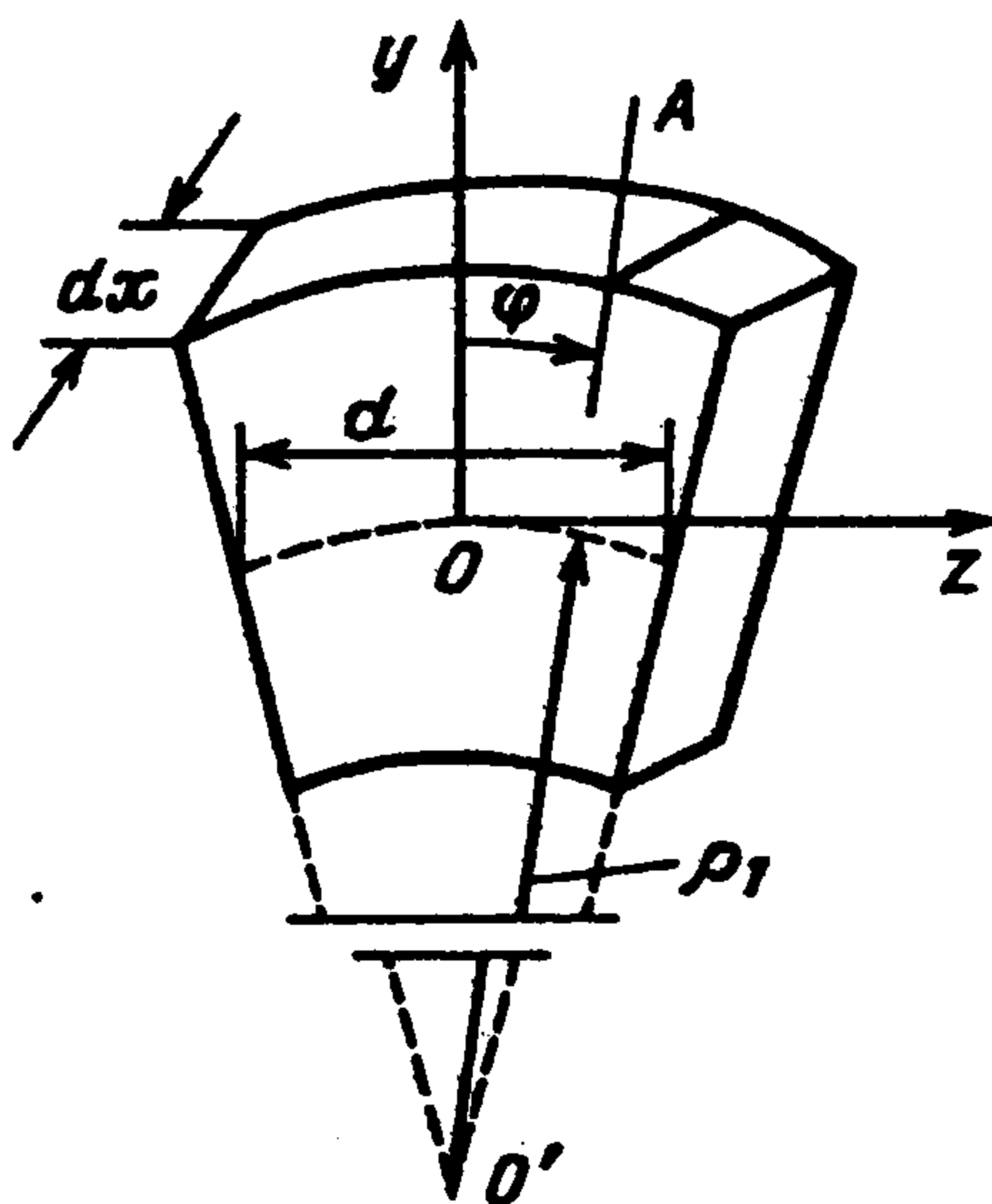
$$\frac{W_n^+}{W_n^-} = \frac{1 + (k_n^+)^2 (r/l)^2 \left(\frac{\omega_n^+}{\omega_n^-} \right)^2}{1 + (k_n^-)^2 (r/l)^2} \quad (4.6)$$

Во всей области практической применимости теории Тимошенко, например, когда $h/l \leq 0,35$, отношение (4.6) заведомо больше 10^3 . Таким образом, вторая высокочастотная мода колебаний в этом случае практически не возбуждается.

5. Влияние на собственные частоты балки изменения ее поперечного сечения в процессе колебаний. Как известно, теория Тимошенко основывается на явном учете макроскопической деформации сдвига, которую испытывает каждое поперечное сечение балки. На этом пути можно продвинуться дальше, и попытаться учесть другие виды деформаций. Известно, что при поперечных колебаниях балки происходит изменение формы ее поперечного сечения [13]. Для простоты рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, совершающую изгибные колебания. Волокна балки, лежащие ниже нейтральной плоскости XZ (фиг. 1), подвергаются растяжению вдоль оси X , которое сопровождается сжатием в поперечном направлении. Волокна, лежащие выше нейтральной плоскости, испытывают сжатие в продольном направлении, поэтому



Фиг. 1



Фиг. 2

здесь происходит расширение элементов балки в поперечном направлении. В результате поперечное сечение балки принимает форму, показанную на фиг. 2. Вертикальные стороны прямоугольника перестают быть параллельными и переходят в отрезки лучей, исходящих из одного центра.

Это рассмотрение основывается на точном решении трехмерных уравнений теории упругости, описывающем чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения [14]. Можно считать, что поперечные волокна того участка бал-

ки, который показан на фиг. 2, принимают форму отрезков окружности радиуса ρ_1 . Этот радиус связан с радиусом прогиба балки ρ известным соотношением [13]

$$\rho_1 = \rho/\nu \quad (5.1)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Как обычно, предполагаем, что прогиб балки задается плавной кривой, поэтому можно положить

$$1/\rho = \partial^2 y / \partial x^2 \quad (5.2)$$

где $y(t, x)$ — поперечное смещение балки в плоскости XU .

Потенциальная энергия для точного решения в теории упругости, описывающего чистый изгиб балки, задается той же формулой, что и в теории Бернулли — Эйлера [15]. Поэтому необходимо учесть вклад рассматриваемой деформации только в кинетическую энергию колеблющейся балки.

Рассмотрим элемент балки, заключенный между поперечными сечениями в точках x и $x + dx$ (фиг. 2). Кинетическая энергия этого элемента определяется формулой

$$dT = \frac{1}{2} \rho dI \int_{-d/2}^{d/2} \varphi'^2 dz \quad (5.3)$$

где ρ — объемная плотность материала, φ — угол, образованный радиальным сечением (линия $O'A$ на фиг. 2) с осью Y , dI — момент инерции сечения выделенного элемента балки плоскостью XU

$$dI = h^3 dx / 12 \quad (5.4)$$

Из фиг. 2 имеем

$$\varphi = z/\rho_1 = \nu z/\rho = \nu z y'' \quad (5.5)$$

С помощью (5.4) и (5.5) формула (5.3) преобразуется к следующему виду:

$$dT = \frac{1}{2} \nu^2 \rho I_z r_y^2 (y''')^2 dx, \quad I_z = h^3 d / 12, \quad r_y = I_y / F = d^2 / 12 \quad (5.6)$$

где I_z — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Z , d — ширина балки, r_y — радиус инерции поперечного сечения балки относительно оси Y .

Найдем поправку к частотам, которая вызывается рассматриваемой деформацией. Вначале для простоты возьмем в качестве исходной теорию Бернулли — Эйлера — Релея. Функцию Лагранжа L при учете поправки (5.6) запишем в виде

$$L = T - V = \frac{1}{2} \rho F \int_0^l (y')^2 dx + \frac{1}{2} \rho I_z \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{\nu^2}{2} \rho I_z r_y^2 \int_0^l (y''')^2 dx - \frac{1}{2} E_* I_z \int_0^l (y'')^2 dx \quad (5.7)$$

Здесь l — по-прежнему длина балки. Из (5.7) следует уравнение колебаний балки

$$y'' + c_0^2 r_z^2 y'''' - r_z^2 y'' + \nu^2 r_z^2 r_y^2 y'''' = 0, \quad r_z = I_z / F \quad (5.8)$$

Для простоты ограничимся случаем шарнирно опертой балки, для которой имеют место граничные условия (1.6). Разделение переменных в (5.8)

$$y(t, x) = A \sin(\omega_n t + \epsilon) \sin(n\pi x/l) \quad (5.9)$$

приводит к следующему частотному уравнению:

$$\omega_{*n}^2 = \delta_{zn}^2 [1 - \omega_{*n}^2 (1 + \nu^2 \delta_{yn}^2)], \quad \omega_{*n} = \omega_n \frac{l}{c_0 n \pi}, \quad (5.10)$$

$$\delta_{yn} = n\pi \frac{r_y}{l} = \frac{n\pi}{\sqrt{12}} \frac{d}{l}, \quad \delta_{zn} = n\pi \frac{r_z}{l} = \frac{n\pi}{\sqrt{12}} \frac{h}{l} \quad (5.11)$$

где ω_{*n} — безразмерные частоты, δ_{yn} и δ_{zn} — безразмерные характеристики поперечного сечения балки.

По сравнению с теорией Бернулли — Эйлера — Релея в формуле (5.10) появился множитель в круглых скобках, который может лишь усилить частотную поправку Релея. Как и следовало ожидать, это будет заметно только для высоких тонов (большие n) и широких балок. Примечательно, что формула (5.10) уже в рамках элементарной теории дает зависимость собственных частот балки от коэффициента Пуассона ν .

Аналогичное рассмотрение легко провести и в рамках теории Тимошенко. Учет поправки (5.6) при расчете кинетической энергии (формула (4.1)) модифицирует лишь первое уравнение в (4.2). Оно принимает вид

$$\psi'' - \frac{1}{c_0^2} \psi'' + \frac{\xi}{r_z^2} (y' - \psi) + \frac{\nu^2}{c_0^2} \frac{d^2}{12} \psi'''' = 0, \quad \xi = kG/E_*$$

Опять рассмотрим шарнирно опертую балку. Для $y(t, x)$ имеем решение (5.9), $\psi(t, x)$ задается аналогичной формулой

$$\psi(t, x) = B \sin(\omega_n t + \epsilon) \cos(n\pi x/l)$$

Частотное уравнение имеет вид

$$\omega_{*n}^4 (1 + \nu^2 \delta_{yn}^2) - \omega_{*n}^2 [1 + \xi + \xi (\delta_{zn}^{-2} + \nu^2 \delta_{yn}^2)] + \xi = 0$$

Здесь ω_{*n} — по-прежнему безразмерные частоты. Новыми по сравнению с (2.5) являются слагаемые, пропорциональные ν^2 . Как и в предыдущем случае, можно убедиться, что эти поправки существенны лишь для высоких частот и широких балок.

Замечания. 1°. При помощи частотного уравнения (2.5) можно показать, что отношение (4.5) никогда не обращается в бесконечность. Следовательно, решений, когда полный прогиб балки $y(t, x)$ равен нулю, а сдвиговое смещение $\psi(t, x)$ отлично от нуля, в рассматриваемом случае (вопреки существующему утверждению [8]) нет.

2°. В справочнике [16] формула (61.84) содержит ошибку: k_{ns} здесь следует заменить на k_{ns}^2 .

3°. Говорить о возможности резонансного обнаружения частот второй серии в теории Тимошенко, как это иногда делается (см., например, [17]), не имеет смысла.

4°. Несомненный интерес представляет выяснение физического содержания в понятии энергии колеблющейся балки Тимошенко, рассчитанной по Остроградскому. Как всякий интеграл динамических уравнений, она должна играть важную роль в общем анализе получаемых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
3. Остроградский М.В. Дифференциальные уравнения проблемы изопериметров // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 315–387.
4. Nesterenko V.V. Singular Lagrangians with higher derivatives // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V. 22. No. 10. P. 1673–1687.

5. *Barbashov B.M., Neterenko V.V.* Continuous symmetries in field theory // Fortsch. Phys. 1983. V. 31. H. 10. S. 535–567.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
7. *Anderson R.A.* Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory // Trans. ASME Ser. E.J. Appl. Mech. 1953. V. 20. No. 4. P. 504–510.
8. *Traill-Nash R.W., Collar A.R.* The effect of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1953. V. 6. Pt. 2. P. 186–222.
9. *Pais A., Uhlenbeck G.E.* On field theories with non-localized action // Phys. Rev. 1950. V. 79. No. 1. P. 145–165.
10. *Podolsky B., Schwed P.* Review of generalized electrodynamics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. No. 1. P. 40–50.
11. *Eliezer D.A., Woodard R.P.* The problem of nonlocality in string theory // Nucl. Phys. B. 1989. V. 325. No. 2. P. 389–469.
12. *Simon J.Z.* Higher-derivative Lagrangians, nonlocality, problems, and solutions // Phys. Rev. D. 1990. V. 41. No. 12. P. 3720–3733.
13. *Тимошенко С.П., Гере Дж.* Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.
14. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
16. Handbook of engineering mechanics / Ed. W. Flügge. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1962. Var. pag.
17. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого тела. Т. 3. М.: Наука, 1981. 480 с.

Дубна

Поступила в редакцию
7. IX. 1992