

УДК 556.31

© 1993 г. Н.И. Гамаюнов

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ И ДЕСОРБЦИИ В БИПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Приводятся решения задач массопереноса в полубесконечной бипористой среде, в которой по макропорам происходит конвективный перенос жидкости или газа, а в поперечном направлении — молекулярная диффузия и сорбция (десорбция) в микропорах зерен сорбента (ионита). Получены также решения аналогичных осесимметричных задач при импульсной и постоянной подаче сорбируемого вещества в цилиндрическую полость.

1. Постановка задач. При постановке задач динамики сорбции приняты следующие допущения. Макропоры слоя сорбента (ионита) составляют систему каналов, по которым движется жидкость или газ. Стенки (зерна), образующие макропоры, имеют внутреннюю пористость δ , состоящую из мезо- и микропор, доступных для проникновения молекул (ионов) поглощаемого вещества. Если известна кинетическая (внешняя) удельная поверхность частиц S , образующих макропоры, и кинетическая пористость m , т.е. отношение объема макропор к общему объему сорбента, то структурную модель можно представить как совокупность параллельных пластин с характерными размерами: полутолщины стенки $a = (1 - m)/S$ и полутолщины канала (щели) $-b_0 = m/S$.

Для полубесконечной среды предполагается, что ось координат u перпендикулярна ее поверхности. По макропорам со скоростью u в направлении u происходит конвективный перенос сорбируемого вещества (или носителя), а в поперечном направлении x — молекулярный (ионный) перенос вещества в поры слоя a при сорбции или в обратном направлении при десорбции. В реальной бипористой среде поток разделяется на множество отдельных струй, которые обтекают зерна сорбента по криволинейным взаимопересекающимся траекториям. Вследствие этого происходит перемешивание раствора (газа), и его концентрацию в макропорах (в щели b_0) на любом расстоянии u можно принять постоянной. Рассматривается также случай, когда имеет место накопление сорбируемого вещества у поверхности.

Для осесимметричной задачи также предполагается, что происходит конвективный радиальный массоперенос жидкости или газа по макропорам, а в поперечном направлении, по дугам окружности радиуса r — молекулярный (ионный) — перенос вещества в зерна сорбента. При малых размерах стенок (зерен) дуги можно заменить хордами $0 \leq x \leq (a + b_0)$. Это позволяет свести задачу к одномерному случаю: переносу вещества из пластины (щели) b_0 в слой a . Радиальная диффузия в зернах не учитывается. Вследствие конвекции концентрация вещества в слое b_0 для любого значения r также принимается постоянной. По верхней и нижней границам бесконечного слоя (пласта) сорбента толщиной R осевые потоки жидкости или газа равны нулю. Из цилиндрической полости (совершенной скважины) радиуса R и высотой h в слой сорбента поступает носитель или сорбируемое вещество с постоянным расходом Q . Координата r отсчитывается от оси цилиндрической полости.

Рассматриваются четыре задачи. В задаче 1 предполагается, что при $y = 0$ подается поток вещества с постоянной скоростью и концентрацией c_{02} , который поступает в полубесконечную среду с начальной концентрацией c_{01} . В задаче 2 носитель переносит сорбируемое вещество с начальной концентрацией c_0 из более глубоких слоев к поверхности, где он удаляется (испаряется), а нелетучее сорбируемое вещество концентрируется у поверхности.

В задаче 3 предполагается, что в цилиндрическую полость при $t = 0$ вносится сорбируемое вещество, которое мгновенно перемешивается, что позволяет получить равномерную начальную его концентрацию c_0 во всем объеме полости $V = \pi R^2 h$. В задаче 4 в полость поступает с расходом Q сорбируемое вещество с постоянной концентрацией c_{02} . Начальная концентрация вещества в сорбенте c_{01} .

Уравнение массопереноса и поглощения веществ для полубесконечной среды запишется так:

для слоя b_0

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \mp v \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c^*}{\partial t} \quad (1.1)$$

(знак минус соответствует задаче 1, плюс — задаче 2),

для слоя a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u^*}{\partial t}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial t} = k_1 u - k_2 u^* \quad (1.2)$$

Здесь c , c^* , u , u^* — соответственно концентрации сорбируемого вещества в макропорах (слое b_0), поступающего в зерна сорбента, внутри микропор зерен сорбента (слое a) и поглощенного сорбентом (ионитом); D_y , D_x — коэффициенты продольной конвективной и поперечной молекулярной (ионной) диффузии; k_1 , k_2 — константы уравнения кинетики сорбции.

Система (1.1), (1.2) решается при следующих начальных и граничных условиях:

Для задачи 1:

$$t = 0, \quad c = u = c_{01} \quad (1.3)$$

$$x = a, \quad c = u, \quad b_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} = \delta D_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$t = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

$$y = 0, \quad -D_y \frac{\partial c}{\partial y} + vc = vc_{02} \quad (1.7)$$

Для задачи 2 принимаются те же условия, но в равенствах (1.3) и (1.7) необходимо положить $c_{01} = c_0$, $c_{02} \equiv 0$ и заменить v на $-v$.

Для задач 3 и 4 уравнение (1.1) заменяется на

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_r \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{v_0 R}{r} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial c^*}{\partial t} \quad (1.8)$$

где D_r — коэффициент радиальной конвективной диффузии; $v = v_0 R/r$, $v_0 = Q/(2\pi R h m)$.

Система (1.2) и (1.8) решается: для зерна сорбента (слоя a) при условиях (1.3)–(1.5), а для слоя b_0 при условиях

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \quad (1.9)$$

и для задачи 3 (балансовое уравнение)

$$r = R, \quad -\pi R^2 h \frac{\partial c}{\partial t} = -2\pi R h m (D_r \frac{\partial c}{\partial r} - vc) \quad (1.10)$$

а для задачи 4

$$r = R, \quad -D_r \partial c / \partial r + vc = vc_{02} \quad (1.11)$$

2. **Задача 1.** Исключив по известному методу [1] из уравнений (1.2) переменную u^* , уравнение динамики сорбции запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (k_1 + k_2) \frac{\partial u}{\partial t} = D_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + k_2 D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

В области изображений по Лапласу (ОИЛ) получим уравнение

$$U_1'' - \alpha^2 U_1 = 0 \quad (2.2)$$

имеющее при учете условий (1.3)–(1.5) решение

$$U_1 = C_1 \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha a}, \quad \alpha = \left[\frac{p}{D_x} \left(1 + \frac{k_1}{p + k_2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

где U_1, C_1 – изображения переменных $u_1 = u - c_{01}$, $c_1 = c - c_{01}$.

Уравнение (1.1) в ОИЛ запишется в виде

$$C_1'' - \frac{v}{D_y} C_1' - \frac{p + \gamma}{D_y} C_1 = 0, \quad \gamma = \frac{D_x}{ab} \alpha a \operatorname{th} \alpha a \quad (2.4)$$

где значение γ получено путем дифференцирования выражения (2.3) по x согласно второму условию (1.4); $b = b_0/\delta$.

Уравнение (2.4) при учете условий (1.6), (1.7) и соотношения (2.3) имеет решение

$$U_1 = \frac{(c_{02} - c_{01}) v \operatorname{ch} \alpha x e^{-\beta_- y}}{D_y \rho \beta_+ \operatorname{ch} \alpha a}, \quad \beta_{\pm} = \left(-\frac{v^2}{4D_y^2} + \frac{p + \gamma}{D_y} \right)^{1/2} \pm \frac{v}{2D_y} \quad (2.5)$$

Значения $\operatorname{ch} \alpha a \neq 0$, так как при $\operatorname{ch} \alpha = 0$ имеем $\gamma \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \infty$).

Оригинал изображения (2.5) находится по формуле обращения Римана–Меллина и интегрирования по контуру типа Ганкеля [2]. Так как одному значению $\alpha^2 = p D_x^{-1} [1 + k_1(p + k_2)^{-1}]$ соответствуют два корня p_j , полученные из уравнения

$$p^2 + (k_1 + k_2 - D_x \alpha^2) p - k_2 D_x \alpha^2 = 0 \quad (2.6)$$

то интегрирование по берегам разреза следует проводить, как и $|p|$, в пределах от 0 до ∞ по переменным $\nu = \alpha a$ и $\eta = \alpha a/i$.

Положим

$$\mu_0 = -p \frac{D_x}{a^2}, \quad \mu_j = -p_j \frac{D_x}{a^2}, \quad K = \frac{k_1}{k_2}, \quad H = \frac{D_x}{k_2 a^2}, \quad A = \frac{a}{b} = \frac{a\delta}{b_0}$$

и получим, согласно (2.6),

$$\mu_0 = [1 + K - \nu^2 H - \xi(\nu^2)] / (2H) > 0 \quad (2.7)$$

$$\mu_j = [1 + K + \eta^2 H - (-1)^j \xi(-\eta^2)] / (2H) > 0 \quad (2.8)$$

$$\xi(w) = [(1 + K^2)^2 - 2(K - 1)Hw + H^2 w^2]^{1/2}, \quad w = (\nu^2, -\eta^2)$$

Введем новые переменные, полагая:

$$2\nu d\nu = -\kappa_0 d\mu_0, \quad \kappa_0 = 1 + K / (H\mu_0 - 1)^2$$

$$2\eta d\eta = \kappa_j d\mu_j, \quad \kappa_j = 1 + K / (1 - H\mu_j)^2$$

$$[1 + 4D_y \nu^{-2} (p + \gamma)]^{1/2} = \pm i \Delta_m \quad (m = 0, 1, 2)$$

$$\Delta_0 = (\xi_0 - 1)^{1/2}, \quad \xi_0 = (\mu_0 - A \nu \operatorname{th} \nu) / N$$

$$\Delta_j = (\xi_j - 1)^{1/2}, \quad \xi_j = (\mu_j + A\eta \operatorname{tg} \eta) / N$$

$$N = \frac{(av)^2}{4D_x D_y} = \frac{z^2}{\epsilon}, \quad z = \frac{\operatorname{Pe}}{2}, \quad \operatorname{Pe} = \frac{vy}{D_y}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad \epsilon = Y^2 \frac{D_x}{D_y}$$

Если $\xi_0 < 1$ и $\xi_j < 1$, то значения подынтегральной функции мнимые, поэтому они исключаются при интегрировании.

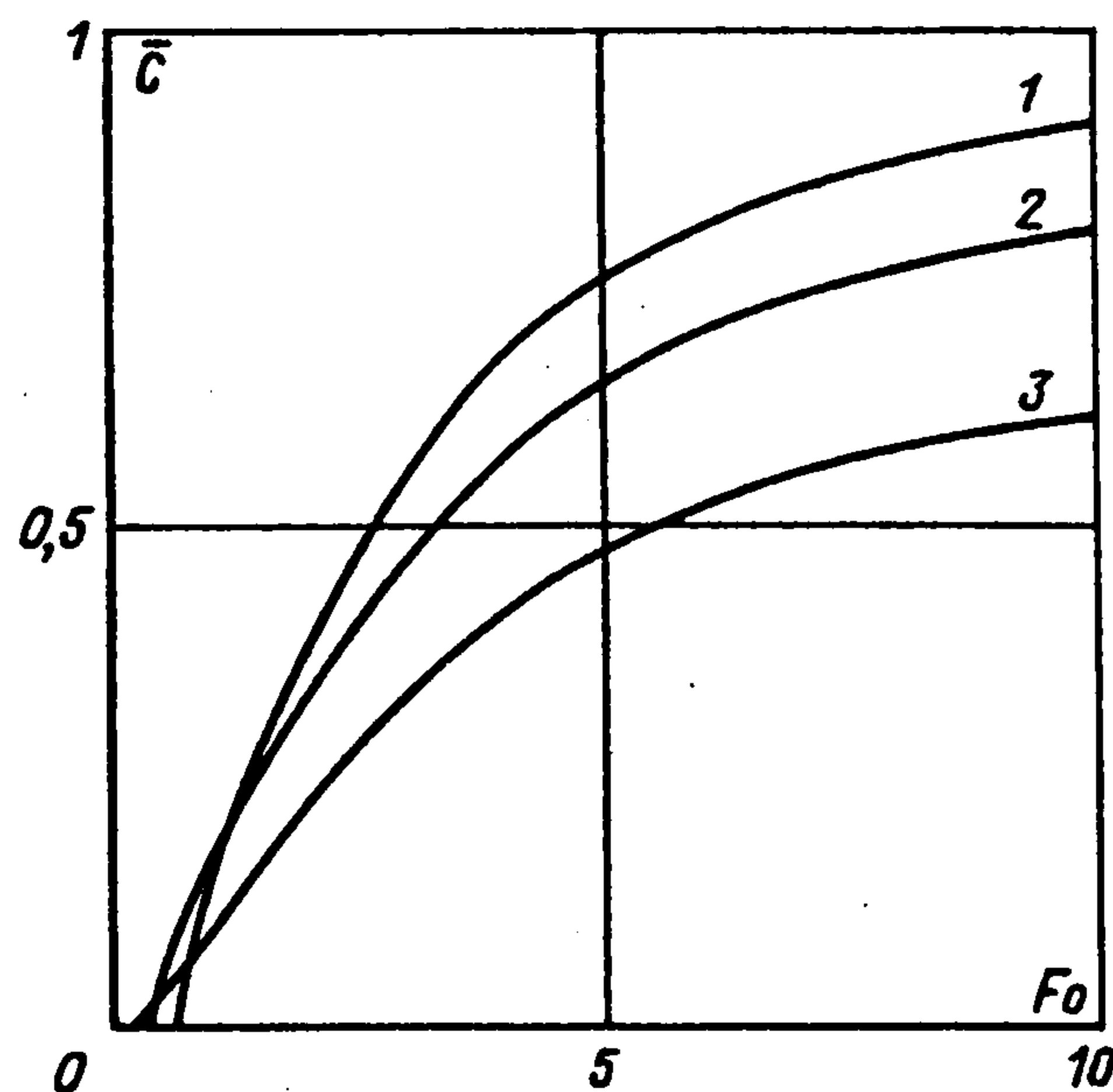
При учете новых переменных решение запишем в виде

$$\frac{u(X, Y, Fo) - c_{01}}{c_{02} - c_{01}} = 1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(\eta X) \Phi_j \eta d\eta}{\cos \eta} - \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\nu X) \Phi_0 \nu d\nu}{\operatorname{ch} \nu} \right\} \quad (2.9)$$

$$\Phi_m = [\sin(z\Delta_m) + \Delta_m \cos(z\Delta_m)] \exp(-\mu_m Fo + z) / (\mu_m \xi_m \kappa_m)$$

$$X = \frac{x}{a}, \quad Fo = \frac{D_x t}{a^2}$$

Составлена программа вычисления на ЭВМ интеграла (2.9). В качестве примера на фиг. 1 приведены начальные участки графиков при $K = 200$, $H = 1000$, $\operatorname{Pe} = 2$, $N = 0,25$ и $A = 0,1$; $0,5$; $0,9$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Значения $\bar{c} = [c(y, t) - c_{01}] / (c_{02} - c_{01})$ достигают единицы соответственно для кривых 1-3 при $Fo \approx 650, 3130, 5620$.



Фиг. 1

Из характеристических уравнений $\Delta_0^2 = 0$ и $\Delta_j^2 = 0$ можно найти корни ν_0 и η_{jn} . Если $(K + 1)/(NH) < 1$, то второй интеграл равен нулю, так как $\xi_0 < 1$ для всех значений $\nu \geq 0$. Если корни определены, то решение (2.9) переписется таким образом:

$$\frac{u(X, Y, Fo) - c_{01}}{c_{02} - c_{01}} = 1 - \frac{4}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\eta_{jn}}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\cos(\eta X) \Phi_j \eta d\eta}{\cos \eta} - \int_0^{\nu_0} \frac{\operatorname{ch}(\nu X) \Phi_0 \nu d\nu}{\operatorname{ch} \nu} \right\} \quad (2.10)$$

При $j = 1$ и $(K + 1)/(NH) < 1$ суммирование начинается с $n = 0$, если $(K + 1)/(NH) > 1$, то с $n = 1$. Если $c_{02} > c_{01}$, то имеет место процесс сорбции, при $c_{02} < c_{01}$ — десорбции.

При $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$) имеем $\text{th} \alpha \approx \alpha$, $X = 1$, и выражение (2.5) упрощается. Воспользовавшись таблицами изображений [3], приближенное решение запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{c(Y, Fo) - c_{01}}{c_{02} - c_{01}} &\approx \frac{1}{2} \{ \text{erfc} S^- + \\ &+ \exp \text{Pe} [2\sqrt{M Fo^*} i \text{erfc} S^+ - \text{erfc} S^+] \} \\ S^\pm &= \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Pe}}{\sqrt{M Fo^*}} \pm \sqrt{M Fo^*} \right) \\ Fo^* &= \frac{Fo}{1 + A(1 + K)}, \quad M = 4N = \frac{(av)^2}{D_x D_y} \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. **Задача 2.** Решение в ОИЛ аналогично (2.5), если положить в нем $c_{01} = c_0$, $c_{02} = 0$ и заменить v на $-v$. Оно, в отличие от (2.5), имеет двойной полюс при $p = 0$ и бесчисленное множество корней, которые находятся из уравнения $p + \gamma = 0$. После применения теоремы о вычетах и интегрирования по контуру типа Ганкеля запишем решение

$$\begin{aligned} \frac{u(X, Y, Fo) - c_0}{c_0} &= \exp(-\text{Pe}) \left\{ 1 - \text{Pe} + \frac{M[Fo - (1 + K)(1 - X^2)/2]}{1 + A(1 + K)} + \right. \\ &+ \frac{MA[HK + (1 + K)^2/3]}{[1 + A(1 + K)]^2} - M \frac{\text{ch}(\theta_0 X) \exp(-\mu_0^* Fo)}{\text{ch} \theta_0 \mu_0^* \Psi_0} - \\ &\left. - M \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\theta_{jn} X) \exp(-\mu_{jn}^* Fo)}{\cos \theta_{jn} \mu_{jn}^* \Psi_{jn}} \right\} + \\ &+ \frac{4}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\eta_{jn}}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\cos(\eta X) \Phi_j^* \eta d\eta}{\cos \eta} - \int_0^{\nu_0} \frac{\text{ch}(\eta X) \Phi_0^* \nu d\nu}{\text{ch} \nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Psi_0 = 1 + \kappa_0^* [A + \mu_0^*/\theta_0^2 - \mu_0^{*2}/(A\theta_0^2)]/2$$

$$\Psi_{jn} = 1 + \kappa_{jn}^* [A - \mu_{jn}^*/\theta_{jn}^2 + \mu_{jn}^{*2}/(A\theta_{jn}^2)]/2$$

Функции Φ_m^* представляет собой выражения Φ_m (2.9), в которых значения z следует заменить на $-z$.

Корни θ_0 и θ_{jn} находятся, соответственно, из характеристических уравнений $A\theta \text{th} \theta - \mu_0^* = 0$ и $A\theta_j \text{tg} \theta_j + \mu_j^* = 0$. Значения μ_0^* , μ_{jn}^* соответствуют выражениям (2.7), (2.8), в которых переменные ν и η следует заменить на θ_0 и θ_j ; $\kappa_0^* = 1 + K/(H\mu_0^* - 1)^2$, $\kappa_{jn}^* = 1 + K/(1 - H\mu_{jn}^*)^2$; остальные обозначения и замечания, связанные с вычислением интегралов, приведены в разд. 2.

При большом времени ($t \rightarrow \infty$) в решении (3.1) можно ограничиться его первыми членами. Приведем также и другое приближенное решение. По аналогии с (2.11) имеем

$$\frac{c(Y, Fo) - c_0}{c_0} \approx \frac{1}{2} \{ \exp(-\text{Pe}) [2\sqrt{M Fo^*} i \text{erfc} S^- + \text{erfc} S^-] - \text{erfc} S^+ \} \quad (3.2)$$

При $y \rightarrow 0$ уравнение (3.2) упрощается [4]:

$$\frac{c(0, Fo) - c_0}{c_0} \approx 1 + M Fo^* - 4i^2 \text{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{M Fo^*} \right) \quad (3.3)$$

4. Задача 3. Уравнение (1.8) в ОИЛ имеет вид [2]

$$\frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{1-2\nu}{r} \frac{dC}{dr} - \kappa^2 C = 0 \quad (4.1)$$

Его общим решением при учете условия (1.10) является выражение

$$C = Ar^\nu K_\nu(\kappa r) \quad (4.2)$$

$$\kappa^2 = (p + \gamma)/D_r, \quad \nu = v_0 R / (2D_r) = Q / (4\pi h m D_r)$$

($K_\nu(\kappa r)$ — функция Макдональда). Условие (1.10) в ОИЛ переписывается так:

$$r = R, \quad -pC + c_0 = -2mR^{-1}(D_r C' - \nu C) \quad (4.3)$$

Из последнего равенства после подстановки в него выражения (4.2) и преобразований находится постоянная A , и окончательное решение при учете (2.3) имеет вид

$$\frac{U(x, r, p)}{c_0} = \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \frac{\text{ch} \alpha x K_\nu(\kappa r)}{\text{ch} \alpha a [g \kappa R K_{\nu+1}(\kappa R) + p K_\nu(\kappa R)]} \quad (4.4)$$

$$g = \frac{2mD_r}{R^2}$$

Оригинал изображения (4.4) находится путем интегрирования по контуру типа Ганкеля [2] и имеет вид:

$$\frac{u(X, Y, Fo)}{c_0} = \frac{2}{\pi} \rho^\nu \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi/2}{\eta_{jn}} \frac{\cos(\eta X) \bar{\Phi}_j \eta d\eta}{\cos \eta} - \int_0^{\xi_0} \frac{\text{ch}(\xi X) \bar{\Phi}_0 \xi d\xi}{\text{ch} \xi} \right\} \quad (4.5)$$

$$\bar{\Phi}_s = [\alpha_s Y_\nu(\Delta_s \rho) - \beta_s J_\nu(\Delta_s \rho)] \exp(-\mu_s Fo) / [\kappa_s (\alpha_s^2 + \beta_s^2)]$$

$$\alpha_s = \epsilon \Delta_s J_{\nu+1}(\Delta_s) - \mu_s J_\nu(\Delta_s)$$

$$\beta_s = \epsilon \Delta_s Y_{\nu+1}(\Delta_s) - \mu_s Y_\nu(\Delta_s)$$

$$\kappa_s = 1 + K / (1 - H \mu_s)^2, \quad (s = 0, 1, 2)$$

$$\Delta_0 = (\mu_0 - A \xi \text{th} \xi)^{1/2}, \quad \Delta_j = (\mu_j + A \eta \text{tg} \eta)^{1/2}$$

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \epsilon = 2m \frac{D_r}{D_x} \left(\frac{a}{R}\right)^2$$

где μ_0 — выражение (2.7), в котором ν заменяется на ξ , а μ_j — выражение (2.8). Значения корней ξ_0, η_{jn} ($n = 1, 2, 3 \dots$) находятся из трансцендентных уравнений $\Delta_s^2 = 0$.

Получим приближенные решения. Учитывая, что при $p \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$) $X = 1$ имеем $\kappa R \approx \sqrt{p/D_r} R$, $K_{\nu+1}(\kappa R)/K_\nu(\kappa R) \approx 1$, уравнение (4.4) при $r = R$ запишем в виде

$$C(R, p)/c_0 \approx (p + g\sqrt{pR/D_r})^{-1} \quad (4.6)$$

Этому изображению соответствует функция

$$\frac{c(R, t)}{c_0} \approx e^{z^2} \text{erfc} z \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z, \quad z = \frac{2m\sqrt{D_r t}}{R} \quad (4.7)$$

Пренебрегая членами ряда по параметру $p \rightarrow 0$ выше первой степени, соотношение (4.4) запишем таким образом:

$$U(x, y, p)/c_0 \approx [2\nu g B(p + 1/B)]^{-1} \quad (4.8)$$

$$B = \frac{a^2}{D_x} T, \quad T = \frac{1}{G} + \frac{m[1 + A(1 + K)][\nu(\rho^2 - 1) + 1]}{2\epsilon\nu(\nu - 1)} + \frac{(1 + K)(1 - X^2)}{2}$$

$$2\nu g = Q/V, \quad G = Qa^2/(VD_x), \quad V = \pi R^2 h, \quad X = x/a$$

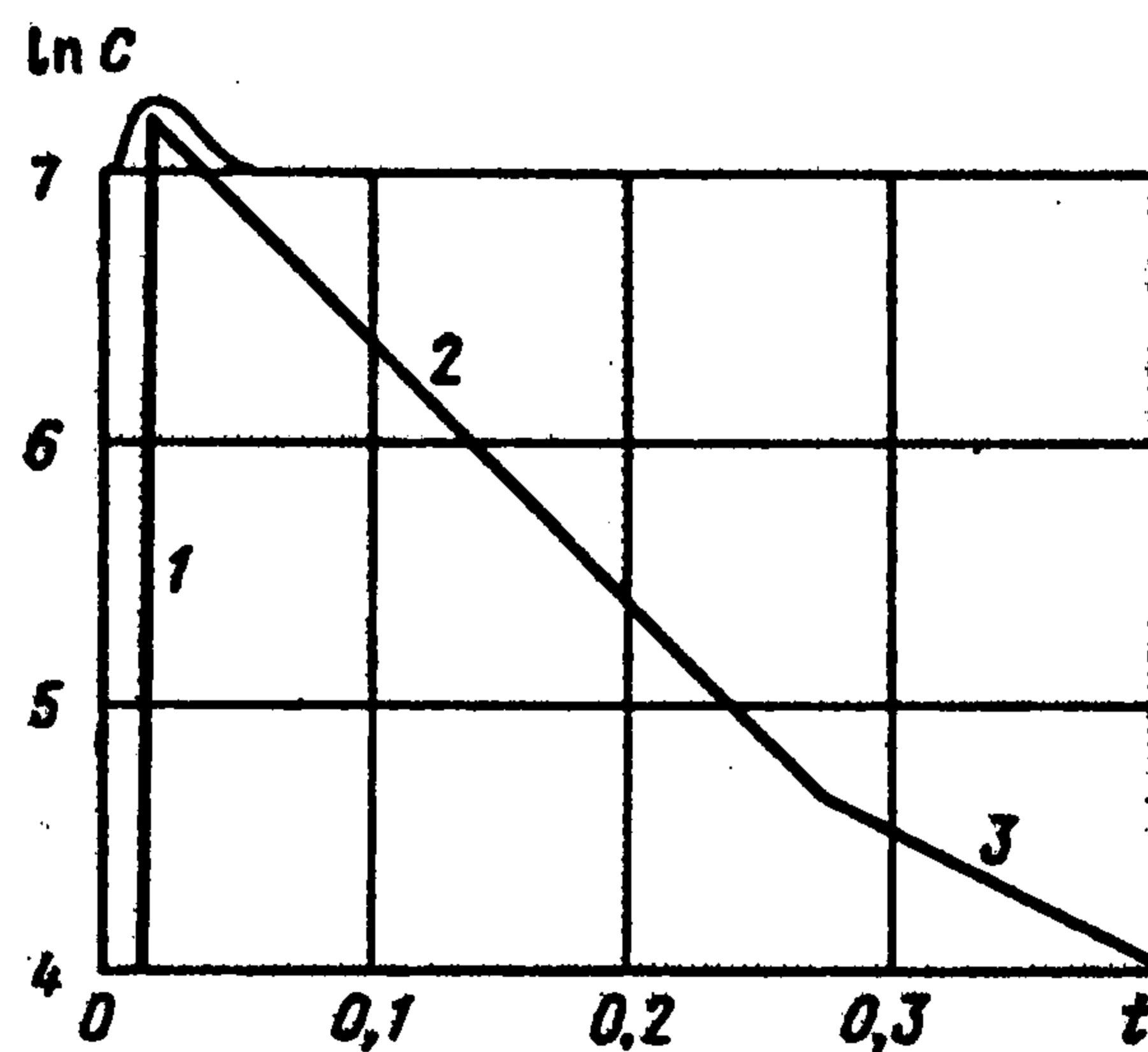
откуда

$$u(X, \rho, Fo)/c_0 \approx (GT)^{-1} \exp(-Fo/T) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.9)$$

При $\rho = 1$ второй и третий члены суммы T можно опустить, и тогда

$$c(R, t)/c_0 \approx \exp(-Qt/V) \quad (4.10)$$

На фиг. 2 приведены результаты опытов [5] по изменению концентрации индикатора в наблюдаемой скважине. График имеет три участка. Первый связан с начальным, а второй, согласно соотношению (4.9), с последующим поступлением



Фиг. 2

индикатора от центральной скважины, в которую он однократно был внесен при $t = 0$. Верхней точке графика соответствует максимальная концентрация индикатора в скважине. Третий участок на фиг. 2 свидетельствует о незначительном поступлении индикатора, вымываемого (десорбируемого) потоком растворителя на участке от центральной до наблюдаемой скважины.

В центральной скважине, в которую постоянно поступал поток растворителя (воды) Q , индикатор снижался по экспоненциальной зависимости, что согласуется с уравнением (4.10).

5. Задача 4. При учете условия (1.11) решение в ОИЛ имеет вид:

$$\frac{U_1(x, r, p)}{c_{02} - c_{01}} = 2\nu \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \frac{\text{ch} \alpha x K_\nu(\kappa r)}{r \kappa R \text{ch} \alpha a K_{\nu+1}(\kappa R)} \quad (5.1)$$

Оригинал находится путем интегрирования по контуру типа Ганкеля:

$$\frac{u(X, \rho, Fo) - c_{01}}{c_{02} - c_{01}} = 1 - \frac{4\nu}{\pi} \rho^\nu \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\eta_{jn}}^{(2n+1)\pi/2} \frac{\cos(\eta X) \Psi_j \eta d\eta}{\cos \eta} - \int_0^{\xi_0} \frac{\text{ch}(\xi X) \Psi_0 \xi d\xi}{\text{ch} \xi} \right\} \quad (5.2)$$

$$\Psi_s = [Y_\nu(\Delta_s \rho) J_{\nu+1}(\Delta_s) - J_\nu(\Delta_s \rho) Y_{\nu+1}(\Delta_s)] \times \\ \times \exp(-\mu_s Fo) / \{ \Delta_s \mu_s \kappa_s [J_{\nu+1}^2(\Delta_s) + Y_{\nu+1}^2(\Delta_s)] \}$$

Значения постоянных и переменных приведены в разд. 2 и 4. При $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$), $r \rightarrow R$ имеем $\kappa R \approx \sqrt{p D_r^{-1}} R$, и изображение (5.1) перепишем в виде [2]

$$C_1(\rho, p) / (c_{02} - c_{01}) \approx 2\nu \rho^{\nu-1/2} \exp[-\sqrt{p D_r^{-1}} R(\rho - 1) / (R \sqrt{p^3 D_r^{-1}})] \quad (5.3)$$

Этому изображению соответствует функция

$$[c(\rho, Fo) - c_{01}] / (c_{02} - c_{01}) \approx 4\nu \rho^{\nu-1/2} \sqrt{Fo_1} \operatorname{ierfc}[(\rho - 1) / (2\sqrt{Fo_1})] \quad (5.4)$$

$$Fo_1 = D_r t / R^2$$

При $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$) и допущениях, принятых при получении выражения (4.8), решение (5.1) перепишем так:

$$U_1(x, r, p) / (c_{02} - c_{01}) \approx [p(1 + B_1 p)]^{-1} \\ B_1 = a^2 D_x^{-1} T_1 \quad (5.5)$$

$$T_1 = m[1 + A(1 + K)] [\nu(\rho^2 - 1) + 1] / [2\epsilon\nu(\nu - 1)] + \\ + (1 + K)(1 - X^2) / 2$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$[u(X, \rho, Fo) - c_{01}] / (c_{02} - c_{01}) \approx 1 - \exp(-Fo / T_1) \quad (5.6)$$

Если $c_{02} > c_{01}$, то, как отмечалось, имеет место сорбция, при $c_{02} < c_{01}$ — десорбция.

Приведенные точные и приближенные решения могут найти применение при расчетах совместного конвективного и молекулярного массопереноса в бипористых средах, осложненного сорбцией (десорбцией) или ионным обменом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
3. Гамаюнов Н.И. Некоторые формулы операционного исчисления // Инж.-физ. ж. 1988. Т. 54. № 4. С. 675–676.
4. Гамаюнов Н.И. Определение коэффициентов диффузии веществ и скоростей переноса влаги в пористых средах с помощью радиоактивной метки // Физическое и математическое моделирование в мелиорации. М.: Колос, 1973. С. 227–236.
5. Орадовская А.Е., Ефремова А.В. Определение миграционных параметров водоносных горизонтов при нестабильном вводе индикатора // Методы расчета процессов массопереноса в гидрогеологических исследованиях. М.: Изд-е ВНИИ "Водгео", 1984. С. 7–10.
6. Моделирование процессов засоления и осолонцевания почв. М.: Наука, 1980. 262 с.

Тверь

Поступила в редакцию
1.VI.1992