

УДК 532.5

© 1993 г. Н.Н. Бобков, Ю.П. Гупало

ДИНАМИКА ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ МАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

Рассматриваются нестационарные задачи о движении и эволюции неоднородностей плотности развитого псевдоожигенного слоя твердых частиц, обладающих ферромагнитными свойствами. Слой подвергается воздействию заданного внешнего магнитного поля. Неоднородности локализованы в областях с концентрацией частиц, отличной от их средней концентрации в слое. Развивается предложенная ранее [1–3] модель неоднородности в виде сферического пакета частиц, граница которого представляет собой разрыв концентрации твердой фазы. Анализируется как случай разрыва переменной поверхностной плотности, непроницаемого для частиц твердой фазы (пакет постоянной массы), так и случай разрыва с притоком к нему (оттоком от него) дисперсных частиц. Оценено влияние внешнего магнитного поля и магнитных свойств частиц на скорость движения неоднородностей в слое, их стационарные размеры и время жизни.

Эффект повышения устойчивости псевдоожигенного слоя магнитных частиц к образованию пузырей под действием внешнего магнитного поля рассматривался ранее экспериментально [4–6] и теоретически [7]. Задачи динамики неоднородностей в слоях немагнитных частиц анализировались в [2, 3].

1. Постановка задачи. Модель твердой фазы. В рамках механики сплошной среды несжимаемый ожимающий агент и взвешенные в нем несжимаемые твердые частицы моделируются как взаимопроникающие взаимодействующие жидкости — фазы псевдоожигенного слоя. Как и ранее [2, 3], ограничимся предельным случаем идеальных континуумов, т.е. предположим, что вязкий механизм переноса импульса в фазах отсутствует. Вязкость ожимающего агента, существенная на масштабах отдельной твердой частицы, проявляется при этом лишь в члене, учитывающем силу межфазного трения. После выполнения операции локального осреднения уравнений движения [8] она приобретает вид внешней объемной силы, действующей на каждую из фаз со стороны другой фазы.

В случае псевдоожигения газами, когда отношение плотностей газа и частиц d_f/d_s мало, эта сила может приближенно считаться линейной по скорости межфазного скольжения [9] (всюду далее индексы f и s отмечают ожимающий агент и твердые частицы, а после осреднения — жидкую и твердую фазы слоя соответственно).

Предположим, что жидкая фаза не обладает магнитными свойствами и не испытывает воздействия со стороны налагаемого на систему внешнего магнитного поля. Пусть, далее, материал твердых частиц представляет собой ферромагнетик, намагничивание которого во внешнем поле происходит обратимо (явления гистерезиса и остаточного намагничивания в твердой фазе ни на микро- ни на макроуровне не рассматриваются). Это означает, что магнитная индукция в псевдоожигенной системе является однозначной функцией напряженности магнитного поля.

Ограничимся случаем, когда в дисперсных частицах и окружающем агенте отсутствуют токи проводимости. Тогда локально осредненные уравнения поля в двойном континууме будут иметь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{B} и \mathbf{H} — индукция и напряженность магнитного поля.

В предположениях, сделанных выше относительно свойств вещества частиц, объемная плотность ponderomotorной силы в твердой фазе в собственной системе отсчета может быть представлена (в абсолютной системе единиц) в виде [10]

$$\mathbf{F}_m = -\nabla \left\{ \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} + \int_0^{\mathbf{H}} \left[\mathbf{M} - d \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d} \right)_{T, \mathbf{H}} \right] d\mathbf{H} \right\} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{H} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{M} = (4\pi)^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{H})$ — вектор намагниченности твердой фазы, $d = \rho d_s$ — ее средняя плотность, ρ — ее объемная концентрация (т.е. осредненная объемная концентрация дисперсных частиц); производная $(\partial \mathbf{M} / \partial d)_{T, \mathbf{H}}$ вычислена при постоянных температуре T и напряженности магнитного поля \mathbf{H} .

Допустим далее, как это часто делается [10,11], что намагниченность твердой фазы пропорциональна количеству магнитных частиц в единице объема. Для соотношения (1.2) это означает, что $\mathbf{M} - d(\partial \mathbf{M} / \partial d)_{T, \mathbf{H}} = 0$, в результате чего оно приобретает вид

$$\mathbf{F}_m = -\nabla \left(\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{H}$$

С учетом потенциальности вектора \mathbf{H} (первое уравнение (1.1)) последнюю формулу запишем в виде

$$\mathbf{F}_m = -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{H} \quad (1.3)$$

Будем аппроксимировать зависимость намагниченности твердой фазы от напряженности поля при помощи линейного соотношения $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$, где κ — эффективная магнитная восприимчивость твердой фазы, не зависящая от \mathbf{H} . Тогда индукция и напряженность магнитного поля также связаны линейно:

$$\mathbf{B} = 4\pi \mathbf{M} + \mathbf{H} = (1 + 4\pi \kappa) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.4)$$

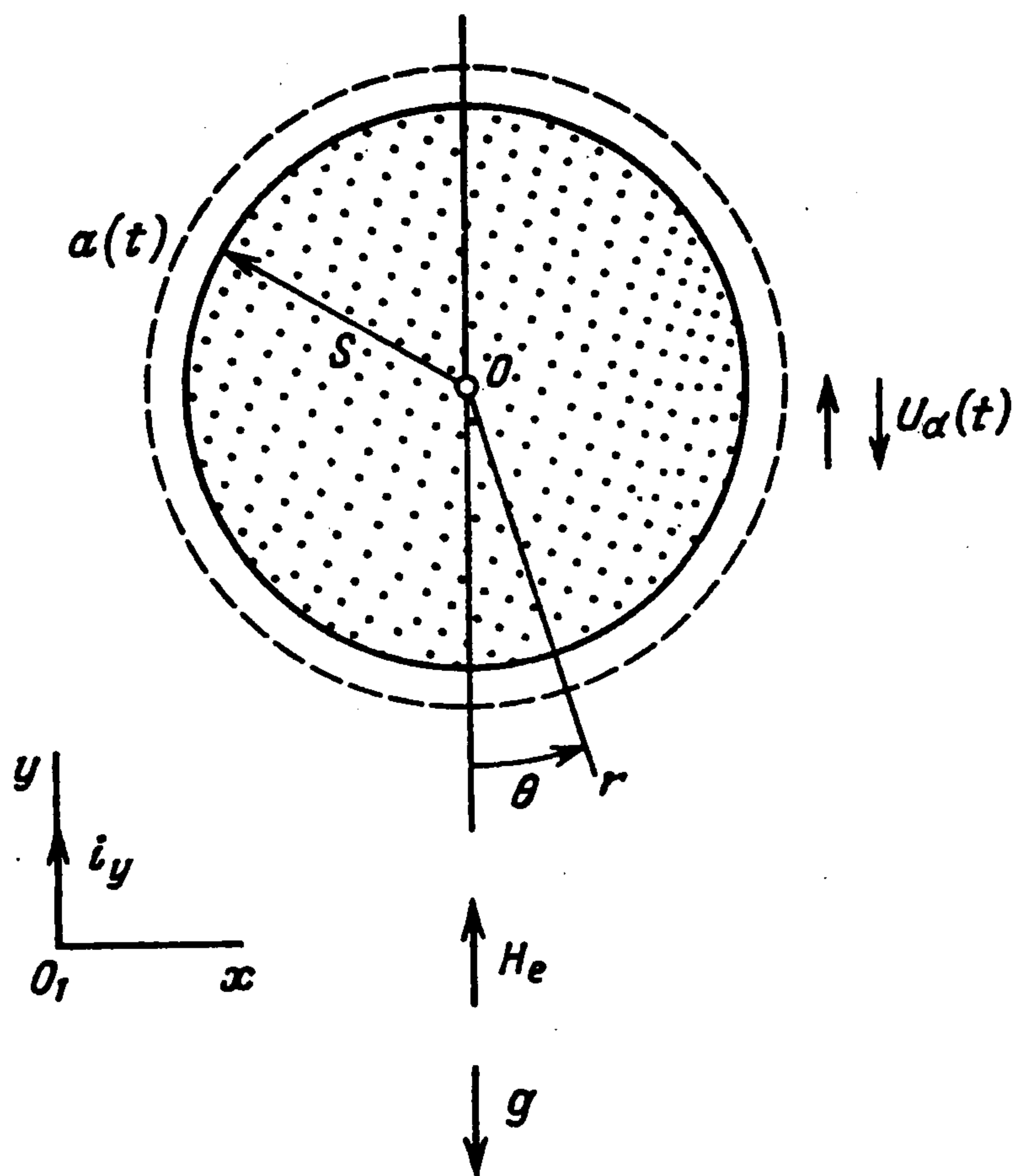
где μ — эффективная магнитная проницаемость твердой фазы. С учетом последнего предположения выражение для объемной плотности ponderomotorной силы может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{F}_m = \kappa (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} = \kappa \nabla \left(\frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) = \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla \mathbf{H}^2 \quad (1.5)$$

Наличие члена (1.5) в уравнении движения твердой фазы составляет основное отличие рассматриваемой модели от изучавшихся ранее [2, 3].

Введем неинерциальную систему отсчета S со сферическими координатами (r, θ, φ) , начало которой жестко закреплено в центре движущейся в слое сферической неоднородности (пакета) радиуса $a(t)$; направление полярной оси системы совпадает с направлением ускорения силы тяжести \mathbf{g} (фиг. 1). Скорость движения пакета в лабораторной системе L обозначим $U_d(t)$.

Вследствие малой в сравнении со скоростью света c относительной скорости движения систем S и L ($U_d/c \ll 1$) пренебрежем релятивистскими эффектами и не будем делать различия между значениями магнитных полей, реализующихся в указанных системах отсчета. На том же основании в качестве выражений связи $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ и объемной плотности ponderomotorной силы в системе S примем соотношения (1.4), (1.5).



Фиг. 1

Пусть рассматриваемая дисперсная система помещена в однородное внешнее магнитное поле H_e , антипараллельное ускорению силы тяжести g (фиг. 1). Под действием поля H_e в двухфазном континууме возбуждается результирующее поле H , которое вдали от пакета, где слой предполагается квазиоднородным, однородно и равно

$$H|_{\infty} = H_{\infty} \quad (1.6)$$

На основании сделанных допущений сформулируем уравнения движения и неразрывности фаз с учетом магнитного поля в двух простейших моделях эволюции неоднородности, рассмотренных в [2, 3].

Модель А. Пакет постоянной массы с поверхностью, непроницаемой для дисперсных частиц, во внешнем слое с постоянной объемной концентрацией частиц [2]. В этой модели скачок концентрации твердой фазы на границе пакета постоянен и растет (уменьшается) при схлопывании (расширении) области неоднородности (полная масса пакета при этом не меняется). Имеем

$$\begin{aligned} r > a(t), \quad v(r, t) - w(r, t) &= -k(\epsilon) \nabla p_f(r, t), \quad \nabla w(r, t) = 0 \\ d_s \rho \frac{dw(r, t)}{dt} &= -\nabla [p_f(r, t) + p_s(r, t)] - d_s \rho U_a^2(t) + \frac{1}{8\pi} \nabla \{(\mu - 1) H^2(r, t)\} + \\ &+ d_s \rho g, \quad \nabla w(r, t) = 0 \\ \epsilon + \rho &= 1, \quad \rho = \text{const} \\ r < a(t), \quad v'(r, t) - w'(r, t) &= -k'[\epsilon'(t)] \nabla p_f'(r, t) \\ \partial \epsilon'(t) / \partial t + \epsilon'(t) \nabla v'(r, t) &= 0 \\ d_s \rho'(t) \frac{dw'(r, t)}{dt} &= -\nabla [p_f'(r, t) + p_s'(r, t)] - d_s \rho'(t) U_a^2(t) + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \nabla \{[\mu'(t) - 1] H'^2(r, t)\} + d_s \rho'(t) g \\ \partial \rho'(t) / \partial t + \rho'(t) \nabla w'(r, t) &= 0, \quad \epsilon'(t) + \rho'(t) = 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Модель В. Пакет с постоянной объемной концентрацией частиц в однородном внешнем слое при обмене частицами между пакетом и слоем [3]. В этом случае скачок концентрации на разрыве постоянен, а масса пакета растет (уменьшается) вследствие притока твердой фазы к пакету извне (ее оттока во внешний слой). Имеем

$$\begin{aligned}
 r > a(t), \quad v(r, t) - w(r, t) &= -k(\epsilon) \nabla p_f(r, t), \quad \nabla v(r, t) = 0 \\
 d_s \rho \frac{dw(r, t)}{dt} &= -\nabla [p_f(r, t) + p_s(r, t)] - d_s \rho U_a(t) + \\
 + \frac{1}{8\pi} \nabla [(\mu - 1) H^2(r, t)] + d_s \rho g, \quad \nabla w(r, t) &= 0 \\
 \epsilon + \rho &= 1, \quad \rho = \text{const} \\
 r < a(t), \quad v'(r, t) - w'(r, t) &= -k'(\epsilon') \nabla p_f'(r, t), \quad \nabla v'(r, t) = 0 \\
 d_s \rho' \frac{dw'(r, t)}{dt} &= -\nabla [p_f'(r, t) + p_s'(r, t)] - d_s \rho' U_a(t) + \\
 + \frac{1}{8\pi} \nabla [(\mu' - 1) H'^2(r, t)] + d_s \rho' g, \quad \nabla w'(r, t) &= 0 \\
 \epsilon' + \rho' &= 1, \quad \rho' = \text{const}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

В соотношениях (1.7), (1.8) $v, w; p_f, p_s$ — локально осредненные скорости и давления оживающего агента и дисперсных частиц соответственно; ϵ — объемная концентрация жидкой фазы; $k(\epsilon)$ — проницаемость взвешенного слоя [9]. Штрихом отмечены параметры фаз внутри пакета ($r < a(t)$).

В обеих моделях распределения твердой фазы как вне, так и внутри пакета пространственно однородны. В связи с этим при записи (1.7), (1.8) предполагается, что и эффективная магнитная проницаемость твердой фазы — пространственно однородная функция в областях $r > a(t), r < a(t)$. При этом плотность пондеромоторной силы в (1.5) — потенциальный вектор.

Ниже приближенное интегрирование уравнений (1.7), (1.8) проводится в предположении потенциальности поля течения твердой фазы вне пакета и наличия осевой симметрии физических полей обеих фаз.

В обоих случаях *A* и *B* магнитное поле описывается уравнениями (1.1), которые удовлетворяют условию (1.6) вдали от пакета, а на его поверхности — стандартным граничным условиям [12], которые при наличии осевой симметрии запишем в виде

$$H_\theta = H'_\theta, \quad B_r = B'_r \tag{1.9}$$

Граничные условия на поверхности пакета для уравнений (1.7), (1.8) в неинерциальной системе S — те же, что и в отсутствие магнитного поля, за исключением условия баланса нормальных напряжений в твердой фазе. Это условие получается интегрированием соответствующего уравнения движения поперек разрыва [13] с учетом дополнительного магнитного воздействия (1.5) поля на твердую фазу.

Таким образом, в модели *A* система граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned}
 r = a(t), \quad w_r = a, \quad w'_r = a, \quad \epsilon(v_r - a) &= \epsilon'(v'_r - a) \\
 p_f = p'_f, \quad p'_s - p_s &= -2\pi(M_r'^2 - M_r^2) = \frac{B_r^2}{4\pi} \left[\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu'^2} - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{\mu^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

При записи последнего равенства использовано второе условие (1.9).

В модели *B* граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} r = a(t), \quad \rho(a \cdot - w_r) = \rho' a \cdot, \quad \epsilon(v_r - a \cdot) = \epsilon'(v_r' - a \cdot) \quad (1.11) \\ p_f = p_f', \quad p_s' - p_s = d_s[\rho(w_r - a \cdot)^2 - \rho' a \cdot^2] - 2\pi(M_r'^2 - M_r^2) = \\ = d_s \rho' a \cdot^2 \left(\frac{\rho'}{\rho} - 1 \right) + \frac{B_r^2}{4\pi} \left[\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu'^2} - \frac{1}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned}$$

К граничным условиям на поверхности пакета (1.10), (1.11) присовокупляются условия однородности потоков твердой и жидкой фаз вдали от пакета и ограниченность их скоростей во всей области течения.

2. Распределение магнитного поля вне и внутри пакета. Магнитостатические уравнения (1.1) с граничными условиями (1.9) и условием вдали от неоднородности (1.6) интегрируются в принятой постановке независимо от движения фаз и одинаково в обеих моделях *A* и *B*. Магнитное поле, возмущенное сферической неоднородностью концентрации дисперсных частиц, описывается соотношениями

$$\begin{aligned} r < a(t), \quad H_r' = \frac{3\mu H_\infty}{2\mu + \mu'} \cos\theta, \quad H_\theta' = -\frac{3\mu H_\infty}{2\mu + \mu'} \sin\theta \\ r > a(t), \quad H_r = \left[1 + \frac{2(\mu' - \mu)}{2\mu + \mu'} \frac{a^3(t)}{r^3} \right] H_\infty \cos\theta \quad (2.1) \\ H_\theta = \left[-1 + \frac{\mu' - \mu}{2\mu + \mu'} \frac{a^3(t)}{r^3} \right] H_\infty \sin\theta \end{aligned}$$

где $H_\infty = -H_{r\infty}|_{\theta=0}$, $\mu' = \mu'(t)$ в модели *A*.

Из выражений (2.1) следует, что поле внутри пакета однородно, а вне его представляет собой суперпозицию однородного внешнего поля и поля диполя с моментом $[(\mu' - \mu)/(2\mu + \mu')] a^3(t)$.

На основании равенств (2.1) распределение магнитного поля по поверхности пакета представим в виде

$$H^2|_{r=a(t)+0} = \frac{9H_\infty^2 (\mu'^2 \cos^2\theta + \mu^2 \sin^2\theta)}{(2\mu + \mu')^2}, \quad H'^2|_{r=a(t)-0} = \frac{9H_\infty^2 \mu^2}{(2\mu + \mu')^2} \quad (2.2)$$

Вектор напряженности магнитного поля разрывен на поверхности пакета: $H^2|_{r=a(t)+0} \neq H'^2|_{r=a(t)-0}$.

Отметим, что вследствие однородности магнитного поля внутри пакета $F_m' = 0$, $r < a(t)$. Поскольку наличие магнитных свойств частиц проявляется в системах (1.7), (1.8) только в уравнениях движения твердой фазы в виде дополнительной пондеромоторной силы F_m , соотношения, полученные в [2, 3] ($H = 0$, $\mu_s = 1$) для полей скорости фаз, давления жидкой фазы и давления твердой фазы внутри пакета, остаются в силе. Действие магнитного поля порождает дополнительные нормальные напряжения в твердой фазе лишь во внешней по отношению к пакету области течения $r > a(t)$.

Граничное условие (1.10), (1.11) для скачка давления твердой фазы на поверхности пакета может быть удовлетворено и в принятой модели магнитных частиц только локально — в окрестности передней критической точки. В соответствии с методом Дэвиса—Тейлора [14] это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно описывающих эволюцию пакета при его движении в слое.

Рассмотрим соответствующие системы отдельно в моделях *A* и *B*.

3. Уравнение эволюции пакета. Модель *A*. Потенциал $\varphi_s(r, t)$ внешнего обтекания пакета дисперсной фазой имеет вид

$$\varphi_s(r, t) = U_d(t) \left[1 + \frac{a^3(t)}{2r^3} \right] r \cos\theta - \frac{a^2(t) a \cdot(t)}{r} \quad (3.1)$$

При записи (3.1) учтено, что $U_d(t) = U_d(t) i_y$ ($i_y = -g/g$ — орт в направлении вертикальной оси в системе отсчета L (см. фиг. 1), так что при $U_d(t) > 0$ пакет всплывает ($\rho' < \rho$), а при $U_d(t) < 0$ — погружается ($\rho' > \rho$).

Второе уравнение (1.7) допускает в рассматриваемом случае интеграл Коши—Лагранжа

$$d_s \rho \varphi'_s(r, t) + \frac{1}{2} d_s \rho w^2(r, t) + p_f(r, t) + p_s(r, t) - d_s \rho \left[1 + \frac{U_d(t)}{g} \right] (g, r) - \frac{1}{8\pi} (\mu - 1) H^2(r, t) = \Phi(t) \quad (3.2)$$

Функцию $\Phi(t)$ определим из условий на бесконечном удалении от пакета, где параметры фаз и магнитное поле не возмущены:

$$r \rightarrow \infty, \quad w^2 \rightarrow U_d^2 (w \rightarrow -U_d = U_d g/g) \\ p_f \rightarrow p_{f\infty}(t) + d_s \rho (g, r), \quad p_s \rightarrow p_{s\infty}, \quad H \rightarrow H_\infty$$

($p_{f\infty}(t)$ — давление жидкой фазы на уровне псевдооживленного слоя, с которым совпадает в момент времени t экваториальная плоскость пакета $\theta = \pi/2$). Интеграл (3.2) приобретает форму

$$d_s \rho \varphi'_s(r, t) + \frac{1}{2} d_s \rho [w^2(r, t) - U_d^2(t)] + p_f(r, t) - p_{f\infty}(t) + p_s(r, t) - p_{s\infty} - d_s \rho \left[1 + \frac{U_d(t)}{g} \right] (g, r) - \frac{\mu - 1}{8\pi} [H^2(r, t) - H_\infty^2] = 0 \quad (3.3)$$

На основании соотношений (3.3), (3.1), (2.2) распределение давления твердой фазы по наружной поверхности пакета запишем в виде

$$p_s(r, t) |_{r=a(t)+0} = \frac{1}{2} d_s \rho [U_d^2(t) - a \cdot^2(t) - \frac{9}{4} U_d^2(t) \sin^2 \theta] - d_s \rho \left[\frac{3}{2} U_d(t) a(t) \cos \theta + \frac{3}{2} U_d(t) a \cdot(t) \cos \theta - 2a \cdot^2(t) - a(t) a \cdot \cdot(t) \right] + p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} - p_f(r, t) |_{r=a(t)+0} + d_s \rho \left[1 + \frac{U_d(t)}{g} \right] g a(t) \cos \theta + \frac{\mu - 1}{8\pi} \left[\frac{9(\mu'^2 \cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta)}{(2\mu + \mu')^2} - 1 \right] H_\infty^2 \quad (3.4)$$

Течение твердой фазы внутри пакета представляет собой суперпозицию сферического вихря Хилла с параметром $U_d(t)$ скорости циркулирования частиц и однородного расширения (сжатия) с расходимостью $\zeta(t) = 3a \cdot(t)/a(t)$ [2]. Такое скоростное поле в рамках модели идеальных жидкостей реализуется при выполнении условия

$$U_d'(t) a(t) + U_d(t) a \cdot \cdot(t) = [U_d(t) a(t)]' = 0 \quad (3.5)$$

которое означает сохранение масштаба $\Gamma = U_d(t) a(t)$ циркуляции твердой фазы в пакете. Поскольку уравнение движения твердой фазы внутри пакета не меняет вида при переходе от модели немагнитных частиц [2] к модели $A(F'_m = 0, r < a(t))$, условие (3.5) остается в силе.

Распределение давления твердой фазы по внутренней поверхности пакета имеет вид [2]

$$\begin{aligned} p'_s(r, t) |_{r=a(t)-0} &= -\frac{a(t)a'(t)}{\epsilon k(\epsilon)} + p_{f\infty}(t) - p'_f(r, t) |_{r=a(t)-0} + \\ &+ d_s \rho'(t) \left\{ \left[\frac{U'_d(t)}{g} + 1 \right] ga(t) \cos \theta - \frac{1}{2} [a'^2(t) + \frac{9}{4} U_d'^2(t) \sin^2 \theta] - \right. \\ &\left. - \frac{a''(t)a(t) - a'^2(t)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В окрестности передней критической точки ($\theta = \pi$ — для всплывающего пакета и $\theta = 0$ — для погружающегося) $\cos \theta = \mp 1 \pm \delta/2 + O(\delta^2)$, где $\delta = \sin^2 \theta \rightarrow 0$. Ограничимся удовлетворением последнего граничного условия (1.10) на скачок давления твердой фазы с точностью до величин первого порядка малости по δ . С учетом соотношений (2.1) получаем следующую систему уравнений, приближенно описывающих эволюцию пакета:

$$\begin{aligned} &-\frac{a(t)a'(t)}{\epsilon k \rho d_s} - \frac{\rho'(t)}{\rho} \frac{a''(t)a(t)}{2} - \frac{3}{2} a'^2(t) - a(t)a''(t) - \\ &-\frac{9}{4} \left[\frac{\rho'(t)}{\rho} U_d'^2(t) - U_d^2(t) \right] - \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} - \frac{U_d^2(t)}{2} = \\ &= \frac{H_\infty^2 [\mu - \mu'(t)]^2}{8\pi \rho d_s [2\mu + \mu'(t)]^2} \left\{ 1 + 14\mu + \frac{6\mu[\mu'(t) - 1]}{\mu - \mu'(t)} \right\} \\ &\pm \left[\frac{\rho'(t)}{\rho} - 1 \right] \left[1 + \frac{U'_d(t)}{g} \right] ga(t) \pm \frac{3}{2} [U_d(t)a(t) + U_d(t)a'(t)] - \\ &-\frac{9}{4} \left[\frac{\rho'(t)}{\rho} U_d'^2(t) - U_d^2(t) \right] = \frac{9}{4} \frac{H_\infty^2 \mu [\mu - \mu'(t)]^2}{\pi \rho d_s [2\mu + \mu'(t)]^2} \\ &U'_d(t)a(t) = \Gamma = \text{const} \end{aligned} \quad (3.7)$$

(знак плюс соответствует всплыванию пакета, минус — погружению).

В качестве замыкающей систему (3.7) "уравнения состояния" твердой фазы примем линейную аппроксимацию зависимости $\mu(\rho)$:

$$\mu(\rho) = 1 + (\mu_0 - 1)\rho \quad (3.8)$$

где $\mu_0 \gg 1$ — магнитная проницаемость материала дисперсных частиц.

Аппроксимация (3.8) является следствием сделанного выше предположения о линейной зависимости намагниченности M твердой фазы от объемной концентрации частиц, использованного при записи пондеромоторной силы в виде (1.5).

Система (3.7), (3.8) имеет стационарное решение $U_d = U_{d*}$, $U'_d = U'_{d*}$, $a = a_*$, $\rho' = \rho'_*$, $\mu' = \mu'_* = 1 + (\mu_0 - 1)\rho'_*$, определяемое уравнениями

$$\begin{aligned} &-\frac{9}{4} \left(\frac{\rho'_*}{\rho} U_{d*}'^2 - U_{d*}^2 \right) - \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} - \frac{U_{d*}^2}{2} = \\ &= \frac{H_\infty^2 (\mu - \mu'_*)^2}{8\pi \rho d_s (2\mu + \mu'_*)^2} \left[1 + 14\mu + \frac{6\mu(\mu'_* - 1)}{\mu - \mu'_*} \right] \\ &\pm \left(\frac{\rho'_*}{\rho} - 1 \right) ga_* - \frac{9}{4} \left(\frac{\rho'_*}{\rho} U_{d*}'^2 - U_{d*}^2 \right) = \frac{9}{4} \frac{H_\infty^2 \mu (\mu - \mu'_*)^2}{\pi \rho d_s (2\mu + \mu'_*)^2} \\ &U'_{d*} a_* = \Gamma \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для скорости пакета в стационарном состоянии получаем из (3.9) выражение

$$U_{d_*}^2 = \frac{4}{7} \left(P + \frac{27M\Gamma^2}{16\pi\rho d_s a_*^5} + \frac{p_{s\infty}}{\rho d_s} \right) \quad (3.10)$$

Здесь P — правая часть первого уравнения (3.9), $M = \frac{4}{3}\pi\rho'_*d_s a_*^3$ — масса пакета, сохраняющаяся при его движении и эволюции в слое. Требование неотрицательности правой части (3.10) ограничивает возможность сохранения размера плотного пакета в процессе движения (для разреженных пакетов $\rho'_* < \rho$, $P > 0$).

Исключая из второго уравнения (3.9) параметры U_{d_*} , U'_{d_*} , ρ'_* , приходим к следующему уравнению для стационарного размера пакета:

$$\begin{aligned} a_*^{12} \mp \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty} + p_m}{d_s \rho g} a_*^{11} - \frac{9M}{4\pi\rho d_s (2\mu + 1)} a_*^9 \mp \frac{27M}{14\pi\rho^2 d_s^2 g} \left[p_{s\infty} \frac{\mu - 1}{2\mu + 1} + \right. \\ \left. + p_m (3\mu - 1) \right] a_*^8 - \left[\frac{27M^2 (\mu^2 - 1)}{16\pi^2 \rho^2 d_s^2 (2\mu + 1)^2} \pm \frac{27M\Gamma^2}{56\pi\rho d_s g} \right] a_*^6 + \\ + \frac{81M^2}{112\pi^2 \rho^3 d_s^3 g} \left[\mp p_{s\infty} \frac{(\mu - 1)^2}{(2\mu + 1)^2} \pm p_m (6\mu - 1) \right] a_*^5 + \\ + \frac{27M^2 (\mu - 1)}{16\pi^2 \rho^2 d_s^2} \left[- \frac{M (\mu - 1)}{4\pi\rho d_s (2\mu + 1)^2} \mp \frac{3\Gamma^2}{7g(2\mu + 1)} \right] a_*^3 \mp \frac{243M^3 \Gamma^2 (\mu - 1)^2}{896\pi^3 \rho^3 d_s^3 g (2\mu + 1)^2} = \\ = 0, \quad p_m = \frac{(\mu - 1)^2 H_\infty^2}{8\pi(2\mu + 1)^2} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Здесь p_m — магнитная часть эффективного давления твердой фазы.

В предельном случае отсутствия частиц в пакете, т.е. при $M = 0$, соотношения (3.10), (3.11) принимают вид

$$U_{d_*}^2 = \frac{4}{9} a_* g + \frac{8\mu p_m}{\rho d_s}, \quad a_* = \frac{9}{7} \frac{p_m + p_{s\infty}}{\rho d_s g}$$

и соответствуют результатам для пузырей [7].

При отсутствии магнитных эффектов в слое, т.е. если $p_m = 0$, выражение (3.11) сводится к исследованному ранее [2] уравнению

$$a_*^6 \mp \frac{9}{7} \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho g} a_*^5 - \frac{3M}{4\pi\rho d_s} a_*^3 \mp \frac{27M\Gamma^2}{56\pi\rho d_s g} = 0,$$

для стационарного размера пульсирующего пакета в отсутствие магнитного поля. Из (3.10) в этом случае следует известная формула [2] для квадрата скорости пакета.

В условиях преобладания магнитного эффекта по сравнению с эффектами взаимодействия дисперсных частиц, их циркуляции внутри пакета и действия поля внешних массовых сил уравнение (3.11) вырождается в равенство

$$a_*^3 = \frac{3}{4} M / (\pi\rho d_s) \quad (3.12)$$

Здесь учтено, что для ферромагнитных частиц, т.е. при $\mu_0 \gg 1$, в сильных полях члены $\sim \rho_m \mu$ в (3.11) доминируют над остальными.

Результат (3.12) означает, что стационарным размером пакета считается такой, когда его плотность совпадает со средней плотностью $d = \rho d_s$ псевдооживленного слоя (при этом $U_{d_*} = 0$), т.е. пространство, занятое слоем, квазиоднородно. Неоднородности плотности неустойчивы в том смысле, что не имеют стационарных размеров — это касается как разреженных пакетов, так и плотных сгустков.

Сделанные выводы свидетельствуют о стабилизирующем воздействии магнитного поля на трехмерный псевдооживленный слой: если это воздействие достаточно сильно, неоднородности в виде пакетов частиц "теряют" стационарные размеры, которыми они обладали в отсутствие поля. Этот эффект не зависит от направления вектора H_∞ .

Промежуточные случаи, отражающие взаимодействие факторов $p_{s\infty}$, Γ , M , p_m , могут быть рассмотрены аналогично тому, как это делалось ранее [2], путем соответствующих упрощений уравнения (3.11).

4. Уравнения эволюции пакета. Модель В (трехмерный случай). В этой модели рассматривается простейшая ситуация, когда движение дисперсных частиц внутри пакета отсутствует [3]. Динамика пакета описывается уравнениями движения и неразрывности (1.8) с граничными условиями (1.11).

Потенциал течения твердой фазы вне пакета имеет вид

$$\varphi_s(r, t) = U_d(t) \left[1 + \frac{a^3(t)}{2r^3} \right] r \cos\theta - \frac{a^2(t)a'(t)(1-\lambda)}{r}, \quad \lambda = \frac{\rho'}{\rho} \quad (4.1)$$

Уравнение движения твердой фазы (1.8) в области $r > a(t)$ допускает интеграл Коши-Лагранжа, форма которого сохраняется в виде (3.3) вследствие идентичности течений фаз вне пакета в моделях А и В.

Используя соотношения (4.1), (3.3), (2.2), получаем распределение давления твердой фазы по внешней стороне поверхности пакета в виде

$$\begin{aligned} p_s(r, t) |_{r=a(t)+0} = & \frac{1}{2} d_s \rho [U_d^2(t) - a'^2(t)(1-\lambda)^2 - \frac{9}{4} U_d^2(t) \sin^2\theta] - \\ & - d_s \rho \left[\frac{3}{2} U_d(t) a(t) \cos\theta + \frac{3}{2} U_d(t) a'(t) \cos\theta - 2a'^2(t)(1-\lambda) - \right. \\ & \left. - a(t)a''(t)(1-\lambda) \right] + p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} - p_f(r, t) |_{r=a(t)+0} + \\ & + d_s \rho \left[\frac{U_d(t)}{g} + 1 \right] g a(t) \cos\theta + \frac{\mu-1}{8\pi} \left[\frac{9(\mu'^2 \cos^2\theta + \mu^2 \sin^2\theta)}{(2\mu + \mu')^2} - 1 \right] H_\infty^2 \quad (4.2) \end{aligned}$$

Найденное распределение отличается от соответствующего распределения (3.4) в модели А лишь вследствие того, что поток твердой фазы через поверхность пакета в модели В уже отличен от нуля — он приносит пакету массу извне или уносит ее в окружающий слой.

В силу однородности поля H' внутри пакета пондеромоторная сила, действующая со стороны поля на твердую фазу, отсутствует в области $r < a(t)$. Поэтому распределение давления p'_s по внутренней стороне поверхности пакета сохраняется в том же виде, что и в [3].

На основании соотношения (4.2), аналогично тому, как это было сделано выше в разд. 3, получаем следующую систему уравнений эволюции неоднородности:

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda-1)(3-\lambda)}{2} a'^2(t) + (\lambda-1) a(t) a''(t) - \frac{p_{s\infty}}{d_s \rho} + \frac{7}{4} U_d^2(t) - \\ & - \frac{a(t) a'(t)}{\epsilon k \rho d_s} = \frac{H_\infty^2 (\mu - \mu')^2}{8\pi \rho d_s (2\mu + \mu')^2} \left[1 + 14\mu + \frac{6\mu(\mu' - 1)}{\mu - \mu'} \right] \quad (4.3) \\ & \pm \frac{3}{2} U_d(t) a'(t) \pm \frac{1}{2} a(t) U_d'(t) (1 + 2\lambda) + \frac{9}{4} U_d^2(t) = \\ & = \mp (\lambda - 1) g a(t) + \frac{9}{4} \frac{H_\infty^2 \mu (\mu - \mu')^2}{\pi \rho d_s (2\mu + \mu')^2} \end{aligned}$$

Система (4.3) имеет стационарное решение a_*, U_{d*} , которое при $H = 0$ и/или $\mu_0 = 1$ переходит в полученные ранее [3] в отсутствие у частиц магнитных свойств.

С учетом "уравнения состояния" (3.8) для стационарных значений скорости пакета и его радиуса получаем

$$U_{d*}^2 = \frac{4}{7\rho d_s} \left\{ p_{s\infty} + p_0 \frac{(\mu - 1)^2 (1 - \lambda) [1 - \lambda + 2\mu(7 - 4\lambda)]}{[3 + (\mu - 1)(2 + \lambda)]^2} \right\} \quad (4.4)$$

$$a_* = \pm \frac{1}{\lambda - 1} \frac{9}{7\rho d_s g} \left\{ p_{s\infty} + p_0 \frac{(\mu - 1)^2 (1 - \lambda)(1 - \lambda + 6\mu\lambda)}{[3 + (\mu - 1)(2 + \lambda)]^2} \right\}$$

$$p_0 = H_\infty^2 / (8\pi)$$

Ниже предполагается, что объемная концентрация твердой фазы в однородной части слоя вне пакета достаточно высока ($\rho \gtrsim 0,3$), так что $\mu(\rho) \gtrsim 1$, $r \gtrsim a(t)$.

В этом случае соотношения (4.4) принимают вид

$$U_{d*}^2 = \frac{4p_{s\infty}}{7\rho d_s} \frac{\xi - \xi_1}{\xi}, \quad a_* = a_{*0} \frac{\xi - \xi_2}{\xi} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\xi = \frac{p_{s\infty}}{2\mu p_0}, \quad \xi_1 = \frac{(\lambda - 1) [1 - \lambda + 2\mu(7 - 4\lambda)]}{2\mu(2 + \lambda)^2}$$

$$\xi_2 = \frac{(\lambda - 1)(1 - \lambda + 6\mu\lambda)}{2\mu(2 + \lambda)^2}, \quad a_{*0} = a_*(H = 0) = \frac{\mp 9P_{s\infty}}{7\rho d_s g(\lambda - 1)}$$

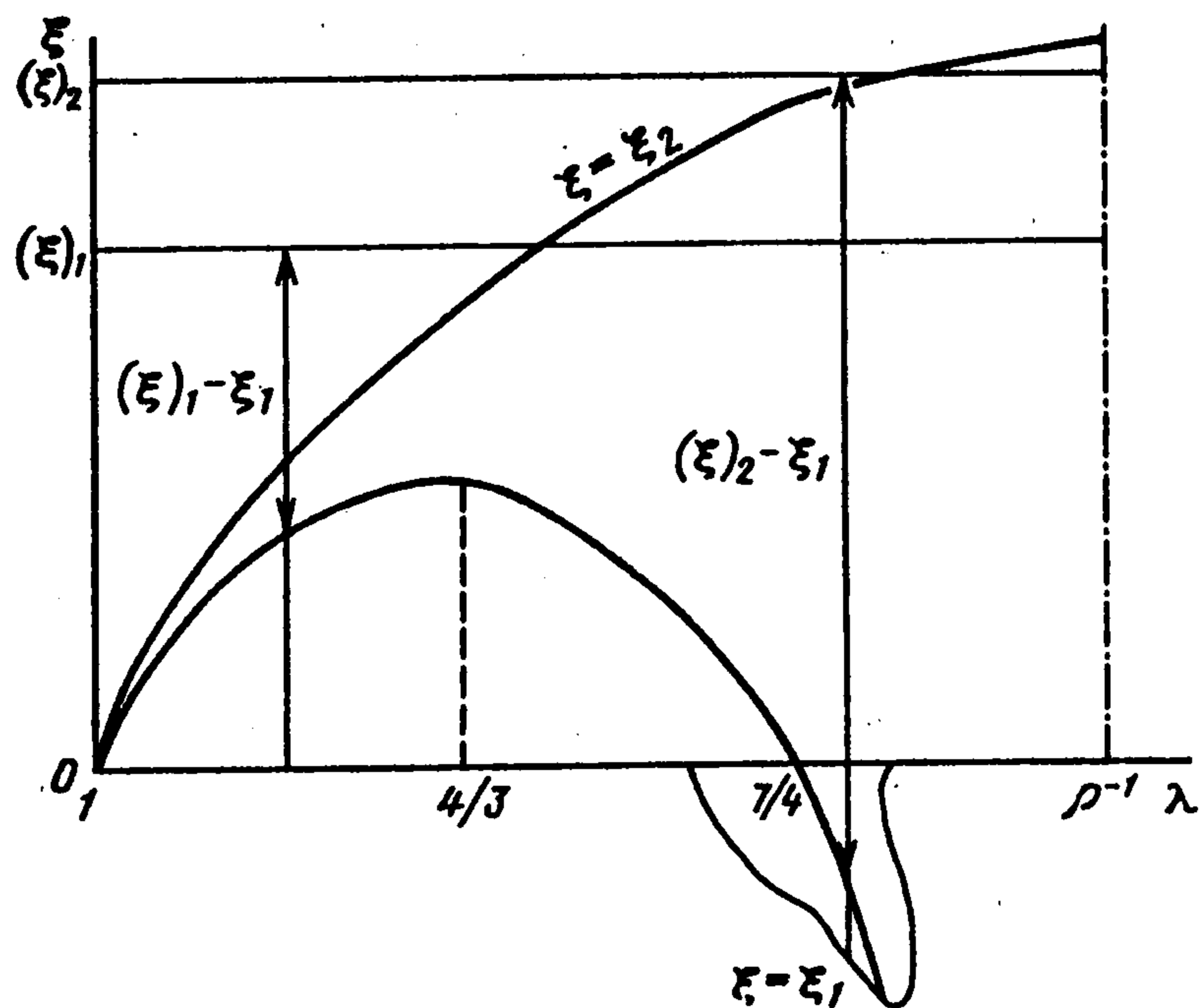
Правые части выражений (4.5) для пузырей и разреженных пакетов ($0 \leq \lambda < 1$) неотрицательны, а для плотных пакетов ($1 < \lambda \leq \rho^{-1}$) неотрицательны при выполнении условий

$$\xi \geq \xi_1(\lambda, \mu), \quad \xi \geq \xi_2(\lambda, \mu) \quad (4.6)$$

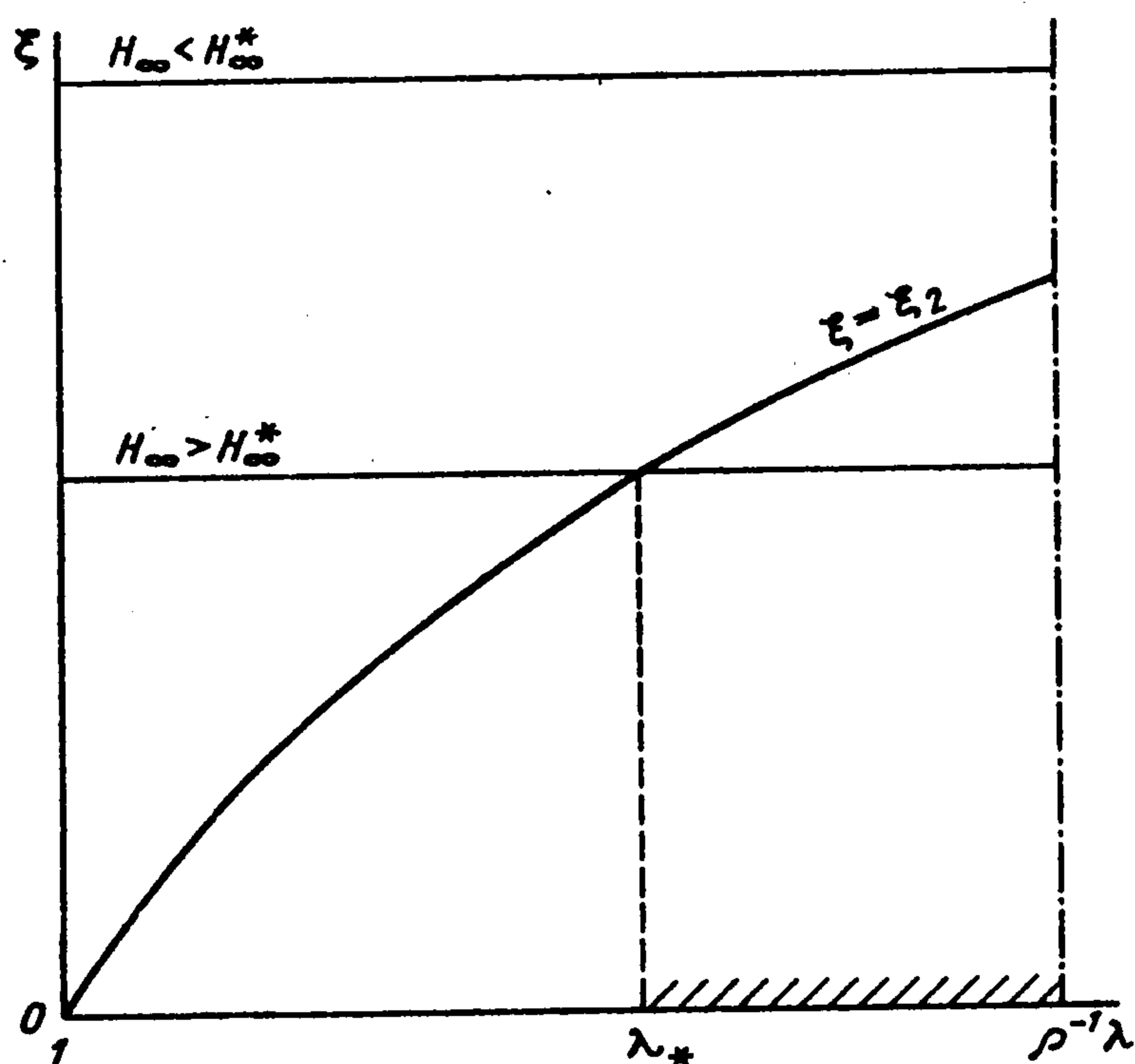
В области значений относительной плотности $\lambda \in (1, \rho^{-1}]$ первое неравенство (4.6) является следствием второго. Соответствующее взаимное расположение кривых $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ представлено схематически на фиг. 2.

Видно, что в псевдооживленном слое магнитных частиц наложение магнитного поля избирательно влияет на стационарные параметры неоднородностей. Именно в присутствии поля установившаяся скорость движения и стационарный размер местных разрежений плотности слоя возрастают: при $\lambda \in [0, 1)$ имеем $\xi_1 \leq 0$, $\xi_2 \leq 0$. Для сгустков частиц с относительной плотностью $\lambda \in (1, 7/4]$ действие магнитного поля сводится к замедлению их стационарного движения через слой, а плотные сгустки ($\lambda \in (7/4, \rho^{-1}]$) подобно разреженным движутся с большей скоростью, чем в отсутствие магнитного поля.

В зависимости от величины магнитного воздействия на слой картина стационарных состояний плотных пакетов будет меняться в соответствии с диаграммой, изображенной на фиг. 3. Существует пороговое поле H_{*0} , такое, что более слабые поля не влияют на наличие у плотного пакета стационарного размера, хотя и уменьшают этот размер по сравнению с a_* . Более сильные поля приводят к распаду наиболее плотных сгустков (с относительной плотностью $\lambda \in [\lambda_*, \rho^{-1}]$), масса которых уже не может сохраняться при их движении в слое (область изменения относительной плотности сгустка, соответствующая отсутствию у него стационарного размера, показана на фиг. 3 штриховкой). Усиливая поле так, чтобы $\xi \cong 0$,



Фиг. 2



Фиг. 3

можно добиться отсутствия стационарных размеров практически у всех плотных сгустков.

Пороговое поле H_{∞}^* и граница λ_* значений относительной плотности сгустка, при которых у него не существует стационарного размера, определяются соотношениями

$$\xi = \xi_2(\rho^{-1}), \quad \xi = \xi_2$$

Отсюда следует

$$H_{\infty}^* = (2\rho + 1) \left[\frac{4\pi\rho s_{\infty}}{3\mu(1 - \rho)} \right]^{1/2} \quad (4.7)$$

$$\lambda_* = \frac{3 + 2\xi + [(3 + 2\xi)^2 + 16\xi(3 - \xi)]^{1/2}}{2(3 - \xi)}, \quad \xi \leq \xi_2(\rho^{-1})$$

Исследуем устойчивость стационарных размеров неоднородностей в модели В к сферически симметричным пульсациям радиуса: $a(t) = a_* + \Delta(t)$, причем временной интервал ограничен условием $\Delta(t) \ll a_*$.

Исключив из системы (4.3) $U_d(t)$, приходим к следующему дифференциальному уравнению, приближенно описывающему эволюцию размера неоднородности:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(t) = & \left(\lambda - 4 - \frac{6}{1+2\lambda} \right) \frac{a'(t)a''(t)}{a(t)} - \frac{7+2\lambda}{(1-\lambda)(1+2\lambda)} \frac{a'^2(t)}{a(t)} - \\
 & - \frac{\eta}{1-\lambda} a''(t) - \frac{21}{2} \left(1 - \frac{\xi_1}{\xi} \right) \frac{a'(t)}{(1-\lambda)(1+2\lambda)a^2(t)} - \frac{3(3-\lambda)a'^3(t)}{(1+2\lambda)a^2(t)} + \\
 & + \frac{63}{4(1-\lambda)(1+2\lambda)a^2(t)} \left[\mp (\lambda-1)a(t) - 1 - \frac{4}{7}\eta a(t)a'(t) - \right. \\
 & - \frac{4}{7}(1-\lambda)a(t)a''(t) - \frac{2}{7}(1-\lambda)(3-\lambda)a'^2(t) + \left. \frac{14\varphi + 2\mu\xi_1}{2\mu\xi} \right] \times \\
 & \times \left[1 + \frac{4}{7}(1-\lambda)a(t)a''(t) + \frac{2}{7}(1-\lambda)(3-\lambda)a'^2(t) + \frac{4}{7}\eta a(t)a'(t) - \right. \\
 & \left. - \frac{\xi_1}{\xi} \right]^{1/2} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Это уравнение записано в безразмерной форме, причем за масштаб длины взят стационарный размер пузыря $a_{*b} = 9\rho_{s\infty}/(7\rho d_s g)$, а времени — величина $t_0 = 3/2(a_{*b}/g)^{1/2}$. Параметр η характеризует отношение макроскопического (t_0) и микроскопического (τ_0) временных масштабов переходного процесса:

$$\eta = \frac{1}{18} \frac{C_1 \rho}{(1-\rho)^3} \frac{t_0}{\tau_0}, \quad C_1 \approx 150, \quad \tau_0 = \frac{2}{9} \frac{a_p^2 d_s}{d_f \nu_f}$$

(a_p — радиус частицы твердой фазы, ν_f — кинематическая вязкость ожижающего агента); $\varphi = \varphi(\mu, \lambda) = \mu(1-\lambda)^2/(2+\lambda)^2$.

В предельном случае $\xi^{-1} \rightarrow 0$ ($H_\infty = 0$) уравнение (4.8) переходит в полученное ранее [3].

Линеаризация уравнения (4.8) вблизи равновесного размера неоднородности приводит к следующему соотношению для малого (безразмерного) отклонения $\Delta(t)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta'''(t) + & \left[\frac{\eta}{1-\lambda} \mp \frac{9(\lambda-1)}{(1+2\lambda)(1-\xi_2/\xi)} \right] \Delta''(t) + \\
 & + \left[\frac{21}{2} \left(1 - \frac{\xi_1}{\xi} \right) \frac{1-\lambda}{(1+2\lambda)(1-\xi_2/\xi)} \pm \frac{9\eta}{(1+2\lambda)(1-\xi_2/\xi)} \right] \Delta'(t) \mp \\
 & \mp \frac{63(\lambda-1)^2 \Delta(t)}{4(1+2\lambda)(1-\xi_2/\xi)} = 0 \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

При этом для существования стационарного размера необходимо выполнение условия $\xi > \xi_2 \geq \xi_1$ (см. (4.7)), так что $1 - \xi_1/\xi > 0$, $1 - \xi_2/\xi > 0$. Отсюда следует, что выводы [3] относительно неустойчивости стационарных состояний неоднородностей всех типов остаются в силе. Как и в отсутствие магнитных эффектов в слое, среди корней характеристического уравнения линейного приближения (4.9) имеются корни с положительной действительной частью, что и указывает на неустойчивость стационарного размера пакета к возмущениям рассматриваемого вида.

5. Эволюция двумерного круглого пакета. Модель В. В постановке, представленной в разд. 1, рассмотрим движение и эволюцию локальной неоднородности концентрации твердой фазы в плоском псевдооживленном слое магнитных частиц. Модель неоднородности — круглый пакет частиц (r, θ — цилиндрические координаты).

Краевая задача для потенциала внешнего течения дисперсной фазы имеет не единственное решение [3]:

$$\varphi_s(r, t) = U_d(t) \left[r + \frac{a^2(t)}{r} \right] \cos \theta + a(t) a'(t) (1 - \lambda) \ln \frac{r}{L(t)} \quad (5.1)$$

Здесь $L(t)$ — произвольная функция времени размерности длины ($L(t) > 0$).

Интеграл Коши—Лагранжа, допускаемый уравнением движения твердой фазы в области $r > a(t)$, сохраняется в форме (3.2). В отличие от трехмерного случая, при определении функции $\Phi(t)$ в правой части (3.2) допускаются логарифмические возмущения полей давлений фаз на удалении от пакета аналогично тому, как это было в отсутствие поля в модели [3].

Градиенты давлений p_f, p_s на бесконечности сохраняют при этом значения, которые имели в однородном слое, так что поля течений фаз вдали от пакета однородны, как и в трехмерной задаче.

Используя соотношения (3.2), (5.1), получаем распределение давления твердой фазы по внешней стороне поверхности пакета

$$\begin{aligned} p_s(r, t) |_{r=a(t)+0} = & \frac{1}{2} d_s \rho [U_d^2(t) - (1 - \lambda)^2 a'^2(t) - 4U_d(t) \sin^2 \theta] - \\ & - d_s \rho \left\{ 2U_d(t) a(t) \cos \theta + 2U_d(t) a'(t) \cos \theta + \right. \\ & \left. + (1 - \lambda) [a'^2(t) + a(t) a''(t)] \ln \frac{a(t)}{L(t)} - (1 - \lambda) \frac{a(t) a'(t) L'(t)}{L(t)} \right\} + \\ & + p_{f\infty}(t) + p_{s\infty} - p_f(r, t) |_{r=a(t)+0} + d_s \rho \left[\frac{U_d(t)}{g} + 1 \right] g a(t) \cos \theta + \\ & + \frac{(\mu - 1) H_\infty^2}{8\pi} \left[\frac{4(\mu'^2 \cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta)}{(\mu + \mu')^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

При записи соотношения (5.2) использовалось найденное из решения плоской магнитостатической задачи распределение магнитного поля по внешней стороне поверхности пакета в форме

$$H^2 |_{r=a(t)+0} = 4H_\infty^2 \frac{\mu'^2 \cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta}{(\mu + \mu')^2}$$

Давление твердой фазы распределено по внутренней стороне поверхности пакета в соответствии с выражением

$$\begin{aligned} p'_s(r, t) |_{r=a(t)-0} = & -p'_f(r, t) |_{r=a(t)-0} + d_s \rho' \left[\frac{U_d(t)}{g} + 1 \right] g a(t) \cos \theta + \\ & + \frac{a(t) a'(t)}{\epsilon k} \ln \frac{a(t)}{L(t)} + p_{f\infty}(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Разложение полученного из равенства (5.2), (5.3) скачка давления твердой фазы на поверхности пакета в окрестности лобовых точек по методу Дэвиса—Тейлора дает следующую систему дифференциальных уравнений, связывающих ско-

рость движения и размер неоднородности:

$$\begin{aligned}
 & a'^2(t) (1 - \lambda) \left[\frac{1 + \lambda}{2} + \ln \frac{a(t)}{L(t)} - \frac{a(t) L'(t)}{a'(t) L(t)} \right] + \\
 & + (1 - \lambda) a(t) a''(t) \ln \frac{a(t)}{L(t)} + \frac{a(t) a'(t)}{\epsilon k \rho d_s} \ln \frac{a(t)}{L(t)} + \\
 & + \frac{7}{2} U_d^2(t) - \frac{p_{g0}}{d_s \rho} + \frac{p_0 (\mu - \mu')^2}{\rho d_s (\mu + \mu')^2} \left[3 - 7\mu + \frac{4\mu'(1 - \mu)}{\mu - \mu'} \right] = 0 \quad (5.4) \\
 & \pm 2 U_d(t) a'(t) \pm (\lambda + 1) U_d'(t) a(t) + 4 U_d^2(t) \pm \\
 & \pm (\lambda - 1) g a(t) - \frac{8\mu p_0 (\mu - \mu')^2}{\rho d_s (\mu + \mu')^2} = 0
 \end{aligned}$$

Функция $L(t)$ определяется, как и ранее [3], из условия $U_d(t) \equiv 0$ при $\lambda = 1$, означающего отсутствие макроскопических движений твердой фазы в квазиоднородном слое.

По-прежнему в качестве аппроксимации зависимости $\mu(\rho)$ возьмем линейное выражение (3.8), предполагая $\mu \gg 1$, $r > a(t)$. Получаем из уравнений (5.4)

$$\begin{aligned}
 & 7 U_d^2(t) - (1 - \lambda)^2 a'^2(t) + \frac{2p_0(1 - \lambda)[4\lambda - 8 + \mu(3\lambda - 7)]}{\rho d_s (1 + \lambda)^2} = 0 \\
 & \pm (\lambda + 1) U_d'(t) a(t) \pm 2 U_d(t) a'(t) + 4 U_d^2(t) \pm \quad (5.5) \\
 & \pm (\lambda - 1) g a(t) - \frac{8p_0 \mu (1 - \lambda)^2}{\rho d_s (1 + \lambda)^2} = 0
 \end{aligned}$$

Стационарное решение системы (5.5) имеет вид

$$a_* = \pm \frac{32}{7} \frac{p_0 (\mu \lambda + 2)}{\rho d_s g (1 + \lambda)^2}, \quad U_{d*}^2 = \frac{2p_0 (\lambda - 1) [4\lambda - 8 + \mu(3\lambda - 7)]}{7\rho d_s (1 + \lambda)^2} \quad (5.6)$$

и обладает физическим смыслом ($a_* \geq 0$, $U_{d*}^2 \geq 0$) лишь в случае $\lambda \in [0, 1)$.

Таким образом, если в отсутствие магнитного воздействия на слой в плоской задаче у неоднородностей всех типов отсутствуют стационарные состояния [3], то при наложении поля они появляются у разреженных пакетов. В частности, обусловленный наличием магнитных свойств твердой фазы равновесный размер пузыря равен $a_{*b} = 64p_0 / (7\rho d_s g)$.

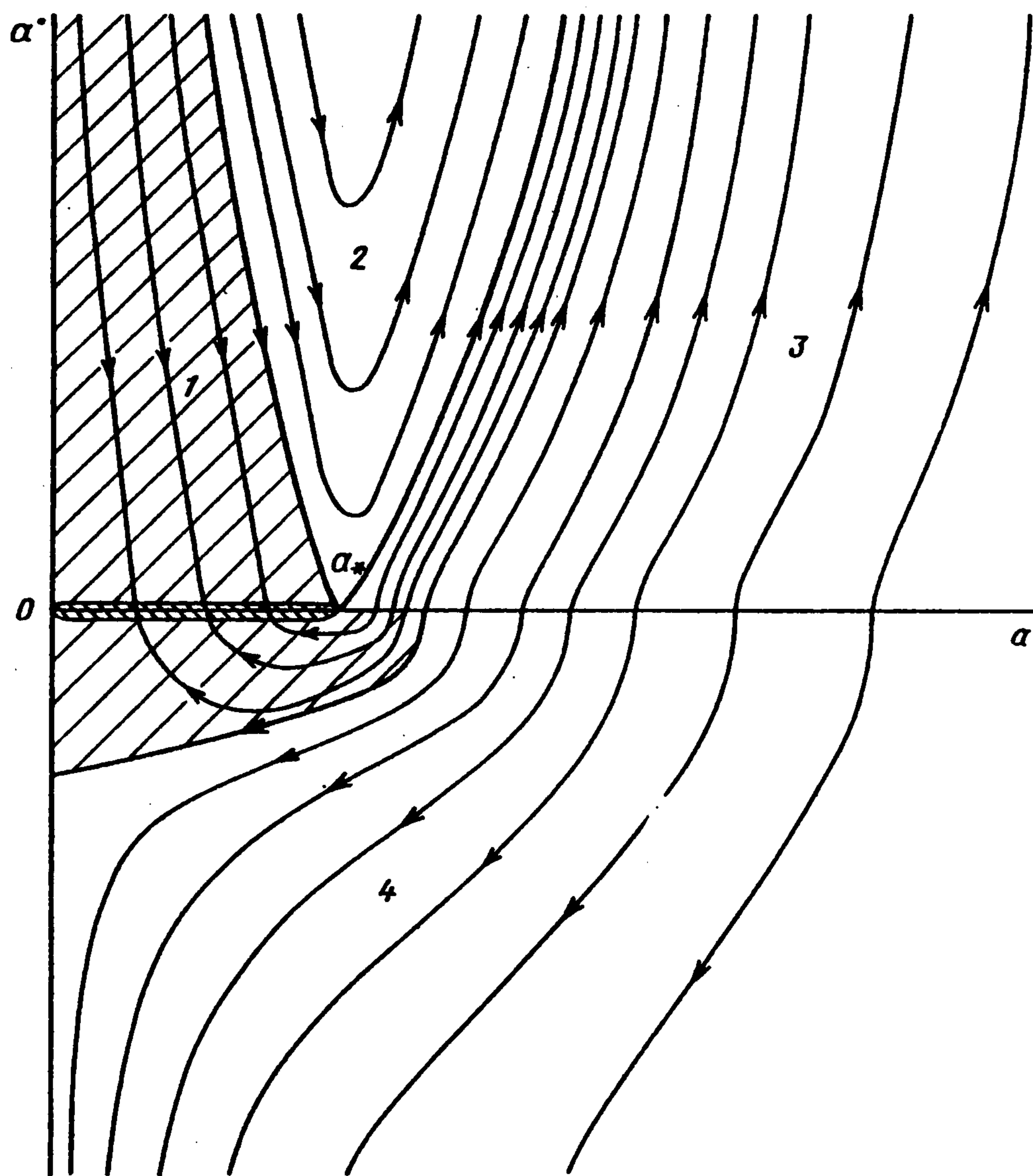
Исключая из уравнений (5.6) $U_d(t)$, получаем дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию размера плоского пакета в рассматриваемой модели

$$\begin{aligned}
 & a''(t) = \frac{2[(1 - \lambda) a'^2(t) - \psi_1]}{(\lambda^2 - 1) a(t)} + \frac{\sqrt{7}}{(\lambda^2 - 1) a(t) a'(t)} [(1 - \lambda)^2 a'^2(t) + \\
 & + (\lambda - 1) \psi_1]^{1/2} \left[\frac{4}{7} (1 - \lambda) a'^2(t) - \frac{4}{7} \psi_1 \mp a(t) - \psi_2 \right] \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

$$\psi_1(\mu, \lambda) = \frac{7[4\lambda - 8 + \mu(3\lambda - 7)]}{32(1 + \lambda)^2}, \quad \psi_2(\mu, \lambda) = \frac{7\mu(1 - \lambda)}{8(1 + \lambda)^2}$$

В уравнении (5.7) выполнен переход к безразмерным переменным при помощи масштабов длины $a_{*b} = 64p_0 / (7\rho d_s g)$ и времени $(a_{*b}/g)^{1/2}$.

Динамическая автономная система, соответствующая уравнению (5.7), имеет разрыв правой части на оси абсцисс $a' = 0$ фазовой плоскости (a, a') , что сущест-



Фиг. 4

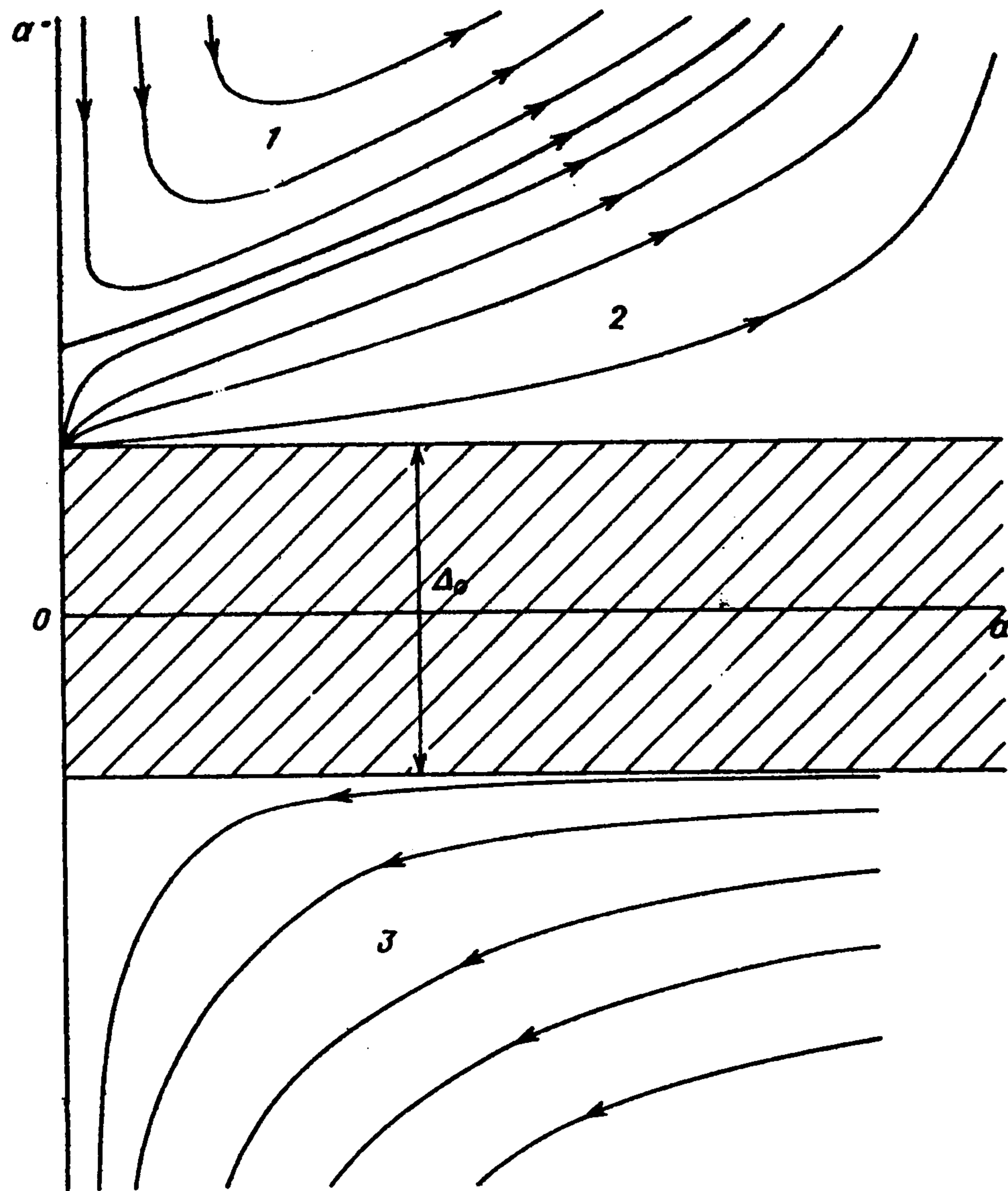
венно отличает эволюцию цилиндрической неоднородности от эволюции сферического пакета, занимающего ограниченную область пространства (см. (4.8)). Граница допустимых движений изображающей точки в фазовой плоскости определяется условием

$$(\lambda - 1)^2 a^2 + (\lambda - 1) \psi_1 \geq 0$$

Оно выполняется для разреженных пакетов ($0 \leq \lambda < 1$, $\psi_1 < 0$), а также для плотных пакетов с относительной концентрацией частиц $\lambda \in [\frac{7}{3}, \rho^{-1}]$ (при этом $\psi_1 \geq 0$). В случае $\lambda \in (1, \frac{7}{3})$, когда $\psi_1 < 0$, на фазовой плоскости вдоль оси абсцисс $a^{\cdot} = 0$ имеется "запрещенная зона" шириной $\Delta_0 = 2\sqrt{\psi_1/(1 - \lambda)}$. Все фазовые траектории уравнения эволюции (5.7) лежат вне ее. Наличие запрещенной зоны означает ограничение снизу на абсолютную величину скорости a^{\cdot} изменения размера не слишком плотного пакета. Такие неоднородности не могут эволюционировать в плоском псевдооживленном слое магнитных частиц медленнее, чем это предписывается границами запрещенной зоны.

В качестве примера рассмотрим псевдооживленную систему с параметрами $\rho = 0,4$, $\mu(\rho = 0,4) = 10$ в трех случаях: $\lambda = 0$ (пузырь), $\lambda = \frac{3}{2} \in (1, \frac{7}{3})$, $\lambda = \frac{29}{12} \in [\frac{7}{3}, \rho^{-1}]$. Фазовые портреты уравнения (5.7) для рассмотренных типов неоднородностей представлены качественно на фиг. 4–6.

Пузыри и разреженные пакеты. Наиболее характерной особенностью фазовой плоскости является наличие критической точки на оси абсцисс Oa , что связано с существованием равновесного размера у таких неоднородностей (для пузыря $a_* = a_{*b} = 1$). Критическая точка имеет тип седло ($a^{\cdot} > 0$) – центр ($a^{\cdot} < 0$), и фазовые траектории нормальны к оси Oa (фиг. 4). Вследствие этого отрезок стыка фазовых траекторий Oa_* вырождается в континуум устойчивых равновесных состояний неоднородности – изображающая точка может нахо-



Фиг. 5

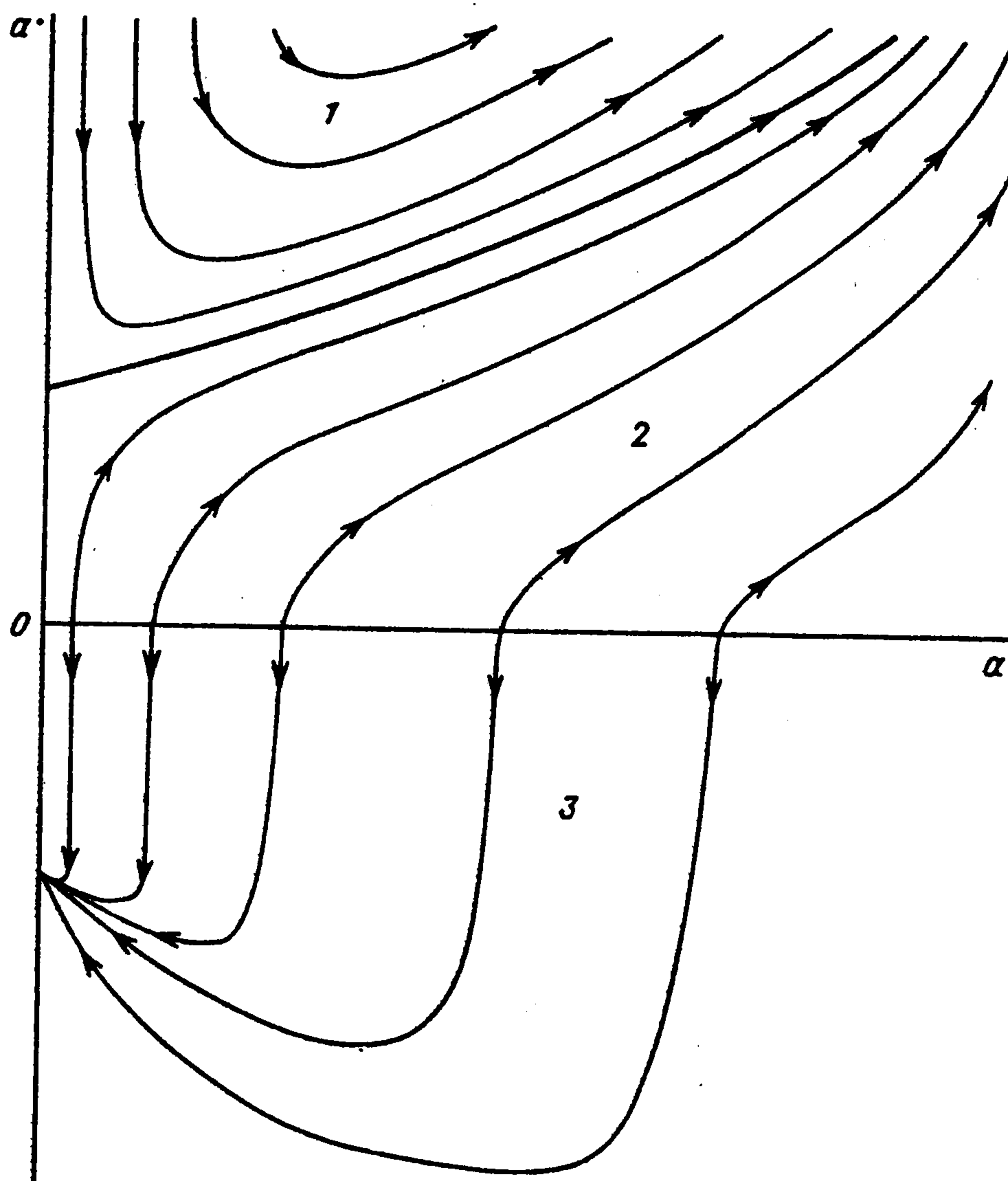
даться на нем бесконечно долго. В общем случае, как известно [15, 16], подобные участки на границе склейки различных "листов" фазового пространства динамических систем с разрывными правыми частями представляют собой области устойчивого "скользящего движения".

Наличие области устойчивости указанного вида кардинально отличает динамику пузырей и разреженных пакетов в плоском магнитном слое от их динамики в системах немагнитных частиц [3]. Оно означает также стабилизирующее воздействие поля на неоднородности этого типа ($\lambda < 1, a < a_*$) в противоположность эффекту их сглаживания, реализующемуся в трехмерных моделях ([7] и разд. 3, 4).

Эволюция неоднородности зависит от положения фазовой точки (a, a') в начальный момент времени. Отовсюду в области 1 (на фиг. 4 она заштрихована) изображающая точка притягивается к множеству устойчивости Oa_* — размер пакета стабилизируется. Ее попадание в область 2 или 3 означает увеличение массы пакета в последующие моменты времени за счет притока частиц извне. Скорость этого притока в первом случае меняется немонотонно, проходя через минимум, а во втором — монотонно увеличивается. Область 4 отвечает состояниям пакета, в которых он теряет массу, отдавая частицы во внешний слой.

Таким образом, как и в случае немагнитных частиц, состояния пакетов с размерами, большими критического ($a > a_*$), неустойчивы. Отметим, что уже в средних по величине полях ($H \sim 10^2 - 10^3$ Э) область устойчивости Oa_* охватывает практически весь спектр размеров неоднородностей ($a_{*b} \sim 1$ м).

Плотный пакет, $\lambda \in (1, 7/3)$. Отличительной чертой фазового портрета уравнения (5.7) является наличие запрещенной зоны, ограничивающей области движения изображающей точки в фазовой плоскости (фиг. 5, запрещенная зона заштрихована). Попадание фазовой точки (a, a') в начальный момент времени в область 1 и 2, как и в предыдущем случае, соответствует режиму роста неоднородности с монотонной (2) или немонотонной (1) скоростью. Фазовая точка, попавшая в область 3, изображает в своем движении эволюцию неоднородности, теряющей массу с монотонно растущей скоростью. Верхняя граница времени жизни таких



Фиг. 6

пакетов может быть приближенно оценена с помощью соотношения $t_* = 2a_0 / [\Delta_0 (a_0 g)^{1/2}]$, где a_0 — начальный радиус пакета.

Плотный пакет, $\lambda \in [7/3, \rho^{-1}]$. Характер роста неоднородности здесь такой же, как и в двух рассмотренных выше случаях (фиг. 6, области 1 и 2). Процесс растворения пакета приобретает новую черту: скорость границы пакета в момент его исчезновения одинакова для неоднородностей любой относительной плотности $\lambda \in [7/3, \rho^{-1}]$. Скорость растворения растет, достигая максимального значения, после чего спадает до указанной постоянной величины при $\alpha = 0$ (область 3 на фиг. 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. О пакетном механизме перемешивания в кипящем слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 73–84.
2. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. О нестационарных движениях локальных неоднородностей в псевдооживленном слое // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 431–443.
3. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. Модель неоднородного псевдооживленного слоя при обмене частицами между неоднородностью и слоем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 786–797.
4. Курко И.М., Филиппов М.В. Особенности взвешенного слоя ферромагнитных частиц в магнитном поле // Журн. техн. физики. 1960. Т. 30. № 9. С. 1081–1084.
5. Rosensweig R.E. Magnetic stabilization of the state of uniform fluidization // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1979. V. 18. № 3. P. 260–269.
6. Rosensweig R.E. Fluidization: Hydrodynamic stabilization with a magnetic field // Science. 1979. V. 204. № 4388. P. 57–60.
7. Цеберс А.О., Гупало Ю.П. Динамика пузырей в магнитных псевдооживленных слоях // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 118–121.
8. Anderson T.B., Jackson R. A fluid mechanical description of fluidized beds. // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1967. V. 6. № 4. P. 527–538.
9. Бородуля В.А., Гупало Ю.П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника, 1976. 207 с.

10. *Гогосов В.В., Васильев Н.Л., Тактаров Н.Г., Шапошникова Г.А.* Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. М.: Изд-во МГУ, 1975. 48 с.
11. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
12. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.
13. *Буевич Ю.А., Гупало Ю.П.* О поверхностях разрыва в дисперсных системах // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 722–734.
14. *Davies R.M., Taylor G.* The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes // Proc. Roy. Soc. 1950. V. A200. № 1062. P. 375–390.
15. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
16. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фурбаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука. 1987. 384 с.

Нижний Новгород, Москва

Поступила в редакцию
16.IV.1992