

УДК 532.5

© 1993 г. А.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

**СТРУКТУРА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО  
ТЕЧЕНИЯ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ  
В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ**

Находится точное решение нестационарной задачи формирования течения на наклонной плоскости, компенсирующего диффузионный перенос в покоящейся бесконечно глубокой непрерывно-стратифицированной жидкости, плотность которой зависит только от концентрации растворенного вещества (солености).

В стратифицированной среде, плотность которой задается соответствующим устойчивым распределением солености (или температуры), устанавливается молекулярный поток стратифицирующей добавки. Если он неоднороден по горизонтали, то необходимое условие устойчивости покоящейся среды нарушается даже в отсутствие дестабилизирующих внешних факторов. Такая ситуация реализуется вблизи непроницаемой наклонной границы, на которой обращается в нуль нормальная компонента градиента стратифицирующей добавки, а следовательно, изохалины (изотермы), которые в невозмущенной среде расположены горизонтально, искривляются. Возникающий градиент давления в однородном поле тяжести ускоряет слой жидкости вдоль границы и формирует конвективный поток, компенсирующий ослабление молекулярного переноса у границы. Сам факт возникновения течения не зависит от формы границы. Математически задача имеет наиболее простой вид, когда бесконечно глубокая жидкость разделена на две области непроницаемой наклонной плоскостью. Течение является восходящим над плоскостью и нисходящим под ней.

Впервые на этот эффект обратил внимание Прандтль ([1], с. 507), анализируя природу горных и долинных ветров в температурно-стратифицированной атмосфере. Был проведен расчет [2, 3] стационарного течения в случае солевой стратификации, получены [4] асимптотические решения нестационарной задачи в пределах малых и больших времен.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается изначально покоящаяся неограниченная среда, линейно стратифицированная по вертикали; распределение плотности которой задается соотношением

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta S_i(z)), \quad \beta S_i(z) = -\sigma_0 z/\Lambda \quad (1.1)$$

Здесь  $z$  – вертикальная координата, направленная вдоль линии действия силы тяжести,  $\Lambda$  – масштаб стратификации,  $\beta = (\partial\rho/\partial S)_{T,p}$  – коэффициент солевого сжатия,  $\sigma_0$  – безразмерная постоянная,  $S$  – соленость,  $S_i(z)$  – невозмущенное распределение солености.

В начальный момент среда с распределением плотности (1.1) покоится, возмущение отсутствует. В плоской постановке ищется распределение соли и поле скоростей в последующие моменты времени. Система координат  $(\xi, \eta)$ ,  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\eta \in [0, +\infty)$  связана с плоскостью (фигура 1),  $\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту.

Система уравнений гидромеханики в приближении Буссинеска имеет вид

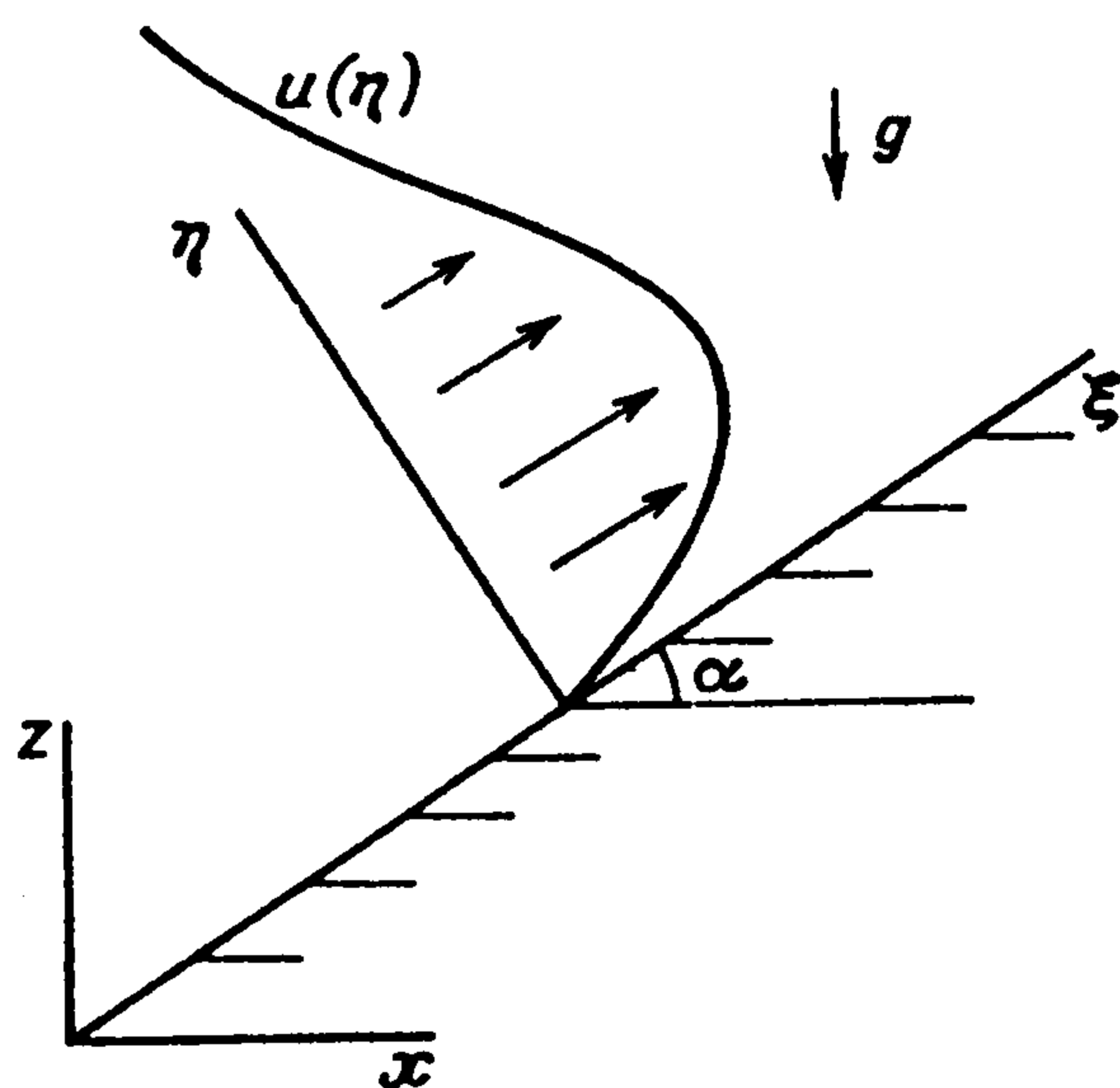
$$\begin{aligned} S'_t + uS'_\xi + vS'_\eta - \sigma_0 (u \sin\alpha + v \cos\alpha)/\Lambda &= k (S''_{\xi\xi} + S''_{\eta\eta}) \\ u'_t + uu'_\xi + vv'_\eta &= -p'_\xi + \nu (u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta}) - Sg \sin\alpha \\ v'_t + uv'_\xi + vv'_\eta &= -p'_\eta + \nu (v''_{\xi\xi} + v''_{\eta\eta}) - Sg \cos\alpha \quad u'_\xi + v'_\eta = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $S$  — возмущение начального распределения солености, нормированное на  $\beta$ ;  $u, v$  — компоненты скорости вдоль  $\xi$  и  $\eta$  соответственно;  $g$  — ускорение силы тяжести,  $p$  — давление за вычетом гидростатического, приведенное к  $\rho_0$ ;  $k, \nu$  — коэффициенты диффузии соли и кинематической вязкости.

На плоскости выполняется условие прилипания для скорости и непроницаемости для соли

$$(S_t + S)'_{\eta} = u = v = 0 \text{ при } \eta = 0$$

Начальные условия и условия на бесконечности состоят в равенстве нулю возмущений солености, давления и поля скоростей.



**2. Исследование возможных решений.** Некоторые свойства формы решения следуют из анализа задачи.

Поскольку решение системы (1.2) обладает трансляционной инвариантностью относительно сдвига оси  $\xi$ , его можно представить в виде разложения в ряд Фурье по этой переменной

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ U_n^c \cos \varphi_n(\xi, \eta) + U_n^s \sin \varphi_n(\xi, \eta) \} \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ V_n^c \cos \varphi_n(\xi, \eta) + V_n^s \sin \varphi_n(\xi, \eta) \} \\ S &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ S_n^c \cos \varphi_n(\xi, \eta) + S_n^s \sin \varphi_n(\xi, \eta) \} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi_n(\xi, \eta) = 2\pi n \xi / L$ ,  $L$  — период трансляции. При этом как  $L$ , так и коэффициенты Фурье в (2.1) — функции  $\eta, t$  и  $\alpha$ .

Исследование симметрии задачи по отношению к вариациям угла наклона  $\alpha$  приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} S_0(\alpha) &= S_0(-\alpha), \quad S_n^c(\alpha) = S_n^c(-\alpha), \quad S_n^s(\alpha) = -S_n^s(-\alpha) \\ U_0(\alpha) &= -U_0(-\alpha), \quad U_n^c(\alpha) = -U_n^c(-\alpha), \quad U_n^s(\alpha) = U_n^s(-\alpha) \\ V_n^c(\alpha) &= V_n^c(-\alpha), \quad V_n^s(\alpha) = -V_n^s(-\alpha) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1) в (1.1) позволяет получить громоздкую, но обозримую систему уравнений и граничных условий для коэффициентов Фурье. Уравнения, входящие в эту систему, нелинейные и потому нахождение решения каким-либо прямым методом затруднено. В этом случае естественно использовать метод

последовательных приближений. Система уравнений нулевого приближения имеет вид

$$S'_{0t} - \kappa S''_{0\eta\eta} = \sigma_0 U_0 \Lambda^{-1} \sin \alpha, \quad U'_{0t} - \nu U''_{0\eta\eta} = -S_0 g \sin \alpha \quad (2.3)$$

с граничными и начальными условиями

$$S'_{0\eta} = \sigma_0 \Lambda^{-1} \cos \alpha, \quad U_0 = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$S_0 = U_0 = 0 \quad \text{при } t = 0$$

При этом  $U_0, S_0$  — коэффициенты Фурье из разложений (2.1).

Для того чтобы избежать неравномерности решений по углу  $\alpha$ , функции  $U_0$  и  $S_0$  разлагаем в ряды Фурье, согласно свойствам (2.2)

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(n\alpha), \quad S_0 = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos(n\alpha) \quad (2.4)$$

где  $H_n, Q_n$  — функции  $\eta$  и  $t$ .

В результате подстановки (2.4) в (2.3) образуется бесконечная система уравнений для  $H_n, Q_n$

$$\begin{aligned} Q'_{nt} - \kappa Q''_{n\eta\eta} &= \sigma_0 (H_{n+1} - H_{n-1}) / (2\Lambda), \quad n = 0, 1, \dots; \quad H_0 = H_{-1} = 0 \\ H'_{nt} - \nu H''_{n\eta\eta} &= g (Q_{n-1} - Q_{n+1}) / 2, \quad n = 2, 3, \dots \\ H'_{1t} - \nu H''_{1\eta\eta} &= g (2Q_0 - Q_2) / 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом

$$H_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{при } \eta = 0,$$

$$Q'_{1\eta} = \sigma_0 / \Lambda, \quad Q'_{n\eta} = 0, \quad n \neq 1 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$H_n = Q_n = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Из (2.5) и граничных и начальных условий следует

$$Q_{2n} = H_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

В результате разложения (2.4) приобретает вид

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin 2n\alpha, \quad S_0 = \sum_{n=2}^{\infty} K_n \cos(2n-1)\alpha$$

Здесь удобно перейти к безразмерным физическим координатам нормировав время на частоту плавучести  $N = (g/\Lambda)^{1/2}$ , координаты — на масштаб  $(\nu/N)^{1/2}$ , скорость — на  $(\Lambda g)^{1/2}$ , соленость — на  $\sigma_0/2$ . Кроме того, вводятся два безразмерных параметра:  $A = -\sigma_0/4$  и  $\epsilon = \kappa/\nu$ . Тогда для функций  $M_n, K_n$  имеют место уравнения

$$\begin{aligned} K'_{nt} - \epsilon K''_{n\eta\eta} &= M_n - M_{n-1} \\ M'_{nt} - M''_{n\eta\eta} &= A (K_n - K_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad M_0 = 0 \\ M_n = K'_{2\eta} = \dots = K'_{n\eta} = \dots &= 0, \quad K'_{1\eta} = 2 \sqrt{\nu / (N\Lambda^2)} \quad \text{при } \eta = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для того чтобы реализовать итерационную процедуру нахождения коэффициентов  $\{M_i\}, \{K_i\}$ , необходимо провести замену переменных, позволяющую разделить переменные.

3. Решение задачи в нулевом приближении. На первом этапе решения совершается переход от переменных  $\{M_i\}, \{K_i\}$  к переменным  $\{\mu_i\}, \{\kappa_i\}$  по пра-

видам

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= K_1 + K_2 + K_3 + \dots, \quad \mu_1 = M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \dots \\ \kappa_2 &= K_2 + 3K_3 + 6K_4 + \dots, \quad \mu_2 = M_2 + 4M_3 + 10M_4 + \dots \\ \kappa_3 &= K_3 + 5K_4 + 15K_5 + \dots, \quad \mu_3 = M_3 + 6M_4 + 21M_5 + \dots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Коэффициенты в этих бесконечных разложениях определяются с помощью треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \kappa_1 \\ & & & & & & \searrow 1 \\ & & & & & & \mu_1 \\ & & & & & & \searrow 1 & 1 \\ & & & & & & \kappa_2 \\ & & & & & & \searrow 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & \mu_2 \\ & & & & & & \searrow 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & & \kappa_3 \\ & & & & & & \searrow 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \dots \end{array}$$

В результате такой замены система (2.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \kappa_n' - \epsilon \kappa_n'' &= \mu_{n-1} \\ \mu_n' - \mu_n'' &= A \kappa_n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \mu_0 = 0; \\ \mu_n = \kappa_{2n}' &= \dots = \kappa_n' = \dots = 0, \quad \kappa_{1n}' = 2 \sqrt{\nu/(N\Lambda^2)} \text{ при } \eta = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Последовательное интегрирование (3.2) с помощью функций Грина порождает большие технические трудности. Поэтому для получения явного вида решения проводится второй этап, на котором определяется набор допускаемых системой (3.2) инфинитезимальных операторов

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n \partial_{\kappa_n} + \mu_n \partial_{\mu_n}), \\ \omega_2 &= 2t \partial_t + \eta \partial_\eta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [2(n-1) \kappa_n \partial_{\kappa_n} + (2n-1) \mu_n \partial_{\mu_n}] \\ \{ \nu_m &= \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_n \partial_{\kappa_{n+m}} + \mu_n \partial_{\mu_{n+m}}), \quad m = 1, 2, \dots \} \end{aligned}$$

После этого определяются групповые инварианты линейной комбинации  $\omega_1 + \omega_2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \nu_m$ , в результате чего решение системы (3.2) представляется

в виде

$$\kappa_n = R_n(y) t^{(4n-3)/2}, \quad \mu_n = T_n(y) t^{(4n-1)/2}; \quad y = \eta/t^{1/2} \quad (3.3)$$

Подстановка (3.3) в (3.2) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой описывается выражениями

$$R_n = \sum_{m=1}^n \alpha_m^n U\left(q - \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2\epsilon}}\right) + \sum_{m=1}^{n-1} \beta_m^n U\left(q - \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.4)$$

$$T_n = \sum_{m=1}^n \gamma_m^n U\left(q + \frac{3}{2}, \frac{y}{\sqrt{2\epsilon}}\right) + \sum_{m=1}^n \delta_m^n U\left(q + \frac{3}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(q = 4n - 2m, U(n + \frac{1}{2}, x) = \frac{1}{n!} \int_x^{\infty} (\xi - x)^n \exp(-\xi^{1/2}) d\xi)$$

Коэффициенты  $\alpha_m^n$ ,  $\beta_m^n$ ,  $\gamma_m^n$  и  $\delta_m^n$  определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= -4(k/\pi)^{1/2} (g \Lambda^3)^{-1/4} \\ m\alpha_{m+1}^n &= \gamma_m^{n-1}, \quad m\delta_{m+1}^n = A\beta_m^n, \quad m\gamma_{m+1}^n + (\epsilon - 1)\gamma_m^n / (2\epsilon) = A\alpha_m^n \\ m &= 1, 2, \dots, n-1; \quad n = 2, 3, \dots \\ m\beta_{m+1}^n + (1 - \epsilon)\beta_m^n / 2 &= \delta_m^{n-1}, \quad m = 1, 2, \dots, n-2; \quad n = 3, 4, \dots \\ (1 - \epsilon)\beta_{n-1}^n / 2 &= \delta_{n-1}^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \\ (\epsilon - 1)\gamma_n^n / (2\epsilon) &= A\alpha_n^n, \quad n = 1, 2, \dots \\ 2^n \alpha_n^n + \sum_{m=1}^{n-1} 2^m \{ \alpha_m^n + \epsilon^{1/2} \beta_m^n \} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n-m)} &= 0, \quad n = 2, 3, \dots \\ \sum_{m=1}^n \frac{2^m \{ \gamma_m^n + \delta_m^n \}}{\Gamma(2n-m+3/2)} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь, после того как определены функции  $R_n$  и  $T_n$ , а следовательно, и  $\kappa_n$ ,  $\mu_n$ , необходимо, используя соотношения (3.1), определить  $K_n$  и  $M_n$ , являющиеся коэффициентами в разложениях для  $S_0$  и  $U_0$ .

Обращение соотношений (3.1) дает

$$\begin{aligned} K_1 &= \kappa_1 - \kappa_2 + 2\kappa_3 - 5\kappa_4 + \dots, \quad M_1 = \mu_1 - 2\mu_2 + 5\mu_3 - \dots \\ K_2 &= \kappa_2 - 3\kappa_3 + 9\kappa_4 - \dots, \quad M_2 = \mu_2 - 4\mu_3 + 14\mu_4 - \dots \\ K_3 &= \kappa_3 - 5\kappa_4 + 20\kappa_5 - \dots, \quad M_3 = \mu_3 - 6\mu_4 + 27\mu_5 - \dots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Коэффициенты в разложениях (3.6) определяются посредством треугольника типа треугольника Паскаля, в котором разность между правым и левым элементами строки определяет значение находящегося между ними элемента в нижележащей строке:

$$\begin{array}{cccc} & & & \downarrow K_1 \\ & & & M_1 \downarrow \\ & & & K_2 \downarrow 1 \\ & & & M_2 \downarrow 1 \quad 0 \\ & & & K_3 \downarrow 1 \quad -1 \\ & & & \downarrow 1 \quad -2 \quad 0 \\ & & & 1 \quad -3 \quad 2 \\ & & & 1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Таким образом, получено решение системы (2.3), удовлетворяющее соответствующим граничным и начальным условиям.

4. Анализ решения. Важным свойством полученных решений является то, что они одновременно являются точными решениями нелинейной системы (1.2) с приведенными граничными и начальными условиями, что позволяет на новой основе проводить сравнение с результатами работ [1-3].

Характер решения определяется структурой функций  $U$  из (3.4)

$$U\left(2n - \frac{1}{2}, x\right) = e^{-x^2} \sum_{m=0}^n a_m^n x^{2m} + x \operatorname{erfc}(x) \sum_{m=0}^n b_m^n x^{2m}$$

где явный вид коэффициентов  $a_m^n$ ,  $b_m^n$  определяется видом интегрального представления для  $U$ . На основании этого можно утверждать, что возмущение поля скоростей и вариации плотности в пограничном течении являются монотонными функциями времени, не имеющими стационарного предела. Распределение скорости — знакопостоянная функция, в отличие от [1–3], где решение включает противотечения.

Анализ позволяет выделить два зависящих от времени масштаба, характеризующих пространственное распределение возмущений скорости и плотности (солености).

Вдали от стенки, ( $\infty > \eta > \sqrt{2\nu t}$ ) все возмущения малы.

В промежуточной области ( $\sqrt{2\nu t} > \eta > \sqrt{2kt}$ ) возмущения скорости достигают максимального значения, вариации плотности малы. По аналогии с [1] эта область может быть названа динамическим (или скоростным) пограничным слоем, толщина которого  $\delta_u \sim \sqrt{2\nu t}$ .

В третьей области, непосредственно прилегающей к плоскости при  $\nu/k > 1$ ,  $\sqrt{2kt} > \eta \geq 0$ , возмущения солености имеют максимальное значение. Вариации скорости менее значительны, чем во второй области. Эта часть течения может быть названа концентрационным (или плотностным) пограничным слоем, с толщиной  $\delta_p \sim \sqrt{2kt}$  [5].

Отношение характерных размеров этих областей не зависит от времени и определяется величиной числа Шмидта:  $\delta_u/\delta_p = \sqrt{\nu/k} = \sqrt{Sc}$ . Плотностной пограничный слой лежит внутри динамического слоя при  $Sc > 1$  (растворы солей металлов, морская вода [6]). Динамический слой является более тонким в атмосфере, в расплавах металлов, в ртути ( $Sc < 1$ ). Можно предположить, что в многокомпонентной среде число таких слоев и отношения их масштабов будет определяться числом и значениями коэффициентов переноса (стационарное решение [1–3] одномасштабное, распределения возмущений солености и скорости подобны). Точное решение согласуется с известными решениями уравнения теплопроводности в покоящейся среде при  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pm\pi/2$ . Скорость индуцированного течения максимальна при  $\alpha = \pi/4$ .

Первые члены решения (3.4)

$$S = \frac{\sigma_0}{\Lambda} \sqrt{\frac{kt}{\pi}} \left\{ \sqrt{\pi\epsilon} y \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\epsilon}}\right) - 2 \exp\left(-\frac{y^2}{4\epsilon}\right) \right\} \cos\alpha$$

$$U = \frac{2gt}{\Lambda(1-\epsilon)} \sqrt{\frac{kt}{\pi}} \left\{ \frac{2}{3} \left(1 + \frac{y^2}{4}\right) \exp\left(\frac{y^2}{4}\right) - \frac{y\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{y^2}{6}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{y^2}{4\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4\epsilon}\right) + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \left(1 + \frac{y^2}{6\epsilon}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\epsilon}}\right) \right\} \sin 2\alpha$$

на малых временах согласуются с однокомпонентным приближением асимптотического решения [4]. Полученное решение (3.4) аналитично по всем физическим параметрам задачи.

Существенной особенностью использованного метода построения точного решения оказывается то, что приближенные решения, содержащие конечное число слагаемых в (3.4), также точно удовлетворяют граничным и начальным условиям. Это свойство является важным, поскольку возникновение течения обусловлено именно влиянием границы. Поскольку разложения (3.4) в фиксированный момент времени сходятся достаточно быстро, при количественном

и качественном анализе можно обойтись только несколькими главными членами.

Неограниченный рост решения со временем указывает на возможность нарушения условий приближения Буссинеска на больших временах и необходимость учета конечных размеров реальных физических систем.

Сопоставление с высокоразрешающими наблюдениями стратифицированных течений [5, 7, 8], показывает, что эффекты расщепления масштабов, которые оказывают существенное влияние на структуру и симметрию спутных течений в непосредственной окрестности и на больших удалениях от тела, обусловлены сносом расщепленного пограничного слоя и вызваны прерыванием фонового молекулярного потока покоящимся или движущимся препятствием [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. С. 507–511.
2. *Phillips O.M.* On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // *Deep Sea Res.* 1970. V. 17. No. 2. P. 435–443.
3. *Wunsch C.* On Oceanic boundary mixing // *Deep Sea Res.* 1970. V. 17. No. 2. P. 293–301.
4. *Linden P.F., Weber J.E.* The formation of layers in a double-diffusive system with a sloping boundary // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 81. Pt 4. P. 757–773.
5. *Чашечкин Ю.Д., Попов В.А.* Методы лабораторного моделирования конвективных процессов в неоднородных системах в условиях нормальной и пониженной гравитации // *Гидромеханика и теплообмен в невесомости.* М.: Наука, 1982. С. 119–146.
6. *Попов Н.И., Федоров К.Н., Орлов В.М.* Морская вода. М.: Наука, 1979. 327 с.
7. *Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д.* Пространственная структура следа за сферой в стратифицированной жидкости // *ПМТФ.* 1988. № 5. С. 59–65.
8. *Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика сферы в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. № 1. С. 3–9.
9. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // *Докл. РАН.* 1992. Т. 325. № 4. С. 833–837.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VII.1992