УДК 531.36:534.1

© 1993 г. П.С. Красильников

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1:1

Исследуется асимптотическая устойчивость системы с двумя степенями свободы в критическом случае двух пар чисто мнимых собственных значений при резонансе 1:1. Предполагается, что кратным собственным значениям соответствуют простые элементарные делители. Построены алгебраические критерии асимптотической устойчивости полной системы по модельным уравнениям третьего приближения при условии, что область исследований ограничена некоторым подмногообразием положительной меры в пространстве параметров модельных уравнений. Получены также некоторые достаточные условия неустойчивости полной системы.

Теория кратного резонанса негамильтоновых уравнений разработана для обратимой системы [1], а также для системы общего вида в случае, когда собственным значениям отвечают непростые элементарные делители [2]: положение равновесия, как правило, неустойчиво. Если же матрица линейной части этой системы приводится к диагональному виду (простые элементарные делители), то решение задачи о построении критериев устойчивости отсутствует. Известно, что задача эта трансцендентна [3]: в 24-мерном вещественном пространстве параметров поверхность, разделяющая классы асимптотически устойчивых и неустойчивых систем, трансцендентна.

Ниже показано, что эта трансцендентность не препятствует получению алгебраических критериев асимптотической устойчивости (поверхность раздела содержит алгебраические куски).

1. Постановка задачи. Построение функции Ляпунова. Рассмотрим автономную систему вида

$$\mathbf{x}^{\bullet} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^4 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ – гладкое векторное поле, при этом матрица $(\partial \mathbf{X}/\partial \mathbf{x})_0$ имеет чисто мнимые собственные значения λ_1, λ_2, удовлетворяющие резонансному соотношению $\lambda_1 = \lambda_2$. Предположим, что λ_1 имеет простые элементарные делители. Комплексная нормальная форма уравнений третьего приближения имеет вид

$$\begin{aligned} z_1^{\bullet} &= \lambda_1 z_1 + A_{11} z_1^2 \bar{z}_1 + A_{12} z_1 z_2 \bar{z}_2 + A_1 z_1 \bar{z}_1 z_2 + \\ &+ A_2 z_1^2 \bar{z}_2 + A_3 z_2^2 \bar{z}_2 + A_4 z_2^2 \bar{z}_1 \\ z_2^{\bullet} &= \lambda_1 z_2 + A_{21} z_1 \bar{z}_1 z_2 + A_{22} z_2^2 \bar{z}_2 + A_5 z_1^2 \bar{z}_1 + A_6 z_1 z_2 \bar{z}_2 + A_7 z_1^2 \bar{z}_2 + A_8 \bar{z}_1 z_2^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 + ix_4, \quad A_{lm} = a_{lm} + ib_{lm}$$
$$A_m = a_m + ib_m$$

Устойчивость системы (1.2) эквивалентна устойчивости системы с тремя переменными, полученной из (1.2) переходом к полярным координатам r_j, θ_j

($\theta = \theta_2 - \theta_1$ – резонансный угол):

$$r_j^{\bullet} = R_j(r_1, r_2, \theta), \quad \theta^{\bullet} = \Omega(r_1, r_2, \theta), \; j = 1, 2 \tag{1.3}$$

$$(z_j = \sqrt{r_j}\exp(i\theta_j), \quad \bar{z}_j = \sqrt{r_j}\exp(-i\theta_j))$$

Здесь

$$^1/_2 R_1 = a_{11}r_1^2 + a_{12}r_1 r_2 + r_1\sqrt{r_1 r_2}\,[(a_1 + a_2)\cos\theta + (b_2 - b_1)\sin\theta] +$$
$$+ r_2\sqrt{r_1 r_2}\,(a_3\cos\theta - b_3\sin\theta) + r_1 r_2(a_4\cos 2\theta - b_4\sin 2\theta)$$
$$^1/_2 R_2 = a_{21}r_1 r_2 + a_{22}r_2^2 + r_2\sqrt{r_1 r_2}\,[(a_6 + a_8)\cos\theta + (b_6 - b_8)\sin\theta] +$$
$$+ r_1\sqrt{r_1 r_2}\,(a_5\cos\theta + b_5\sin\theta) + r_1 r_2(a_7\cos 2\theta + b_7\sin 2\theta).$$

Явное выражение для функции Ω не приводим, отметим только, что Ω – тригонометрический полином второго порядка, коэффициенты которого – однородные (степени единица) функции r_1, r_2.

Для построения искомой функции Ляпунова воспользуемся идеей функциональных продолжений интегральной связки системы сравнения. Основой этого подхода служит исследование гироскопических систем с полной диссипацией при помощи связки из полной энергии и продолженных циклических интегралов[1]. Этот метод применялся [4, 5] при исследовании устойчивости гироскопа с сухим трением: интегральная связка системы дополнялась некоторой вспомогательной функцией фазовых переменных. Затем было показано [6, 7], что продолженная полная интегральная связка порождает функциональные расширения всего множества первых интегралов системы сравнения.

Выберем в качестве уравнений сравнения модельную систему

$$r_1^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \quad r_2^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial \theta_2}, \quad \theta^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial r_1} - \frac{\partial H}{\partial r_2}$$
$$H = \lambda_1(r_1 + r_2) + {}^1/_2(b + b_{21} - b_{11})r_1^2 + b r_1 r_2 + {}^1/_2(b - b_{22} + b_{12}) \times \tag{1.4}$$
$$\times\, r_2^2 - 2(b_5 r_1 + b_3 r_2)\sqrt{r_1 r_2}\cos\theta + 2(a_5 r_1 - a_3 r_2) \times$$
$$\times \sqrt{r_1 r_2}\sin\theta - r_1 r_2(b_4\cos 2\theta + a_4\sin 2\theta)$$

исследованную ранее [8, 9] и являющуюся частным случаем уравнений (1.3). Здесь H – нормальная форма функции Гамильтона при кратном резонансе. Уравнения (1.4) интегрируются: функция $\mathbf{W} + C_3$, где

$$\mathbf{W} = C_1[H - \lambda_1(r_1 + r_2)] + C_2(r_1 + r_2)^2, \quad C_j = \text{const}$$

является полной интегральной связкой, так как $H = h$, $r_1 + r_2 = c$ – первые интегралы этой системы. Рассмотрим функциональное продолжение $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0(r_1, r_2, \theta, \mathbf{d}) + d_m$ ($\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_{m-1})$ – вектор произвольных постоянных, $m > 3$) интеграла $\mathbf{W} + C_3$, которое определим так [7]: $\mathbf{V}$ – гладкое семейство функций, частным случаем которого является семейство $\mathbf{W} + C_3$, т.е. $\mathbf{W} = \mathbf{V}^0|_{\mathbf{p}^{(2)}}$, где $\mathbf{p}^{(2)} = (\varphi_1(C_1, C_2), \ldots, \varphi_{m-1}(C_1, C_2))$ – регулярная параметризованная 2-поверхность в пространстве произвольных постоянных $d_1, \ldots, d_{m-1}$.

---

[1]*Матросов В.М.* Некоторые вопросы устойчивости гироскопических систем: Дис. ... канд. техн. наук: 05.11.03. Казань, 1959. 102 с.

Очевидно, выражение

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} = & D_{11}r_1^2 + 2D_{12}r_1r_2 + D_{22}r_2^2 + 2r_1\sqrt{r_1r_2}\,(D_1\cos\theta + \\
& + D_2\sin\theta) + 2r_2\sqrt{r_1r_2}\,(D_3\cos\theta + D_4\sin\theta) + \\
& + 2r_1r_2(D_5\cos 2\theta + D_6\sin 2\theta) + D_7
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

удовлетворяет этому определению (D_j, D_{ij} = const).

Вычислим производную от $\mathbf{V}$ вдоль векторного поля уравнений (1.3):

$$
\dot{\mathbf{V}} = r_2^3[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{3}(\gamma_{n1}\cos n\theta + \gamma_{n2}\sin n\theta)]
$$

$$
\gamma_0 = G_0k^3 + G_1k^2 + G_2k + G_3, \quad \gamma_{1m} = 2\sqrt{k}(B_{1m}k^2 + B_{2m}k + B_{3m})
$$

$$
\gamma_{2m} = 2k(C_{1m}k + C_{2m}), \quad \gamma_{3m} = 2k^{3/2}F_m \quad (m = 1, 2)
$$

где $k = r_1/r_2$ — переменный параметр, коэффициенты G_j, B_{ij}, C_{ij}, F_m линейно зависят от произвольных постоянных D_{ij}, D_j и параметров задачи. Так, например,

$$
G_0 = 4a_{11}D_{11} + 2a_5D_1 + 2b_5D_2, \quad G_3 = 4a_{22}D_{22} + 2a_3D_3 - 2b_3D_4
$$

(выражения для остальных коэффициентов приведены в приложении). Постоянные D_{ij}, D_j выберем так, чтобы множители при $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ обратились в нуль, т.е. подчиним эти числа условиям $C_{1m} = C_{2m} = F_m = 0$ ($m = 1, 2$). Потребуем также выполнения равенства $B_{2m} = 0$, упрощающего коэффициенты при $\cos\theta$, $\sin\theta$. Будем иметь

$$
\mathbf{AD} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{D} = (D_{11}, \ldots, D_5)^T \tag{1.6}
$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{R}$ — матрицы 8×8, 8×1 соответственно, элементы которых — линейные функции параметров задачи. Величина D_6 входит сомножителем в правую часть уравнений (1.6). Поэтому она не играет существенной роли и, следовательно, ее можно считать равной единице. Предположим, что $\det\mathbf{A} \neq 0$. Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{D}^*$ — семейство решений уравнений (1.6), зависящее от параметров задачи. Рассмотрим функцию Ляпунова $\mathbf{V}^*$, где $\mathbf{V}^*$ — ограничение $\mathbf{V}$ на это семейство.

2. Критерии знакоопределенности $\mathbf{V}^*$ и $\dot{\mathbf{V}}^*$. Видно, что

$$
\dot{\mathbf{V}}^* = r_2^3[\gamma_0^* + \gamma_{11}^*\cos\theta + \gamma_{12}^*\sin\theta]
$$

$$
\gamma_0^* = G_0^*k^3 + G_1^*k^2 + G_2^*k + G_3^*, \quad \gamma_{1m}^* = 2\sqrt{k}\,(B_{1m}^*k^2 + B_{3m}^*)
$$

$$
(m = 1, 2)
$$

Пусть $G_0^* \neq 0$, $G_3^* \neq 0$. Функция $\dot{\mathbf{V}}^*$ знакоопределена в конусе $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0^{*2} > \gamma_{11}^{*2} + \gamma_{12}^{*2}$ при любом $k > 0$ (это неравенство сохраняет силу и при $k = 0$, $k = \infty$, так как на плоскостях $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ функция $\dot{\mathbf{V}}^*$ отлична от нуля). Отсюда следует, что условие отсутствия положительных корней уравнения

$$
\gamma_0^{*2} - \gamma_{11}^{*2} - \gamma_{12}^{*2} = 0 \tag{2.1}
$$

является необходимым и достаточным для знакоопределенности $\dot{\mathbf{V}}^*$ в этом конусе.

Получим критерии знакоопределенности $\mathbf{V}^*$ в области $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Всюду ниже будем считать, что $D_{11}^* \neq 0$, $D_{22}^* \neq 0$. Приведем функцию $\mathbf{V}^*$

к виду

$$V^{*} = r_2^2[\lambda_0 + \lambda_1\cos\theta + \mu_1\sin\theta + \lambda_2\cos2\theta + \mu_2\sin2\theta] \tag{2.2}$$

$$\lambda_0 = D_{11}^{*}k^2 + 2D_{12}^{*}k + D_{22}^{*}, \quad \lambda_1 = 2\sqrt{k}(D_1^{*}k + D_3^{*}) \tag{2.3}$$

$$\mu_1 = 2\sqrt{k}(D_2^{*}k + D_4^{*}), \quad \lambda_2 = 2D_5^{*}k, \quad \mu_2 = 2k, \; k = r_1/r_2$$

Преобразуем тригонометрический полином, входящий в правую часть выражения (2.2) при помощи подстановки $y = \mathrm{tg}(\theta/2)$. Будем иметь

$$V^{*} = r_2^2\Lambda(y)(1+y^2)^{-2}$$
$$\Lambda(y) = L_4y^4 + L_3y^3 + L_2y^2 + L_1y + L_0 \tag{2.4}$$

$$L_4 = \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2, \quad L_3 = 2(\mu_1 - 2\mu_2), \quad L_2 = 2(\lambda_0 - 3\lambda_2)$$

$$L_1 = 2(\mu_1 + 2\mu_2), \quad L_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \tag{2.5}$$

Очевидно, что в особом случае $\theta = \pi$, отвечающем вырождению введеной замены переменных, функцию V^{*} можно вычислить по формуле

$$V^{*} = r_2^2L_4 \tag{2.6}$$

Она равна нулю, если $L_4 = 0$, но тогда один из корней многочлена $\Lambda(y)$ "удаляется" на бесконечность. Из выражений (2.4), (2.6) следует, что функция V^{*} знакоопределена в области $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi$ тогда и только тогда, когда при любом $k > 0$ полином $\Lambda(y)$ не имеет вещественных корней, включая и бесконечно удаленную точку (на плоскостях $r_1 = 0, r_2 = 0$ функция V^{*} отлична от нуля, так как $D_{11}^{*} \neq 0, D_{22}^{*} \neq 0$).

Отметим, что появление простых вещественных корней у многочлена $\Lambda(y)$ приводит к перемене знака функции V^{*}. Однако в случае кратных корней V^{*} может сохранять знак. В дальнейшем исключим эту ситуацию, потребовав, чтобы дискриминант полинома $\Lambda(y)$ не равнялся нулю для тех значений параметра k, при которых этот полином имеет вещественные корни.

3. Критерии асимптотической устойчивости. Неустойчивость. Получим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости, предполагая, что в исследуемой области пространства параметров функция $V^{\cdot *}$знакоопределена.

Пусть $\mathbf{A}$ – матрица линейной системы (1.6), D_{ij}^{*}, D_j^{*} – параметры функции V, удовлетворяющие уравнениям (1.6), G_j^{*}, B_{ij}^{*} – соответствующие значения коэффициентов, входящих в производную $V^{\cdot *}$; L_j вычисляются по формулам (2.3), (2.5). Положим $k = r_1/r_2$ и будем считать, что $F(k)$ – дискриминант полинома $\Lambda(y)$, π – множество положительных значений параметра k, при которых этот полином имеет вещественные корни. Условие $F|_\pi \neq 0$ (соответственно $L_3|_{L_4=0} \neq 0$ для бесконечно удаленной точки) гарантирует отсутствие кратных корней у полинома $\Lambda(y)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\det\mathbf{A} \neq 0, G_0^{*} \neq 0, G_3^{*} \neq 0, D_{11}^{*} \neq 0, D_{22}^{*} \neq 0, F|_\pi \neq 0, L_3|_{L_4=0} \neq$ $\neq 0, G_0^{*}D_{11}^{*} < 0$ и при этом вещественное алгебраическое уравнение (2.1) не имеет положительных корней. Положение равновесия полной системы (1.1) асимптотически устойчиво, если при любом $k > 0$ полином $\Lambda(y)$ не имеет вещественных корней, включая бесконечно удаленную точку. В противном случае, когда для некоторого $k > 0$ этот полином имеет хотя бы один вещественный корень, равновесие неустойчиво.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $V^{\cdot *}$знакоопределена в области $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi$ (члены более высокого порядка малости, отброшенные при выводе модельных уравнений (1.2), не влияют на знак $V^{\cdot *}$, так как функция V^{*} и правые части уравнений (1.2) – однородные полиномы по $z_j, \bar{z}_j$). Очевидно, $\mathrm{sign}V^{\cdot *} = \mathrm{sign}G_0^{*}$. Если полином $\Lambda(y)$ не имеет вещественных корней, то функция $\mathbf{V}^*$ также знакоопределена в этой области, и $\mathrm{sign}\mathbf{V}^* = \mathrm{sign}D_{11}^*$. Из условия $G_0^*D_{11}^* < 0$ следует, что $\mathbf{V}^*\dot{\mathbf{V}}^* < 0$, поэтому $\mathbf{V}^*$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В противном случае, когда для некоторого $k > 0$ полином $\Lambda(y)$ имеет хотя бы один вещественный корень, $\dot{\mathbf{V}}^*$ – знакопеременная функция, поэтому выполняются условия теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Очевидно, в теореме 1 речь идет об алгебраических критериях устойчивости полной системы в области $\mathbf{V}^{\cdot *} > 0$, так как условия отсутствия вещественных корней у полинома $\Lambda(y)$ при любом $k > 0$ имеют алгебраический вид ([10], с. 249).

Предположим, что в области знакоопределенности $\mathbf{V}^{\cdot *}$ параметры G_0^*, D_{11}^* удовлетворяют условию $G_0^*D_{11}^* > 0$. Это значит, что функция $\mathbf{V}^{\cdot *}$принимает в окрестности $r_1 = r_2 = 0$ значения одного знака с $\mathbf{V}^{\cdot *}$, поэтому положение равновесия неустойчиво в силу теоремы Ляпунова о неустойчивости. Итак, справедлива.

Теорема 2. Пусть $\det\mathbf{A} \neq 0$, $G_0^* \neq 0$, $G_3^* \neq 0$, $D_{11}^* \neq 0$, $D_{22}^* \neq 0$, $G_0^*D_{11}^* > 0$ и при этом уравнение (2.1) не имеет положительных корней. Тогда положение равновесия полной системы (1.1) неустойчиво.

Очевидно, последние две теоремы полностью решают задачу устойчивости системы (1.1) в области $\mathbf{V}^{\cdot *} > 0$.

Эти результаты можно дополнить, если рассмотреть еще одну функцию $\mathbf{V}^{**}$, отличающуюся от $\mathbf{V}^*$ значениями постоянных D_{ij}, D_j. Для этого следует упростить производную $\dot{\mathbf{V}}$, приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$: $B_{km} = 0$, $F_m = 0$ $(m = 1, 2; k = 1, 2, 3)$. Получим совокупность линейных уравнений, аналогичную (1.6):

$$\mathbf{BD} = \mathbf{S} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{D}$ имеет прежний смысл, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S}$ – матрицы 8X8, 8X1, элементы которых – линейные функции параметров задачи, $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$.

Пусть $\det\mathbf{B} \neq 0$, $\mathbf{V}^{**}$ – ограничение $\mathbf{V}$ на семейство решений уравнений (3.1). Производная $\dot{\mathbf{V}}^{**}$ знакоопределена тогда и только тогда, когда уравнение

$$(G_0^{**}k^3 + G_1^{**}k^2 + G_2^{**}k + G_3^{**})^2 - 4k^2[(C_{11}^{**}k + C_{21}^{**})^2 + (C_{12}^{**}k + C_{22}^{**})^2] = 0$$

не имеет положительных корней. Повторяя предыдущие рассуждения, получим еще две теоремы, аналогичные теоремам 1, 2.

Отметим, что если функцию (1.5) записать в исходных комплексных переменных, то она примет вид однородного полинома четвертой степени, инвариантного относительно преобразований $\mathbf{z} \to \mathbf{z}\exp(i\alpha)$, где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, α – параметр. При построении функции Ляпунова в виде однородного полинома второго порядка были получены некоторые необходимые условия устойчивости при кратном резонансе, а также отдельные достаточные условия[1].

4. Критерии существования инвариантных лучей. Неустойчивость по Ляпунову. Известно, что асимптотические к нулю решения играют важную роль при решении задачи устойчивости. Получим условия существования инвариантных лучей системы (1.3), т.е. частных решений вида

$$r_1 = kr_2, \quad \theta = \theta^* \tag{4.1}$$

где k, θ^* – постоянные величины. Для этого следует подставить (4.1) в уравнения (1.3) и заменой $z = \exp(i\theta)$ привести полученные уравнения к виду

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \bar{v}_1 z^3 + \bar{v}_0 z^4 = 0 \\ f_2 &\equiv w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \bar{w}_1 z^3 + \bar{w}_0 z^4 = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] *Хазина Г.Г., Хазин Л.Г.* О возможности резонансной стабилизации системы осцилляторов: Препринт № 130. М.: ИПМ АН СССР. 1978. 17 с.

Здесь

$$v_0 = \tfrac{1}{2}[(a_4 - ka_7) - i(b_4 + kb_7)], \quad v_2 = (a_{11} - a_{21})k + (a_{12} - a_{22})$$

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{k}} \{[-a_5k^2 + (a_1 + a_2 - a_6 - a_8)k + a_3] - i[b_5k^2 + (b_6 - b_8 + b_1 -$$

$$- b_2)k + b_3]\}$$

Коэффициенты w_0, w_1, w_2 имеют в точности такой же вид, но с учетом замены $a_j \to -b_j$, $b_j \to a_j$, $a_{lm} \to -b_{lm}$.

Необходимые и достаточные условия совместности системы (4.2) выражаются равенством

$$\mathbf{R} = 0 \qquad (4.3)$$

где $\mathbf{R}$ – результант полиномов f_1, f_2. Видно, что $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}}$. Результант приводится к вещественному полиному от k, порядок которого равен 14. Итак, вычисление параметра k сводится к нахождению положительных корней уравнения (4.3). При этих значениях параметра k система (4.2) допускает решения, принадлежащие единичной окружности, тогда и только тогда, когда многочлен

$$g_0(k) + g_1(k)z + \ldots + g_m(k)z^m \qquad (m \leqslant 4) \qquad (4.4)$$

являющийся нетривиальным наибольшим общим делителем f_1 и f_2, имеет нули $\zeta_l = \exp(i\theta_l)$. Полином (4.4) строится с помощью алгоритма Евклида, основанного на делении многочленов с остатком. Итак, справедлива

Лемма. Уравнения (1.3) допускают частное решение вида $r_1 = kr_2, \theta = \theta^*$ тогда и только тогда, когда k – положительный корень уравнения (4.3), а $\zeta = \exp(i\theta^*)$ – корень полинома (4.4).

Получим условия неустойчивости системы (1.3). Для этого подсчитаем значение производной $r_2^{\cdot}$ вдоль инвариантного луча $r_1 = kr_2$, $\theta = \theta^*$:

$$r_2^{\cdot} = r_2^2 R_2(k, 1, \theta^*)$$

Очевидно, тривиальное решение неустойчиво, если $R_2(k, 1, \theta^*) > 0$. Неустойчивость сохранится в полной системе [11]. Таким образом, справедлива

Теорема 3. Если уравнения (1.3) допускают семейство частных решений вида $r_1 = k_j r_2$, $\theta = \theta_l^*$ и при этом $R_2(k_j, 1, \theta_l^*) > 0$ для некоторых значений параметров k, θ^* из этого семейства, то система (1.1) неустойчива по Ляпунову.

Приложение. Выражения для коэффициентов функции $\mathbf{V}^{\cdot}$:

$$G_1 = 4a_{12}D_{11} + 4(a_{11} + a_{21})D_{12} + 2(2a_1 + a_2 + a_6)D_1 +$$
$$+ 2(b_2 + b_6 - 2b_1)D_2 + 4a_8D_3 + 4b_8D_4 + 4a_7D_5 + 4b_7D_6$$

$$G_2 = 4(a_{12} + a_{22})D_{12} + 4a_{21}D_{22} + 4a_3D_1 - 4b_3D_2 +$$
$$+ 2(a_1 + 2a_6 + a_8)D_3 + 2(2b_6 - b_1 - b_8)D_4 + 4a_4D_5 - 4b_4D_6$$

$$B_{11} = 2(a_1 + a_2)D_{11} + 2a_8D_{12} + (3a_{11} + a_{21} + a_7)D_1 + (b_{21} - b_{11} + b_7)D_2 + 2a_5D_5 + 2b_5D_6$$

$$B_{21} = 2a_3D_{11} + 2(a_1 + c_2 + a_6 + a_8)D_{12} + 2a_5D_{22} + (3a_{12} + a_{22} + 2a_4)D_1 +$$
$$+ (b_{22} - b_{12} - 2b_4)D_2 + (a_{11} + 2a_7 + 3a_{21})D_3 + (b_{21} - b_{11} + 2b_7)D_4 + 2(a_1 + a_6)D_5 +$$
$$+ 2(b_6 - b_1)D_6$$

$$B_{31} = 2a_3D_{12} + 2(a_6 + a_8)D_{22} + (3a_{22} + a_{12} + a_4)D_3 +$$
$$+ (b_{22} - b_{12} - b_4)D_4 + 2a_3D_5 - 2b_3D_6$$

$$B_{12} = 2(b_2 - b_1)D_{11} + 2b_8D_{12} + (b_{11} - b_{21} + b_7)D_1 +$$
$$+ (3a_{11} + a_{21} - a_7)D_2 - 2b_8D_5 + 2a_8D_6$$

$$B_{22} = -2b_3D_{11} + 2(b_2 + b_6 - b_1 - b_8)D_{12} + 2b_5D_{22} + (b_{12} - b_{22} - 2b_4)D_1 +$$
$$+ (3a_{12} + a_{22} - 2a_4)D_2 + (b_{11} - b_{21} + 2b_7)D_3 + (a_{11} + 3a_{21} - 2a_7)D_4 +$$
$$+ 2(b_1 - b_6)D_5 + 2(a_1 + a_6)D_6$$
$$B_{32} = -2b_3D_{12} + 2(b_6 - b_8)D_{22} + (b_{12} - b_{22} - b_4)D_3 + (a_{12} + 3a_{22} - a_4)D_4 +$$
$$+ 2b_3D_5 + 2a_3D_6$$
$$C_{11} = 2a_4D_{11} + 2a_7D_{12} + (a_1 + a_8 + 2a_2)D_1 + (b_1 - 2b_2 + b_8)D_2 + a_5D_3 - b_5D_4 +$$
$$+ 2(a_{11} + a_{21})D_5 + 2(b_{21} - b_{11})D_6$$
$$C_{21} = 2a_4D_{12} + 2a_7D_{22} + a_3D_1 + b_3D_2 + (a_2 + a_6 + 2a_8)D_3 + (2b_8 - b_2 - b_6)D_4 +$$
$$+ 2(a_{12} + a_{22})D_5 + 2(b_{22} - b_{12})D_6$$
$$C_{12} = -2b_4D_{11} + 2b_7D_{12} + (2b_2 - b_1 - b_8)D_1 + (a_1 + 2a_2 + a_8)D_2 + b_5D_3 +$$
$$+ a_5D_4 + 2(b_{11} - b_{21})D_5 + 2(a_{11} + a_{21})D_6$$
$$C_{22} = -2b_4D_{12} + 2b_7D_{22} - b_3D_1 + a_3D_2 + (b_2 + b_6 - 2b_8)D_3 +$$
$$+ (a_2 + a_6 + 2a_8)D_4 + 2(b_{12} - b_{22})D_5 + 2(a_{12} + a_{22})D_6$$
$$F_1 = a_4D_1 + b_4D_2 + a_7D_3 - b_7D_4 + 2(a_2 + a_8)D_5 + 2(b_8 - b_2)D_6$$
$$F_2 = -b_4D_1 + a_4D_2 + b_7D_3 + a_7D_4 + 2(b_2 - b_8)D_5 + 2(a_2 + a_8)D_6$$

Автор благодарит В.В. Румянцева за поддержку этих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красильников П.С., Тхай В.Н.* Обратимые системы. Устойчивость при резонансе 1:1 // // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 570–579.
2. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия Пущино: Науч. центр биолог. исслед. АН СССР, 1985. 215 с.
3. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 6. С. 1309–1311.
4. *Крементуло В.В.* Исследование устойчивости гироскопа с учетом сухого трения на оси внутреннего корданова кольца (кожуха) // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 968–970.
5. *Крементуло В.В.* Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось вращения внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса //ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 568–571.
6. *Красильников П.С.* О строении некоторых функциональных пространств и их связь с прямым методом Ляпунова // Аналитические и численные методы исследования механических систем. М.: МАИ, 1989. С. 12–17.
7. *Красильников П.С.* Обобщенные пространства ростков гладких решений уравнения 1-го порядка и их связь с прямым методом Ляпунова //Изв. вузов. Математика. 1990. № 5. С. 47–53.
8. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 791–799.
9. *Ковалев А.М., Чудненко А.Н.* К устойчивости положений равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 11. С. 1010–1013.
10. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
11. *Фурта С.Д.* Об асимптотических решениях систем дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых собственных значений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1348–1351.

Москва

Поступила в редакцию
14.II.1992