

УДК 517.925.42+531.552

© 1993 г. М.В. Шамолин

**КЛАССИФИКАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В ЗАДАЧЕ
О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ
ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПИРУЮЩЕГО МОМЕНТА**

Проводится качественный анализ динамической системы, описывающей модельный вариант задачи о плоскопараллельном движении тела в среде при струйном или отрывном обтекании, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на части поверхности тела, имеющей форму плоской пластинки [1, 2]. Сила взаимодействия направлена по нормали к пластинке, а точка приложения этой силы зависит лишь от угла атаки. По срединному перпендикуляру к пластинке действует сила тяги, которая обеспечивает во все время движения постоянство величины скорости центра пластинки. Кроме того, на тело наложен линейный по угловой скорости демпфирующий момент, в зависимости от коэффициента которого проводится классификация фазовых портретов системы. Отмечаются механическая и топологическая аналогии с маятником, закрепленным в потоке набегающей среды [3, 4].

Известная задача Кирхгофа, а также эффекты, рассмотренные в [5], не исчерпывают всех возможностей исследования движения тела в среде при условиях, когда его поступательное движение связано с вращательным. В данной работе выделяется задача о движении тела при условии, что линия действия силы, приложенной к телу, не меняет своей ориентации относительно тела, а лишь может смещаться параллельно самой себе в зависимости от угла атаки. Подобные условия возникают при движении с большими углами атаки в среде при струйном [1, 2] или отрывном [6] обтекании.

1. Постановка задачи. Рассматривается модельный вариант задачи о плоскопараллельном движении твердого тела в сопротивляющейся среде. Предполагается, что среда воздействует не на всю поверхность тела, а лишь на некоторую ее часть, имеющую форму плоской пластинки. При этом взаимодействие тела со средой происходит при условиях струйного или отрывного обтеканий. К примеру, последние условия выполнены для тел цилиндрической формы, входящих в воду, для движущегося парашюта в воздухе и т.д.

Сила S взаимодействия тела со средой направлена по нормали к плоской пластинке AB (фиг. 1). Точка приложения N этой силы определяется лишь углом атаки α , который отсчитывается от вектора скорости v середины D пластинки до нормали в этой точке (прямая CD) против часовой стрелки (таким образом, $DN = y(\alpha)$). Величину силы сопротивления примем в виде $S = s(\alpha)v^2$, где v — модуль скорости центра пластинки.

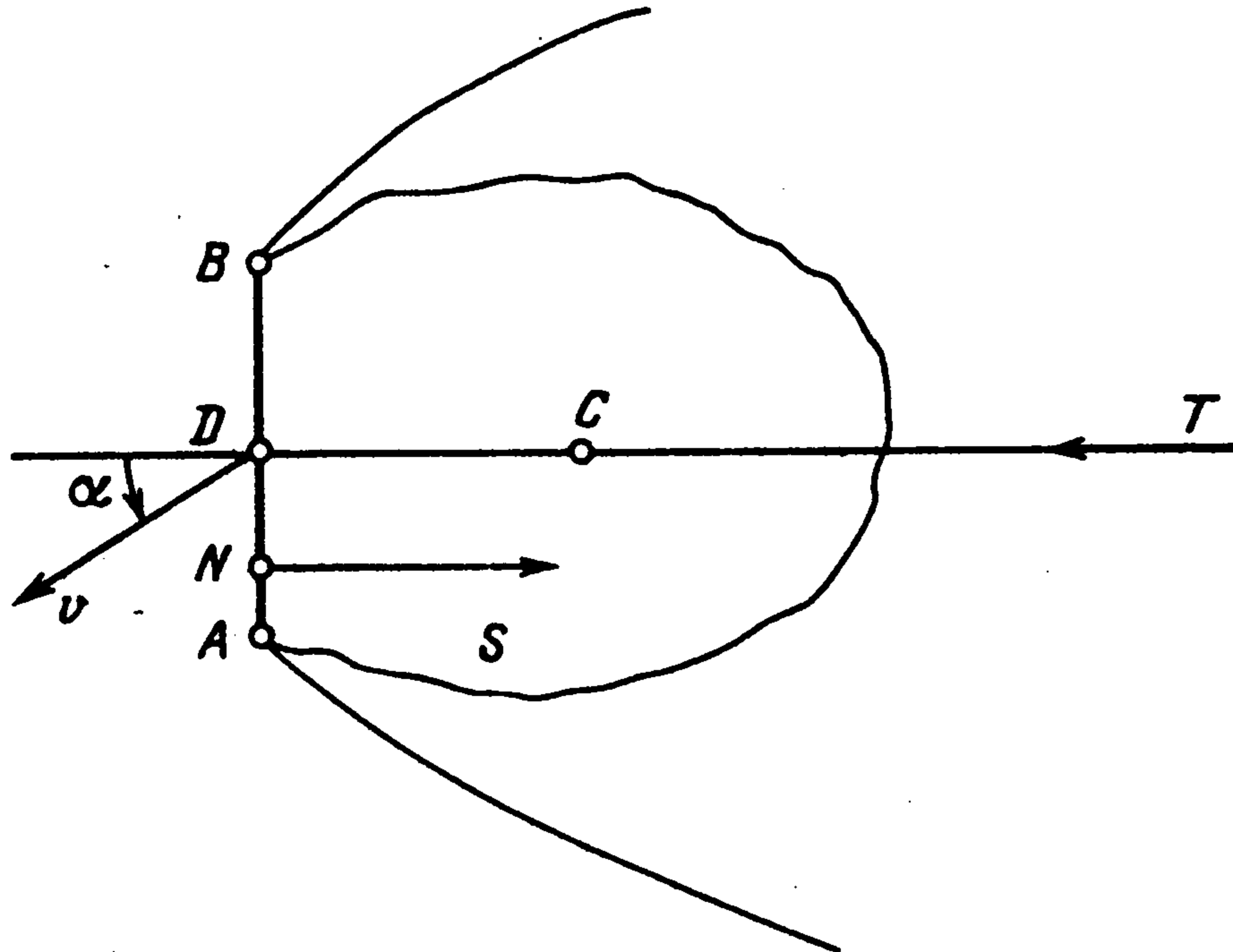
Распределение масс примем таким, чтобы центр масс C тела располагался на срединном перпендикуляре CD к пластинке.

Предположим, что по прямой CD на тело действует дополнительная сила тяги T . Введение этой силы используется как в методических целях, так и для обеспечения некоторых заданных классов движений.

Для описания положения тела выберем декартовы координаты x, y центра пластинки и угол поворота φ , который будем отсчитывать в плоскости от пря-

мой CD по часовой стрелке до оси инерциальной системы координат. При этом фазовое пространство системы $(x, y, \varphi^*, x, y, \varphi)$ шестимерно. Величины v и α выражаются неинтегрируемыми соотношениями через переменные x, y, φ . В силу этого фазовое состояние системы будем задавать величинами $(v, \alpha, \varphi^*, x, y, \varphi)$, а функции v и α рассматривать как квазискорости системы.

Ввиду того что обобщенные силы, а также кинетическая энергия не зависят от положения тела на плоскости, координаты (x, y, φ) являются циклическими.



Фиг. 1

Это позволяет рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений меньшей размерности, первые два уравнения которой описывают движение центра масс, а последнее описывает изменение во времени момента количества движения относительно оси Кенига

$$\begin{aligned} v^* \cos \alpha - \alpha^* v \sin \alpha + \omega v \sin \alpha + \sigma \omega^2 &= (T - s(\alpha) v^2) / m \\ v^* \sin \alpha + \alpha^* v \cos \alpha - \omega v \cos \alpha + \sigma \omega^* &= 0 \\ I \omega^* &= -y(\alpha) s(\alpha) v^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

(σ — расстояние DC , m — масса тела, I — его центральный момент инерции).

Следующие три кинематических соотношения дополняют систему (1.1) до шестого порядка

$$\varphi^* = \omega, \quad x^* = v \cos(\alpha - \varphi), \quad y^* = v \sin(\alpha - \varphi) \quad (1.2)$$

В динамическую систему (1.1) входят функции y, s , для качественного описания которых используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Будем считать, что функция y достаточно гладкая, нечетная, 2π -периодическая, удовлетворяющая следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'(0) > 0, y'(\pi/2) = 0$, а также $y(\alpha + \pi) = -y(\alpha)$.

Будем считать, что функция s достаточно гладкая, четная, 2π -периодическая, удовлетворяющая следующим условиям: $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0, s'(\pi/2) < 0$, а также $s(\alpha + \pi) = -s(\alpha)$. Класс таких функций s будем обозначать Σ .

Рассмотрим произведение $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$. Следствием предыдущих определений является утверждение: F — достаточно гладкая, нечетная, π -периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, причем $F'(0) > 0, F'(\pi/2) < 0$. Класс таких функций F будем обозначать Φ .

Анализ полученных динамических систем привел к нахождению механической и топологической аналогий. Полученная динамическая система описывает: а) свободное тело в сопротивляющейся среде; при этом величина скорости центра пластинки постоянна; б) закрепленный маятник в потоке среды.

При этом уравнение на угол ата.си свободного тела эквивалентно уравнению на угол поворота закрепленного маятника, а постоянной скорости центра пластинки свободного тела соответствует постоянная скорость набегающего потока на закрепленный маятник [3, 4, 7–10, 11].

2. О структурной устойчивости. Под структурно устойчивой (грубой) системой дифференциальных уравнений будем понимать такую систему, малые деформации которой не во всем классе функций, а лишь в некотором подклассе эквивалентны данной системе [12, 13].

Теория динамической системы (1.1) касается следующих аспектов: исследование топологической структуры двумерных и трехмерных фазовых портретов, а также доказательство структурной устойчивости (грубости) этих динамических систем в зависимости от значений управляющей тяги [4, 7–11].

Будем рассматривать деформацию правой части системы не над всем классом правых частей, а над некоторым подклассом

$$K \subset C^r, \quad r \geq 1$$

Определение. Систему дифференциальных уравнений, задающих достаточно гладкое векторное поле V , назовем структурно устойчивой (грубой) по отношению к классу функций $K \subset C^r$ (относительно структурно устойчивой), если любое векторное поле W , определенное с помощью класса функций K и получающееся деформацией поля V в C^1 -топологии относительно класса функций K , топологически эквивалентно полю V .

Для некоторых фиксированных функций T система (1.1) структурно устойчива (груба) относительно классов Φ , Σ . Кроме того, любые два векторных поля, определенные при помощи классов Φ и Σ , топологически эквивалентны между собой.

Выполнены следующие условия:

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi, \quad s = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \Sigma \quad (2.1)$$

Если имеет место структурная устойчивость системы (1.1) для некоторой функции T относительно классов Φ и Σ , то при рассмотрении системы (1.1) можно ограничиться системой (1.1) при условии (2.1), являющейся аналитической системой уравнений.

Как известно, грубые системы не плотны в топологии C^1 [14]. Но если рассмотреть грубые системы относительно подкласса $K \subset C^r$, то может оказаться, что в C^1 -топологии данные системы будут образовывать всюду плотное множество. Действительно, для некоторых фиксированных функций T грубые системы (1.1), определенные относительно классов Φ и Σ , в C^1 -топологии всюду плотны.

3. Система дифференциальных уравнений. Будем рассматривать такие движения тела, при которых во все время величина скорости центра пластинки остается постоянной. Накладываемая при этом связь на систему не голономна, а сила T — реакция этой не голономной связи [9, 10]¹. Теория для этого случая развита в работах [4, 7–11]².

С другой стороны, уравнение $v(t) = \text{const}$ задает в фазовом пространстве класс поверхностей уровня первого интеграла. При этом функция T — управление, поддерживающее движение системы на данной поверхности.

¹ См. также: Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. О движении тела в среде при струйном обтекании // Тез. докл. Всесоюз. конф. по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике (2–4 II. 1988). — Деп. в ВИНТИ 22.12.88, № 8886-В-88.

² См. также: Шамолин М.В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 27.12.91. М.: МГУ, 1991. 147 с.

Таким образом, от системы (1.1) отщепляется независимая подсистема второго порядка, которая вне и только вне многообразия

$$O = \{(\alpha, \omega) \in R^2: \cos \alpha = 0\}$$

эквивалентна следующей системе при $h = 0$:

$$\alpha^* = \omega + A_1 F(\alpha) / \cos \alpha, \quad \omega^* = A_2 F(\alpha) - h \omega \quad (3.1)$$

$$A_1 = \sigma v / I, \quad A_2 = -v^2 / I$$

Об особенностях приведения системы (1.1) к системе (3.1) см. в [7, 8] и в диссертации автора.

Допустим, что на тело наложен линейный по угловой скорости демпфирующий момент, который меняет лишь угловое ускорение. Таким образом, изменение угла атаки и угловой скорости дается системой (3.1).

При условии (2.1) система (3.1) примет вид аналитической системы

$$\alpha^* = \omega + A_1 \sin \alpha, \quad \omega^* = A_2 \sin \alpha \cos \alpha - h \omega \quad (3.2)$$

$$A_1 = \sigma v AB / I, \quad A_2 = -v^2 AB / I$$

В дальнейшем будем рассматривать систему (3.2) по причине того, что общая система (3.1) топологически эквивалентна системе (3.2) либо относительно класса Φ , либо относительно пространства функций C^1 . Более того система (3.1) относительно структурно устойчива для класса Φ .

4. Качественный анализ динамической системы. Классификация особых точек. Система (3.2) (как и (3.1)) имеет точки покоя $(k\pi, 0)$, а также

$$(\arccos(-hA_1/A_2), -A_1 \sin \arccos(-hA_1/A_2)) \quad (4.1)$$

которые существуют лишь при

$$A_2/A_1 < h < -A_2/A_1 \quad (4.2)$$

Здесь и всюду далее $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Корни характеристического уравнения системы (3.2) возле точек $(2k\pi, 0)$ имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 - h \pm [(h + A_1)^2 + 4A_2]^{1/2})$$

а бифуркационное множество состоит из следующих постоянных:

$$\{A_1, -A_2/A_1, -A_1 + 2\sqrt{-A_2}, -A_1 - 2\sqrt{-A_2}\}$$

Для точек $((2k+1)\pi, 0)$ имеем аналогичные выражения при замене A_1 на $-A_1$.

Точки покоя (4.1), если они существуют, имеют тип седла. Действительно, точки поля (4.1) существуют лишь при условии (4.2), которое обеспечивает наличие у характеристического уравнения возле точек (4.1) действительных корней разных знаков.

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие обозначения и аббревиатуры: $\xi = A_2/A_1$, $\eta_{\pm}^{\pm} = A_1 \pm \sqrt{-A_2}$, $\eta_{\pm}^{\mp} = -A_1 \pm \sqrt{-A_2}$, С — седло, УУ — устойчивый узел, НУ — неустойчивый узел, УФ — устойчивый фокус, НФ — неустойчивый фокус, УЦ — устойчивый предельный цикл, НЦ — неустойчивый предельный цикл, ФП — фазовый портрет.

Таблица 1

Номер под-случая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер фиг.
		(0, 0)	(π , 0)	
1	$(-\infty, \xi)$	НУ	С	2
2	(ξ, η_-^-)	НУ	НУ	9*
3	(η_-^-, η_+^-)	НФ	НУ	9*
4	$(\eta_+^-, -A_1)$	НФ	НФ	9
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-5 7
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-4 6
7	(A_1, η_-^+)	УФ	УФ	8
8	(η_-^+, η_+^+)	УУ	УФ	8*
9	$(\eta_+^+, -\xi)$	УУ	УУ	8*
10	$(-\xi, +\infty)$	С	УУ	3

Таблица 2

Номер под-случая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер фиг.
		(0, 0)	(π , 0)	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	2
2	(η_-^-, ξ)	НФ	С	2*
3	(ξ, η_+^-)	НФ	НУ	9*
4	$(\eta_+^-, -A_1)$	НФ	НФ	9
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-5 7
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-4 6
7	(A_1, η_-^+)	УФ	УФ	8
8	$(\eta_-^+, -\xi)$	УУ	УФ	8*
9	$(-\xi, \eta_+^+)$	С	УФ	3*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	3

Классификация точек покоя (0, 0) и (π , 0) приведена в таблицах и соответствует следующим четырем случаям:

Случай 1А (табл. 1):

$$\xi < \eta_-^- < \eta_+^- < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_-^+ < \eta_+^+ < -\xi$$

Случай 1Б (табл. 2):

$$\eta_-^- < \xi < \eta_+^- < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_-^+ < -\xi < \eta_+^+$$

Случай 2 (табл. 3):

$$\eta_-^- < -A_1 < \xi < \eta_+^- < 0 < \eta_-^+ < -\xi < A_1 < \eta_+^+$$

Случай 3 (табл. 4):

$$\eta_-^- < -A_1 < \eta_-^+ < \xi < 0 < -\xi < \eta_+^- < A_1 < \eta_+^+$$

Глобальный качественный анализ. Как следует из результатов диссертации автора, у системы вида (3.1) при выполнении условия $F \in \Phi$ при любом $h \in R$ не

Таблица 3

Номер под- случая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер фиг.
		(0, 0)	(π , 0)	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	2
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	2*
3	$(-A_1, \xi)$	НФ	С	2*
4	(ξ, η_+^-)	НФ	УУ	7*
5	$(\eta_+^-, 0)$	НФ	УФ	7
6	$(0, \eta_+^+)$	НФ	УФ	6
7	$(\eta_+^+, -\xi)$	НУ	УФ	6*
8	$(-\xi, A_1)$	С	УФ	3*
9	(A_1, η_+^+)	С	УФ	3*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	3

Таблица 4

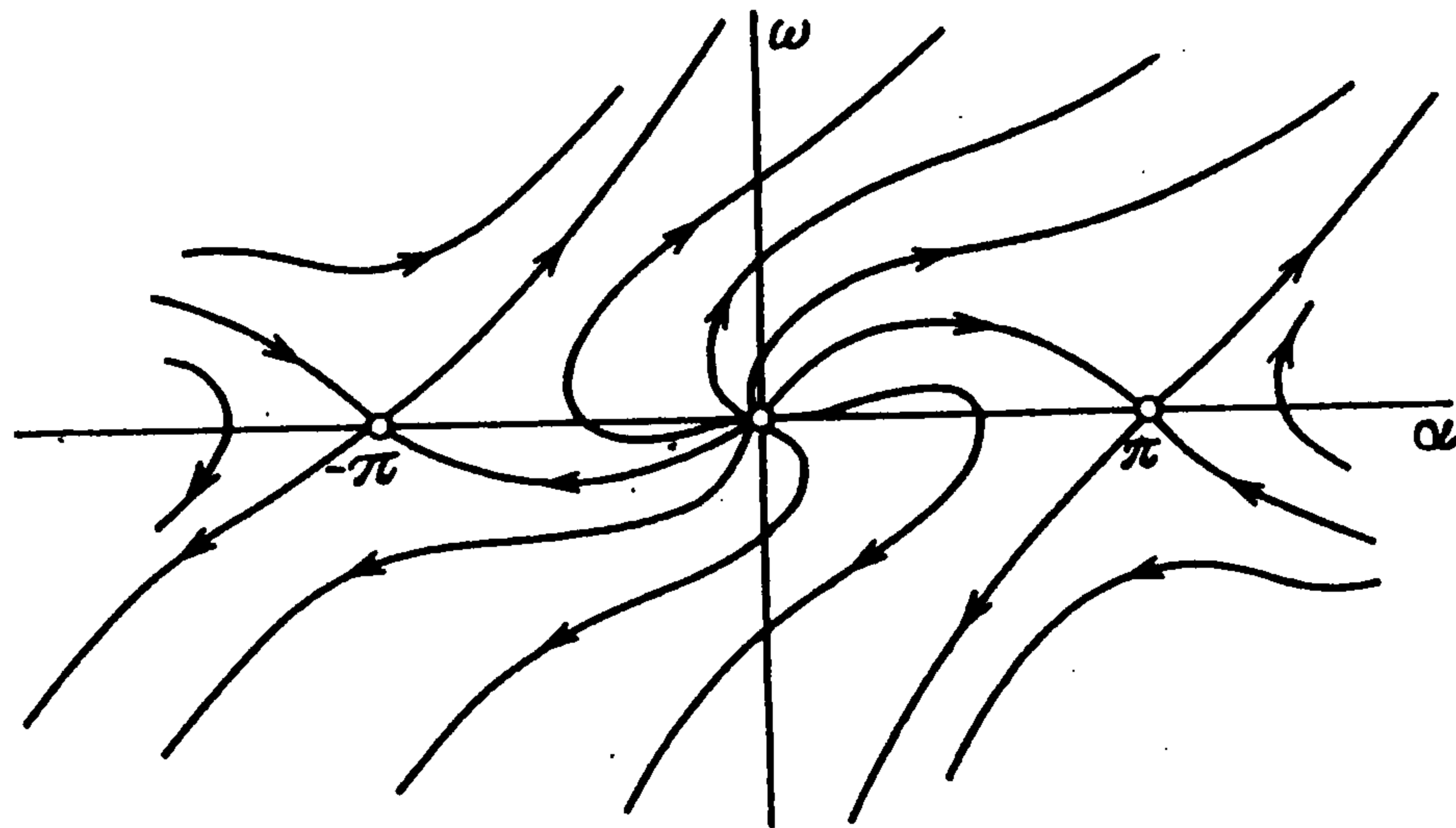
Номер под- случая	Диапазон изменения h	Тип точки покоя		Номер фиг.
		(0, 0)	(π , 0)	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	2
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	2*
3	$(-A_1, \eta_+^+)$	НФ	С	2*
4	(η_+^+, ξ)	НУ	С	2
5	$(\xi, 0)$	НУ	УУ	7*
6	$(0, -\xi)$	НУ	УУ	6*
7	$(-\xi, \eta_+^-)$	С	УУ	3
8	(η_+^-, A_1)	С	УФ	3*
9	(A_1, η_+^+)	С	УФ	3*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	3

существует фазовой траектории, имеющей горизонтальные и вертикальные асимптоты на фазовой плоскости в окрестности бесконечно удаленной точки. Как будет видно из фазовых портретов, при некоторых условиях у системы вида (3.1) существуют наклонные асимптоты для некоторых траекторий в окрестности бесконечно удаленной точки, которая при этом является либо притягивающей, либо отталкивающей.

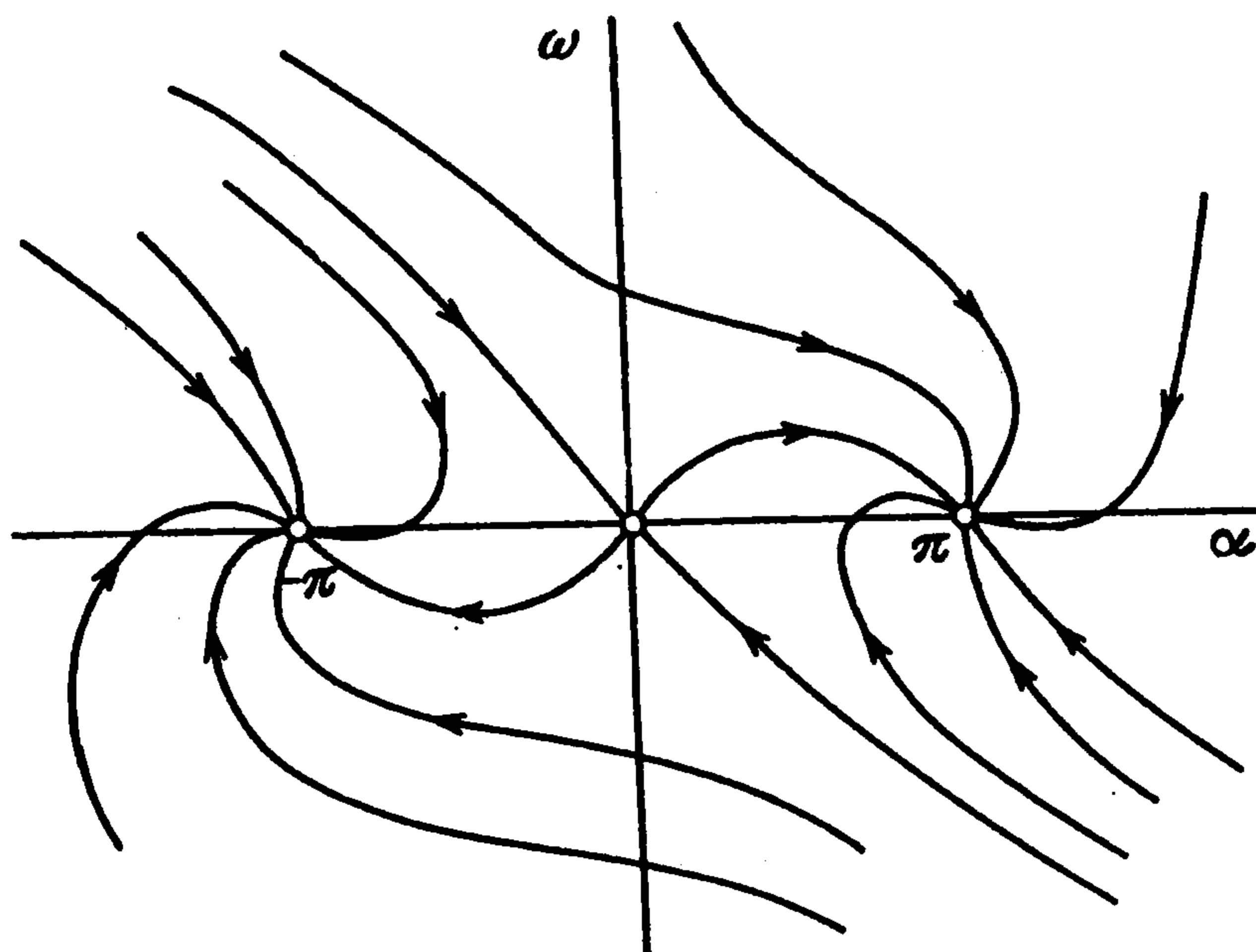
Вопрос о существовании замкнутых траекторий, стягиваемых в точку по фазовому цилиндру, сводится к исследованию существования таких траекторий вокруг либо точек $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, либо точек $((2k+1)\pi, 0)$ [11]. При этом в полосе $\Pi = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: -\pi/2 < \alpha < \pi/2\}$ иногда существует единственный устойчивый предельный цикл, а в полосе $\Pi' = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \pi/2 < \alpha < 3\pi/2\}$ — единственный неустойчивый предельный цикл (в первом случае размеры цикла уменьшаются с ростом h , а во втором случае увеличиваются).

Замечания. 1⁰. Существует $h_1^* > 0$ (соответственно $h_2^* < 0$) такое, что при $h \in (-\infty, h_1^*) \cup (A_1 F''(0), +\infty)$ (соответственно $h \in (-\infty, -A_1 F''(0)) \cup (h_2^*, +\infty)$) в полосе Π (соответственно Π') нет замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий. Для систем вида (3.2) имеем оценки

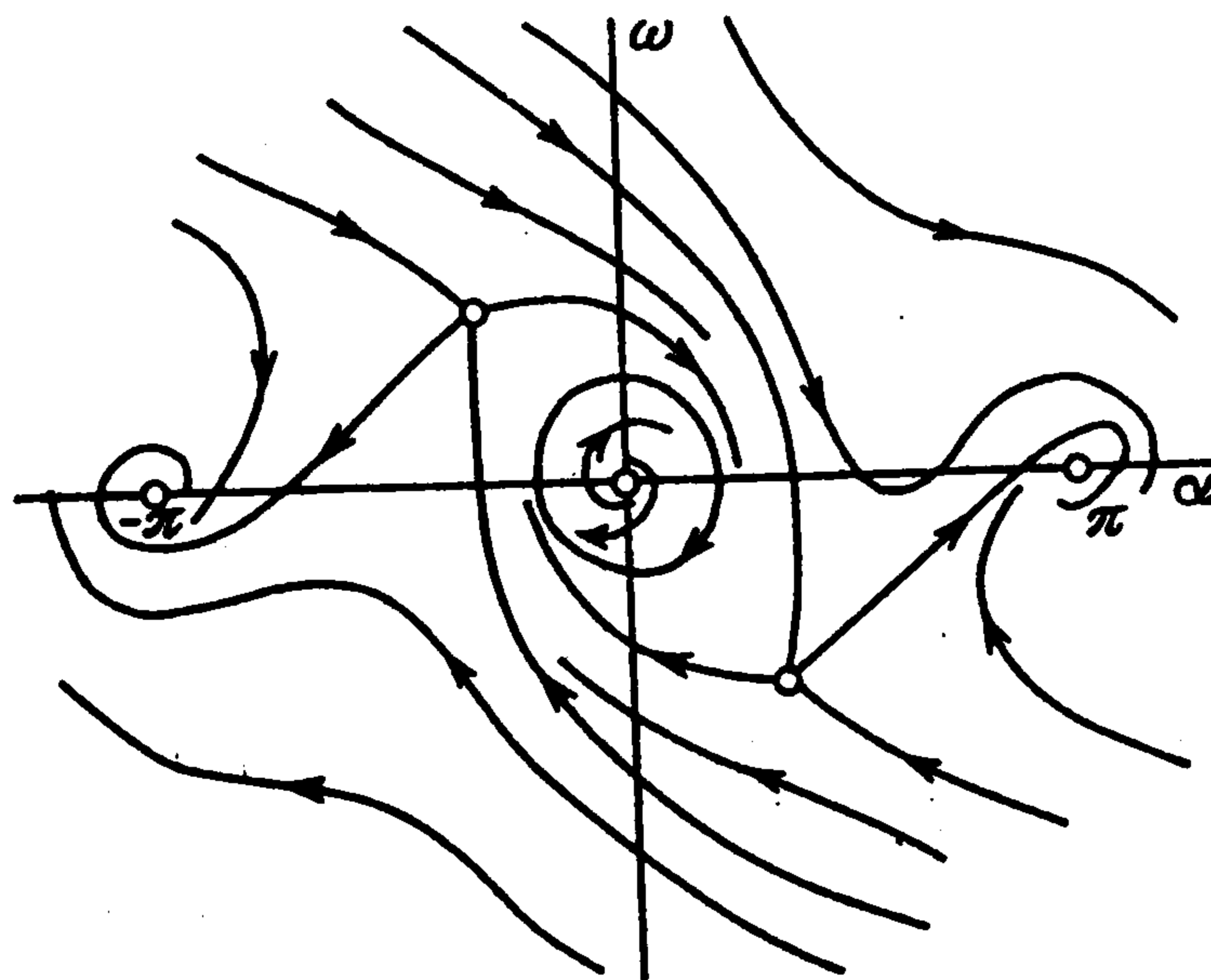
$$\frac{2}{\pi} A_1 < h_1^* < A_1, \quad -A_1 < h_2^* < -\frac{2}{\pi} A_1$$



Фиг. 2



Фиг. 3

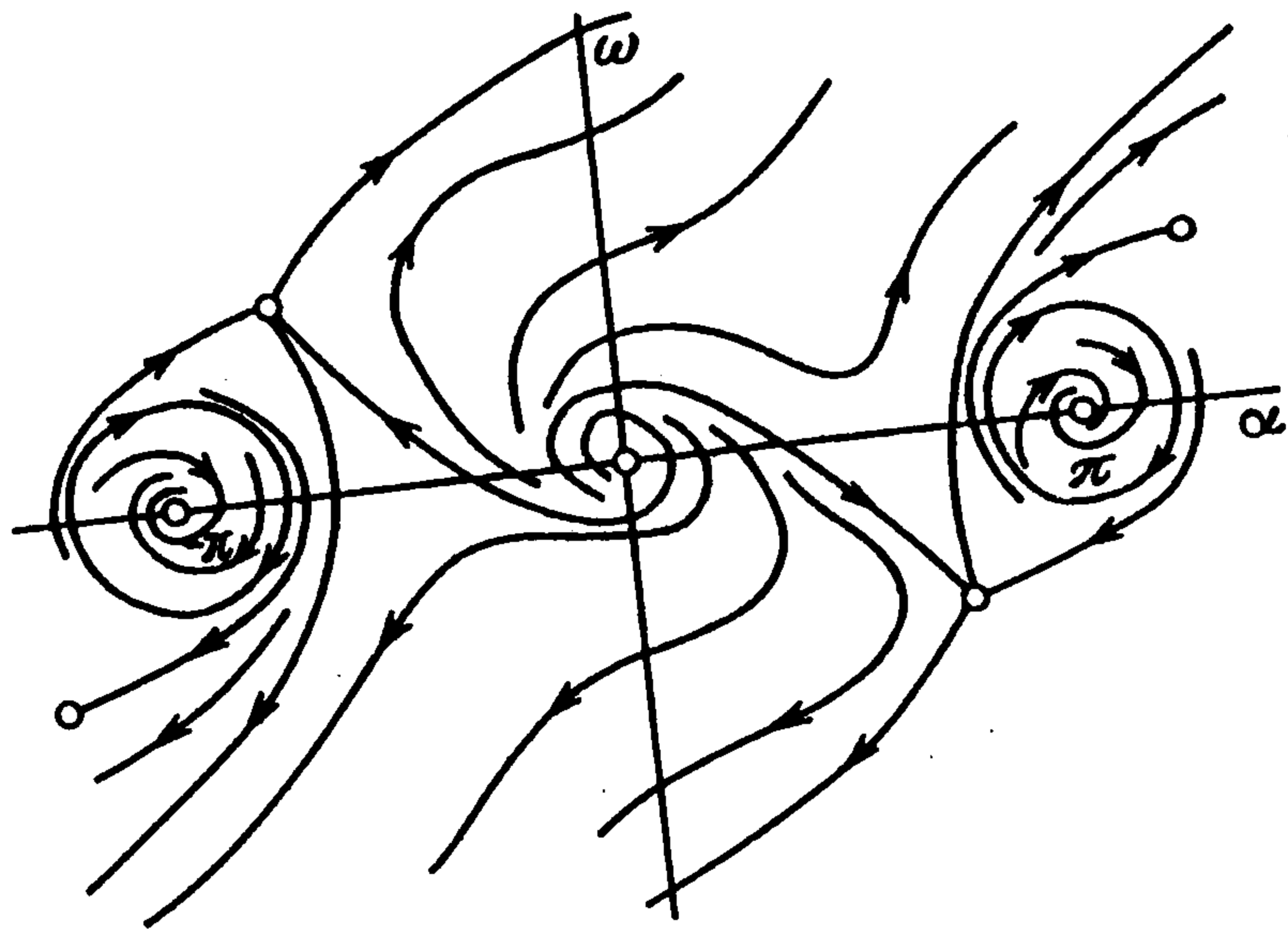


Фиг. 4

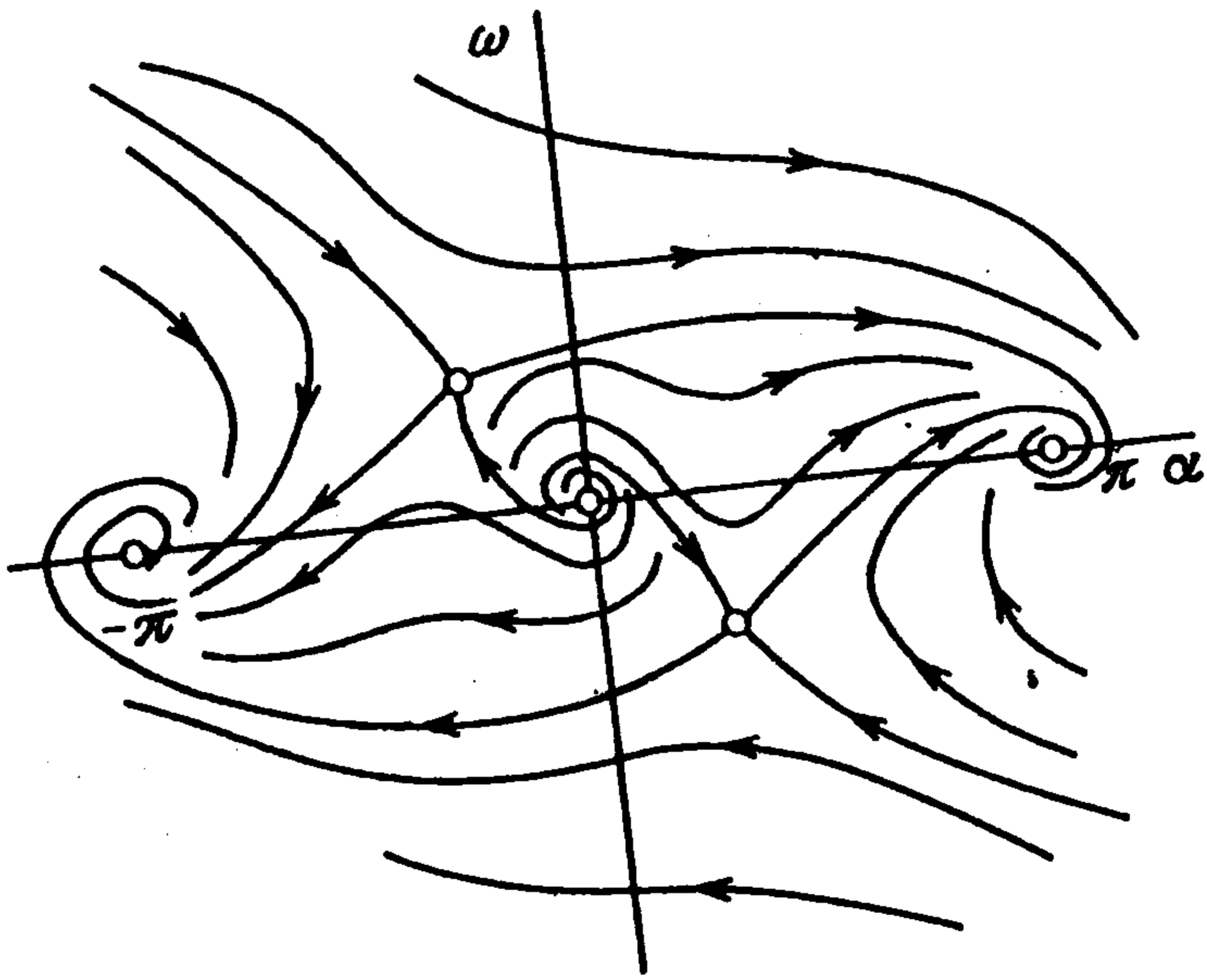
2°. Интервал возможного существования цикла еще уже. Можно показать, что цикл существует лишь при $h \in (h_1^*, A_1)$, где h_1^* — ненулевой корень уравнения

$$\operatorname{tg} \epsilon = -A_2 \epsilon / A_1^2$$

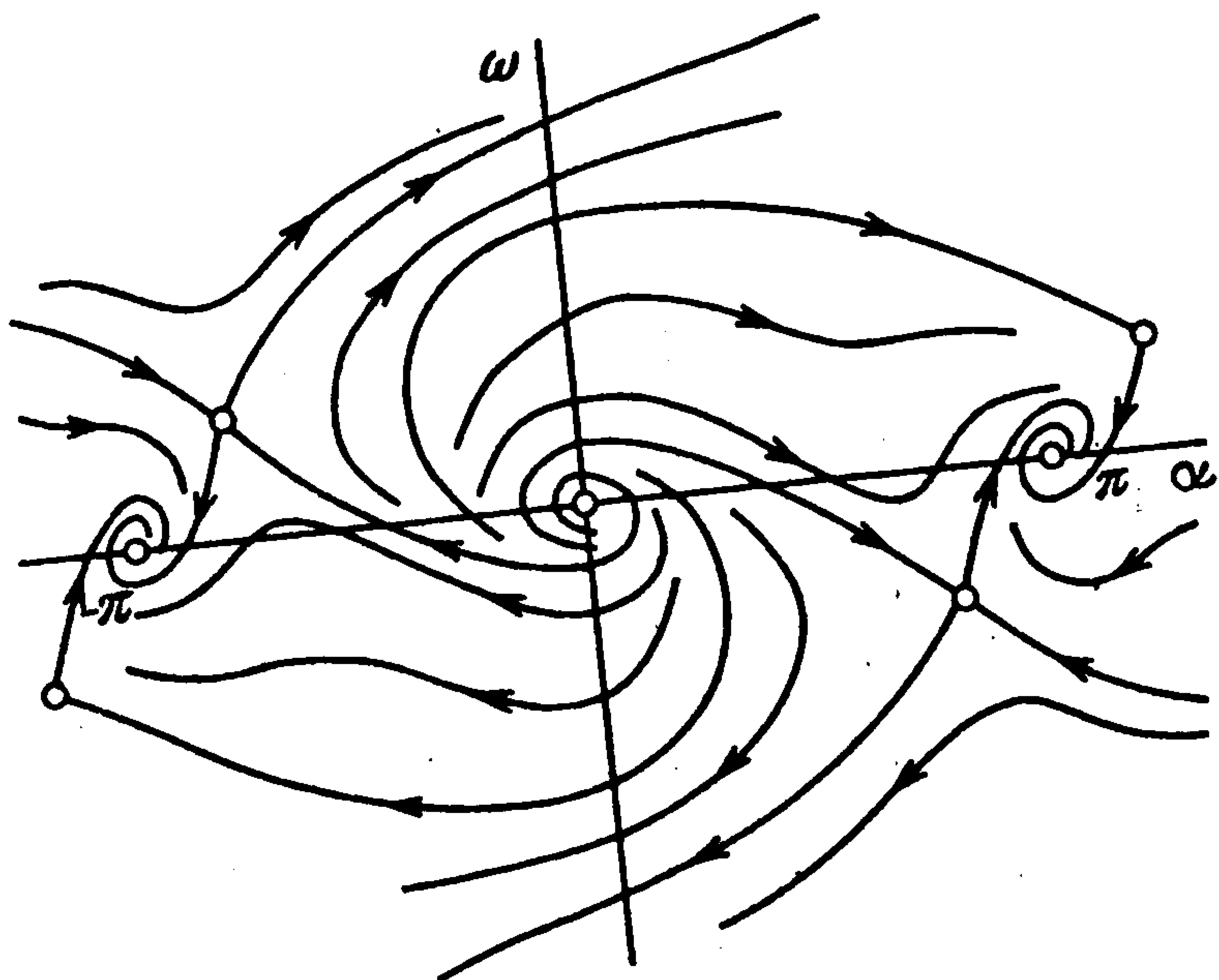
Аналогично для h_2^* .



Фиг. 5

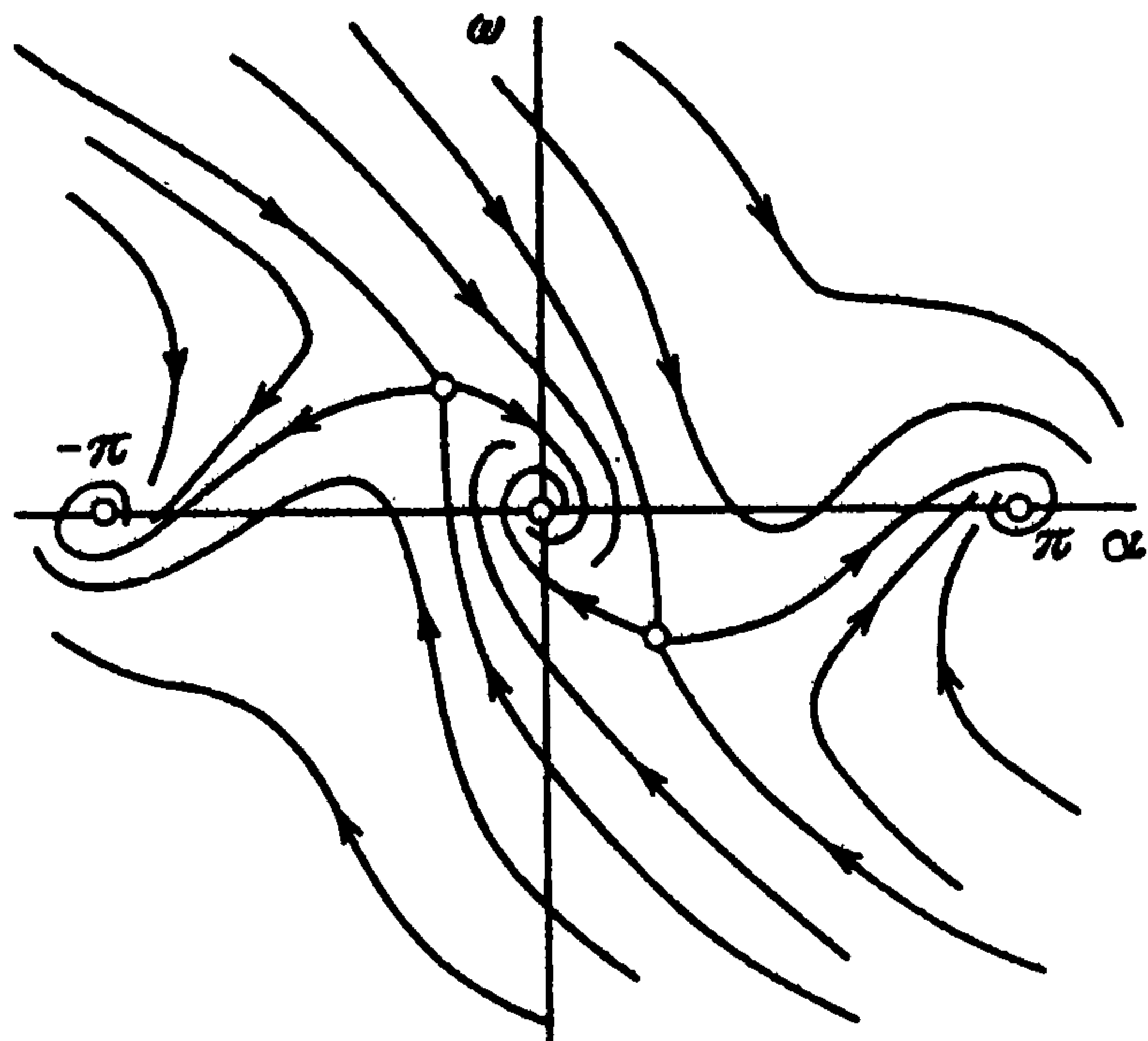


Фиг. 6

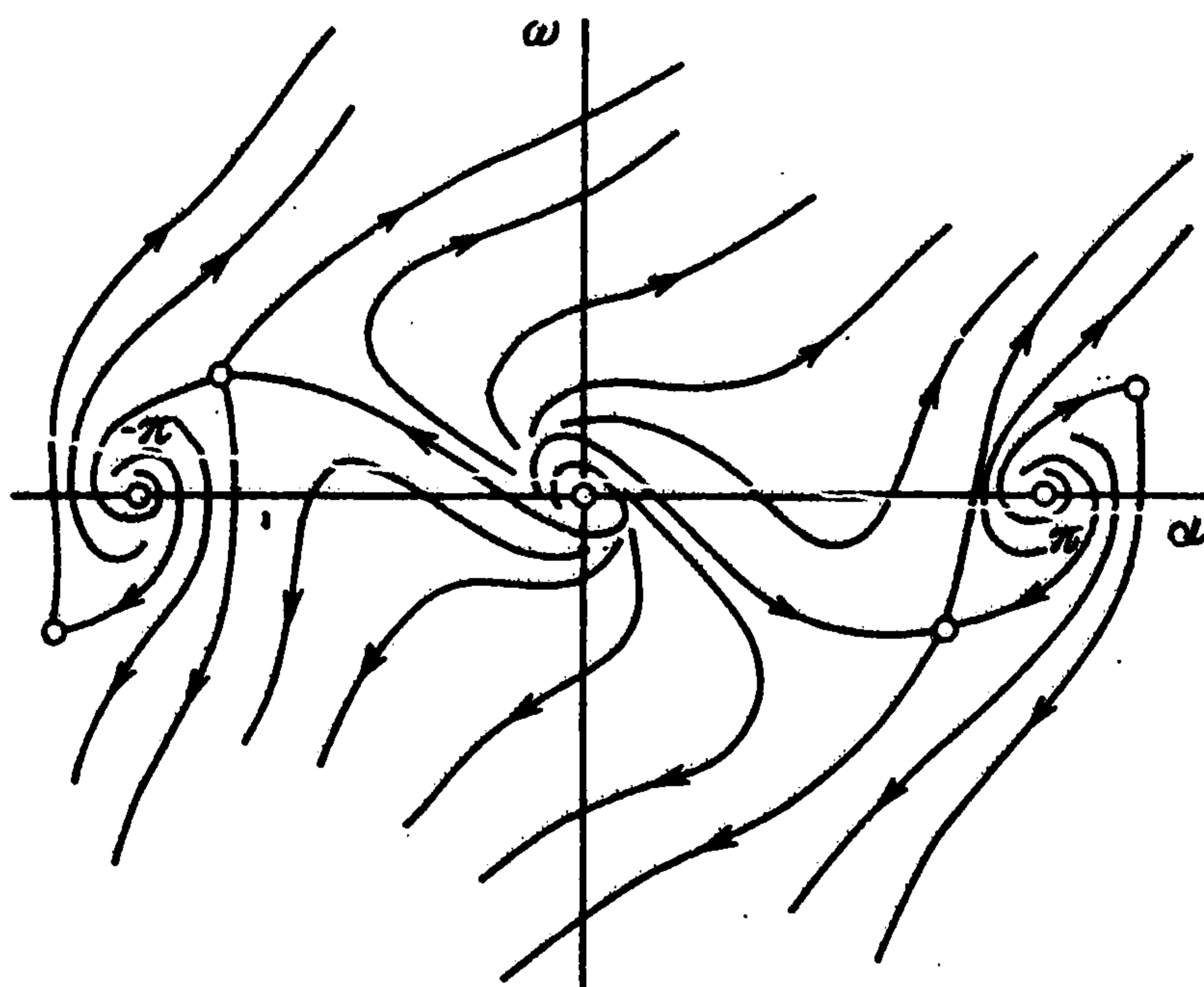


Фиг. 7

3°. Наряду с центральной симметрией относительно точек $(k\pi, 0)$ поле системы (3.1) обладает некоторой расширенной зеркальной симметрией. Именно ω -составляющая векторного поля системы (3.1) меняет знак на $\pi/2 + \pi k - \alpha$ на $\pi/2 + \pi k + \alpha$ и h на $-h$, а α -составляющая сохраняется. При $h = 0$ система (3.1) обладает некоторой зеркальной симметрией.



Фиг. 8



Фиг. 9

образования h , а именно в зеркально-симметричных точках относительно прямых

$$\Lambda_i = \{ (\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha + \pi/2 + \pi i \}$$

α -составляющая сохраняется, а ω -составляющая меняет знак.

Видоизменяя критерии Дюлака и Бендиксона, можно показать, что вопрос существования замкнутых траекторий, не стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, решается при $h \neq 0$ отрицательно. При $h = 0$ существует континуум траекторий такого топологического типа [4, 7–11], который образует систему сравнения для динамической системы (3.1) при $h \neq 0$.

Многочисленные вопросы глобального поведения всех сепаратрис имеющих гиперболических седел исследуются для каждого фазового портрета отдельно; при этом развивается теория топографических систем Пуанкаре и систем сравнения. Для краткости изложения это исследование не приводится. Для каждого конкретного топологического типа фазового портрета данное поведение сепаратрис показано на фиг. 2–9.

4°. Для случаев 1А.1, 1А.10, 1Б.1, 1Б.2, 1Б.9, 1Б.10, 2.1, 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.10, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 и только для них положения равновесия (4.1) отсутствуют.

5°. Условие $A_1^2 F'(0) + A_2 < 0$ является не только одним из достаточных, но и необходимым. Таким образом, для случаев 1А.1, 1А.2, 1А.3, 1А.4, 1А.7, 1А.8, 1А.9, 1А.10, 1Б.1, 1Б.2, 1Б.3, 1Б.4, 1Б.7, 1Б.8, 1Б.9, 1Б.10, 2, 3 предельных циклов во всей плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ не существует.

Классификация фазовых портретов. Информация о соответствии подслучаев для четырех случаев 1А, 1Б, 2, 3 фазовым портретам показана в табл. 1–4. При неполном соответствии результатов указанным ФП номера фигур помечены звездочкой (вместо узла может быть показан фокус и наоборот). Об истинных типах точек покоя см. также табл. 1–4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976, 495 с.
2. Гуревич Г.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 356 с.
3. Локшик Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986, 86 с.
4. Рыжова В.Е., Шамолин М.В. О некоторых аналогиях в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. VII Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1991, С. 305.
5. Mouillard L.P. L'empire de l'air. P., 1881, 158 p.
6. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ, 1974, Вып. 1621, С. 79–93.
7. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1989, № 3, С. 51–54.
8. Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Отчет Ин-та механики МГУ, 1990, № 3969, 80 с.
9. Самсонов В.А., Шамолин М.В. О движении тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Всесоюз. конф. Современные проблемы механики и технологии машиностроения. М.: ВИНТИ, 1989, С. 128–129.
10. Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Тез. док. II Всесоюз. конф. Нелинейные колебания механических систем. Горький: Изд-во горьковск. ун-та, 1990, Ч. 2, С. 95–96.
11. Шамолин М.В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1992, № 2, С. 52–56.
12. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 304 с.
13. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986, 301 с.
14. Смейл С. // Грубые системы не плотны. Период, сб. перев. иностр. статей, 1967, Т. 11, № 4, С. 107–112.

Москва

Поступила в редакцию
2.VII.1992