ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 4, 1993

УДК 531.38

© 1993 г. Е.В. Верховод, Г.В. Горр

ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Рассматривается класс прецессионно-изоконических движений гиростата с неподвижной точкой в обобщенной задаче динамики. Обнаружены новые классы таких движений, причем прецессия тела может быть либо полурегулярной прецессией второго типа, либо прецессией общего вида.

Существенным этапом в изучении прецессий служит исследование прецессионно-изоконических движений. В этом случае движение тела кроме свойства прецессионности обладает свойством изоконичности (подвижный годограф вектора угловой скорости конгруэнтен неподвижному относительно касательной плоскости). По-видимому, впервые изоконические движения в динамике рассмотрел Фабри [1], установив их существование в известном решении Стеклова. Методом годографов [2] это свойство получено в [3]. Кроме отмеченного случая изоконические движения обнаружены в решениях Лагранжа, Жуковского [4], Гесса–Сретенского [4] и Гриоли [5]. Все эти исследования относятся к классической задаче о движении гиростата в поле силы тяжести. В обобщенной задаче динамики известен результат [6], который касается условий существования изоконических движений гиростата с первым слоем соответствующего инвариантного соотношения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обобщенную задачу о движении гиростата с неподвижной точкой. Уравнения движения запишем в виде [7, 8]

$$A\,\dot{\boldsymbol\omega}=(A\,\boldsymbol\omega+\boldsymbol\lambda)\times\boldsymbol\omega+\boldsymbol\omega\times B\boldsymbol\nu+\mathbf{s}\times\boldsymbol\nu+\boldsymbol\nu\times C\boldsymbol\nu \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol\nu}=\boldsymbol\nu\times\boldsymbol\omega \tag{1.2}$$

Они допускают первые интегралы

$$A\,\boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\omega-2\,(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol\nu)+C\boldsymbol\nu\cdot\boldsymbol\nu=2E,\quad \boldsymbol\nu\cdot\boldsymbol\nu=1$$
$$(A\,\boldsymbol\omega+\boldsymbol\lambda)\cdot\boldsymbol\nu-{}^1\!/_2\,(B\boldsymbol\nu\cdot\boldsymbol\nu)=k \tag{1.3}$$

В (1.1)–(1.3) $\boldsymbol\omega$ – угловая скорость гиростата, $\boldsymbol\nu$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силового поля, $\boldsymbol\lambda$ – гиростатический момент, $\mathbf{s}$ – вектор обобщенного центра масс, A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке, B и C – симметричные матрицы третьего порядка [7, 8]. Точка над переменными означает относительную производную.

Пусть движение гиростата является прецессионным относительно вертикали (угол между единичным вектором $\mathbf{a}$, неизменно связанным с телом, и вектором $\boldsymbol\nu$ постоянен). Тогда имеет место инвариантное соотношение [9]

$$\boldsymbol\nu\cdot\mathbf{a}=a_0,\quad a_0=\cos\theta_0 \tag{1.4}$$

где θ_0 – угол между $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol\nu$. Производная от (1.4) в силу уравнения (1.2) дает $\boldsymbol\omega\cdot(\mathbf{a}\times\boldsymbol\nu)=0$, т.е.

$$\boldsymbol\omega=f_1(t)\,\mathbf{a}+f_2(t)\,\boldsymbol\nu \tag{1.5}$$

Случай $\mathbf{a}\times\boldsymbol{\nu}=0$ исключен из рассмотрения, так как приводит к равномерному вращению гиростата. Подстановка (1.5) в уравнение (1.2) дает

$$\boldsymbol{\nu}^{\cdot}= f_1(t)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{a}). \tag{1.6}$$

Свяжем с телом подвижную систему так, чтобы вектор $\mathbf{a}$ имел вид $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$. Тогда уравнениям (1.4) $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1$ и (1.6) удовлетворим, введя новую переменную φ

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi,\ \ a_0' \cos\varphi,\ a_0),\quad a_0' = \sin\theta_0 \tag{1.7}$$

и положив $f_1(t)=\varphi^{\cdot}$. Переменная φ играет роль угла собственного вращения гиростата. Если через ψ обозначить его угол прецессии, то в (1.5) $f_2(t)=\psi^{\cdot}$ и, следовательно

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{a}+\psi^{\cdot}\boldsymbol{\nu} \tag{1.8}$$

Подстановка (1.8) в (1.1), (1.3) дает

$$\begin{gathered}\varphi^{\cdot\cdot}A\,\mathbf{a}+\psi^{\cdot\cdot}A\,\boldsymbol{\nu}+\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\,[\mathrm{Tr}\,(A)(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{a})-2\,(A\,\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{a})]\ -\\ -\,\varphi^{\cdot 2}(A\,\mathbf{a}\times a)-\psi^{\cdot 2}(A\,\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu})+\varphi^{\cdot}\mathbf{a}\times(\boldsymbol{\lambda}-B\,\boldsymbol{\nu})+\\ +\,\psi^{\cdot}\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{\lambda}-B\,\boldsymbol{\nu})-\mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}=0\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\varphi^{\cdot}(A\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+\psi^{\cdot}(A\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}+{}^1\!/_2\,(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}\varphi^{\cdot 2}(A\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+2\,\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}(A\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+\psi^{\cdot 2}(A\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=\\ =\,2\,(E+\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu})-C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}.\end{gathered}$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\times\boldsymbol{\nu}$ независимы, то рассмотрим проекции левой части (1.9) на эти векторы. Можно показать, что проекции на векторы $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ приводятся к уравнениям (1.10), поэтому запишем только проекцию на $\mathbf{a}\times\boldsymbol{\nu}$

$$\begin{gathered}\varphi^{\cdot}A\,\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{a})+\psi^{\cdot}A\,\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{a})+\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\,[\mathrm{Tr}\,(A)\,a_0'^2\ -\\ -2\,(A\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})+2\,a_0\,(A\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu})]\ +\varphi^{\cdot 2}\,[a_0\,(A\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\,-\\ -A\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}]\ -\psi^{\cdot 2}\,[a_0\,(A\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-A\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}]\ +\varphi^{\cdot}[a_0\,(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a})\ -\\ -\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}-a_0\,(B\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+B\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}]\ +\psi^{\cdot}\,[\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a}-a_0\,(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})-B\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\ +\\ +\,a_0\,(B\,\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})]\ +\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}-a_0\,(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu})+a_0\,(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-C\,\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=0\end{gathered} \tag{1.11}$$

Метод исследования прецессии [9] относительно вертикали состоит в следующем. Из (1.10) находим $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ в зависимости от φ и параметров задачи. Подстановка их выражений в уравнение (1.11) приводит к уравнению вида $F(\varphi, \boldsymbol{\lambda}, A, B, C, k, E)=0$. Требование, чтобы оно было тождеством по φ, приводит к условиям на параметры, при выполнении которых движение тела будет прецессией относительно вертикали.

Пусть движение гиростата кроме свойства прецессионности обладает свойством изоконичности [9]. Тогда имеет место дополнительное инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{c})=0 \tag{1.12}$$

где $\mathbf{c}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом (вообще говоря, отличный от $\mathbf{a}$). Можно показать, что при выполнении (1.12) подвижный годограф вектора угловой скорости конгруэнтен неподвижному [9].

Подставим (1.8) в соотношение (1.12):

$$\varphi^{\cdot}(a_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) + \psi^{\cdot}(1 - \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{c}) = 0 \tag{1.13}$$

Таким образом, в дополнение к (1.10), (1.11) получим еще одно условие на $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$. Вектор $\mathbf{c}$ зададим без ограничения общности в виде $\mathbf{c} = (c_1, 0, c_3)$, здесь $c_1^2 + c_3^2 = 1$.

2. Регулярные прецессионно-изоконические движения. Пусть прецессия гиростата регулярна: $\varphi^{\cdot} = n$, $\psi^{\cdot} = m$. Так как при этом соотношение (1.13) должно быть тождеством φ, то $c_1 = 0$ ($\mathbf{c} = \mathbf{a}$) и $n = m$. Следовательно, условия существования прецессионно-изоконических движений в случае, когда прецессия регулярная, найдем из условий существования регулярных прецессий [10], полагая в них $m = n$:

$$\begin{aligned}
&B_{12} = 0, \quad C_{12} = 0, \quad 2n(A_{22} - A_{11}) - B_{22} + B_{11} = 0\\
&n^2(A_{22} - A_{11}) + C_{22} - C_{11} = 0, \quad n^2 A_{13} - nB_{13} - C_{13} = 0\\
&n^2 A_{13} - nB_{23} - C_{23} = 0, \quad s_1 = a_0 C_{13} + n^2 A_{13}(a_0 + 1)\\
&s_2 = a_0 C_{23} + n^2 A_{23}(a_0 + 1), \quad \lambda_1 = B_{13}a_0 - A_{13}n(2a_0 + 1)\\
&\lambda_2 = B_{23}a_0 - A_{23}n(2a_0 + 1), \quad n^2(A_{22} + A_{33} - A_{11}) +\\
&+ n\lambda_3 + B_{11}n(a_0 + 1) - B_{33}na_0 - a_0 n^2(A_{11} - A_{33}) +\\
&+ a_0(C_{11} - C_{33}) + s_3 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подвижный годограф вектора угловой скорости определяется соотношениями

$$\omega_1 = na_0' \sin\varphi, \quad \omega_2 = na_0' \cos\varphi, \quad \omega_3 = n(1 + a_0) \tag{2.2}$$

где $\varphi = nt + \varphi_0$, φ_0 – произвольная постоянная. На основе уравнений П.В. Харламова [2] найдем уравнения и неподвижного годографа в цилиндрической системе координат

$$\omega_\xi = n(1 + a_0), \quad \omega_\rho = |a_0' n|, \quad \alpha = nt + \alpha_0 \tag{2.3}$$

Из (2.2), (2.3) вытекает, что движение тела будет периодическим с периодом $T = 2\pi/|n|$.

3. Полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа. Рассмотрим случай, когда движение тела – полурегулярная прецессия первого типа: $\psi^{\cdot} = m$, $\varphi^{\cdot} \neq \text{const}$. Очевидно в (1.13) $\mathbf{c} \neq \mathbf{a}$, так как в противном случае прецессия будет регулярной. Вводя новые параметры

$$b_0 = \frac{a_0 c_3 - 1}{a_0 - c_3}, \quad c_0 = \frac{a_0' c_1}{a_0 - c_3} \tag{3.1}$$

для которых очевидно равенство $b_0^2 = 1 + c_0^2$, из (1.13) получим

$$\varphi^{\cdot} = m(b_0 + c_0 \sin\varphi) \tag{3.2}$$

Полурегулярная прецессия первого типа с зависимостью скорости собственного вращения вида (3.2) для обобщенной задачи динамики изучена в [11], где условия существования прецессий рассматриваемого типа записаны в виде равенств, которым должны удовлетворять параметры системы уравнений (1.1), (1.2). Если потребовать дополнительно, чтобы было выполнено условие $b_0^2 = 1 + c_0^2$, то движение гиростата обладает свойствами изоконичности и полурегулярной прецессии первого типа. При известных b_0, c_0 величины c_1, c_3 определяем из (3.1) по формулам

$$c_1 = -\frac{c_0 a_0'}{a_0 + b_0}, \quad c_3 = \frac{a_0 b_0 + 1}{a_0 + b_0}$$

В силу равенства $b_0^2 = 1 + c_0^2$ заключаем, что φ — монотонная функция времени. Полагая для определенности $m > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$, из (3.2) находим

$$\frac{\varphi}{2} = \operatorname{arctg}\left[b_0 \operatorname{tg}\frac{mt}{2}\left(1 - c_0 \operatorname{tg}\frac{mt}{2}\right)^{-1}\right] \tag{3.3}$$

Уравнения подвижного годографа таковы:

$$\omega_1 = m a_0' \sin\varphi, \quad \omega_2 = m a_0' \cos\varphi, \quad \omega_3 = m\,[a + b_0 + c_0 \sin\varphi] \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) вытекает, что подвижный годограф является кривой, полученной в результате пересечения цилиндра $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0'^2 m^2$ и плоскости $\omega_3 = (c_0/a_0')\,\omega_1 + m\,(a_0 + b_0)$, а движение конца вектора угловой скорости по нему периодическое с периодом $T = 2\,\pi/m$.

Уравнения неподвижного годографа запишем в декартовой системе координат $\omega_\xi = \omega_\rho \cos\alpha$, $\omega_\eta = \omega_\rho \sin\alpha$, ω_ζ:

$$\omega_\xi = a_0' m b_0^{-1}\,(c_0^2 + \cos\varphi + b_0 c_0 \sin\varphi)$$

$$\omega_\eta = a_0' m b_0^{-1}\,(c_0 - c_0 \cos\varphi + b_0 \sin\varphi)$$

$$\omega_\zeta = m\,(1 + a_0 b_0 + a_0 c_0 \sin\varphi)$$

В силу изоконичности движение тела будет периодическим с периодом $2\,\pi/m$.

4. Полурегулярные прецессионно-изоконические движения второго типа. Пусть в соотношениях (1.10), (1.11), (1.13) $\dot\varphi = n$, тогда (1.13) дает

$$\dot\psi = n/\Delta(\varphi), \quad \Delta(\varphi) = b_0 + c_0 \sin\varphi \tag{4.1}$$

а из (1.10), (1.11) следует

$$\begin{aligned} &n\,(d_1 \cos\varphi + d_1' \sin\varphi + d_0) + \dot\psi\,(a_2 \cos 2\varphi + a_2' \sin 2\varphi + \\ &+ a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi + a_0^*) - (b_1 \cos 2\varphi + b_2' \sin 2\varphi + \\ &+ b_1 \cos\varphi + b_1' \sin\varphi + b_0^*) = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &n^2 A_{33} + 2n\,\dot\psi\,(d_1 \cos\varphi + d_1' \sin\varphi + d_0) + \dot\psi^2 (a_2 \cos 2\varphi + \\ &+ a_2' \sin 2\varphi + a_1 \cos\varphi + a_1' \sin\varphi + a_0^*) - (c_2 \cos 2\varphi + \\ &+ c_2' \sin 2\varphi + c_1 \cos\varphi + c_1' \sin\varphi + c_0^*) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &\ddot\psi\,(-a_2 \sin 2\varphi + a_2' \cos 2\varphi + {}^1\!/_2\, a_1' \cos\varphi - {}^1\!/_2\, a_1 \sin\varphi) + \\ &+ n\,\dot\psi\,(-2\,a_2 \cos 2\varphi - 2\,a_2' \sin 2\varphi - a_1 \cos\varphi - a_1' \sin\varphi + \\ &+ d_0') - n^2\,(d_1 \cos\varphi + d_1' \sin\varphi) - \dot\psi^2\,(a_2 a_0 \cos 2\varphi + \\ &+ a_2' a_0 \sin 2\varphi + p_1 \cos\varphi + p_1' \sin\varphi + p_0) + n\,(2\,b_0 \cos 2\varphi + \\ &+ 2\,b_2' \sin 2\varphi + b_1 \cos\varphi + b_1' \sin\varphi + b_0^{**}) + \dot\psi\,(2\,b_2 a_0 \cos 2\varphi + \\ &+ 2\,b_2' a_0 \sin 2\varphi + q_1 \cos\varphi + q_1' \sin\varphi + q_0) - a_0\,c_2 \cos 2\varphi - \\ &- a_0\,c_2' \sin 2\varphi + r_1 \cos\varphi + r_1' \sin\varphi + r_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где введены следующие обозначения:

$$a_2 = {}^1\!/_2\, a_0'^2\, (A_{22}-A_{11}),\quad a_2' = a_0'^2 A_{12},\quad a_\cdot = 2\, a_0 a_0' A_{23}$$

$$a_1' = 2\, a_0 a_0'\, A_{13},\quad a_0^* = {}^1\!/_2\, a_0'^2\, (A_{22}+A_{11}) + a_0^2\, A_{33}$$

$$d_0 = a_0 A_{33},\quad d_1 = a_0' A_{23},\quad d_1' = a_0' A_{13}$$

$$b_2 = {}^1\!/_2\, a_0'^2\, (B_{22}-B_{11}),\quad b_2' = {}^1\!/_2\, a_0'^2\, B_{12}$$

$$b_1 = a_0'\, (B_{23} a_0 - \lambda_2),\quad b_1' = a_0'\, (B_{13} a_0 - \lambda_1)$$

$$b_0^* = k - \lambda_3\, a_0 + {}^1\!/_4\, a_0{}^2\, (B_{11} + B_{22}) + {}^1\!/_2\, a_0^2\, B_{33}$$

$$b_0^{**} = {}^1\!/_2\, a_0'^2\, (B_{11}+B_{22}),\quad c_2 = {}^1\!/_2\, a_0'^2\, (C_{11}-C_{22})$$

$$c_2' = -a_0'^2\, C_{12},\quad c_1 = 2\, a_0'\, (s_2 - C_{23}\, a_0)$$

$$c_1' = 2\, a_0'\, (s_1 - C_{13} a_0),\quad c_0^* = 2\, E + 2\, s_3 a_0 - {}^1\!/_2\, (C_{11}+C_{22})\, a_0'^2 - C_{33} a_0^2$$

$$p_1 = a_0' A_{23}\, (a_0^2 - a_0'^2),\quad p_1' = a_0' A_{13}\, (a_0^2 - a_0'^2)$$

$$d_0' = a_0'^2 A_{33},\quad p_0 = {}^1\!/_2\, a_0 a_0'^2\, (A_{11} + A_{22} - 2\, A_{33})$$

$$q_1 = a_0'\, [B_{23}\, (a_0^2 - a_0'^2) - a_0 \lambda_2],\quad q_1' = a_0'\, [B_{13}\, (a_0^2 - a_0'^2) - a_0 \lambda_1]$$

$$q_0 = a_0'^2\, [{}^1\!/_2\, a_0\, (B_{11} + B_{22} - 2\, B_{33}) + \lambda_3],\quad r_1 = a_0'\, [C_{23}\, (a_0^2 - a_0'^2) - a_0 s_2]$$

$$r_1' = a_0'\, [C_{13}\, (a_0^2 - a_0'^2) - a_0 s_1]$$

$$r_0 = a_0'^2\, [{}^1\!/_2\, a_0\, (C_{11} + C_{22} - 2\, C_{33}) + s_3]$$

Подставим (4.1) в (4.2)–(4.4) и потребуем, чтобы полученные уравнения были тождествами по φ. В результате найдем систему нелинейных алгебраических уравнений, связывающих параметры системы.

После вычислений можно показать, что она имеет следующее решение

$$\begin{aligned}
&A_{12} = A_{23} = 0,\quad B_{12} = B_{23} = 0,\quad B_{11} = B_{22},\quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0\\
&C_{11} = C_{22},\quad s_1 = s_2 = 0,\quad \lambda_2 = 0,\quad \lambda_1 = {}^1\!/c_0\, [c_0\, (B_{13} a_0 -\\
&-nA_{13}) + n a_0'\, (A_{22} - A_{11})],\quad s_3 = a_0\, (C_{33} - C_{11}) +\\
&+\frac{n}{c_0}\, (B_{13}\, a_0' - B_{11} c_0),\quad \lambda_3 a_0'^2 = a_0 a_0'^2\, (B_{33} - B_{11}) +\\
&+\frac{1}{n c_0\, b_0}\, [n a_0 c_0^2 A_{13} - n b_0 c_0 a_0'\, (A_{11} - A_{22} + A_{33}) +\\
&+ n a_0 a_0' c_0\, (A_{22} - A_{33}) - b_0^2 a_0'^2 B_{13}],\quad b_0^2 = \frac{1}{1-\lambda^2} \qquad (4.5)\\
&c_0^2 = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2},\quad \lambda^2\, (a_0'^2\, A_{22} + a_0^2\, A_{33}) - 2\, \lambda\, a_0 a_0' A_{13} -\\
&-a_0'^2\, (A_{22} - A_{11}) = 0,\quad (A_{22} + \sigma A_{33})\, (Q_1 \sigma + Q_0)^2 -\\
&-4\, \sigma A_{13}^2\, (R_1 \sigma + R_0)\, (Q_1 \sigma + Q_0) - 4\, \sigma A_{13}^2\, (A_{22} - A_{11})\, (R_1 \sigma + R_0)^2 = 0
\end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma = a_0^2 / a_0'^2,\quad Q_1 = A_{13}^2\, (A_{22} - A_{11} + A_{33}) + A_{33}\, (A_{22} - A_{11})\, (A_{33} - A_{11} - A_{22})$$

$$Q_0 = A_{22}\, [A_{13}^2 - A_{11}\, (A_{22} - A_{11})]$$

$$R_1 = A_{11} A_{33} - A_{13}^2,\quad R_0 = A_{22}\, (A_{11} - A_{22} + A_{33})$$

Последнее уравнение имеет по σ решение, например, при следующих значениях: $A_{11} = 2\,a$, $A_{22} = 3\,a$, $A_{33} = 4\,a$, $A_{13} = a$, где a — произвольный параметр, так как $f(0)>0$, $f(\infty)<0$ (здесь $f(\sigma)$ – левая часть рассматриваемого уравнения). Очевидно, при этом предпоследнее уравнение системы (4.4) имеет решение относительно параметра λ. Таким образом, разрешимость системы (4.5) доказана и тем самым установлены условия существования прецессионно-изоконических движений второго типа.

Подвижный годограф вектора угловой скорости задается уравнениями

$$\omega_1 = a_0'n \sin nt/\Delta(nt), \quad \omega_2 = a_0'n \cos nt/\Delta(nt)$$
$$\omega_3 = n(1 + a_0/\Delta(nt)) \tag{4.6}$$

и поэтому является линией пересечения эллиптического цилиндра и конуса

$$\frac{(\omega_1 + a_0'c_0 n)^2}{a_0'^2 n^2 b_0^2} + \frac{\omega_2^2}{a_0'^2 n^2} = 1, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 - \frac{a_0'^2 n^2}{a_0^2}(\omega_3 - n)^2 = 0$$

Неподвижный годограф определяется соотношениями

$$\omega_\xi = n(a_0 + 1/\Delta(nt)), \quad \omega_\rho = |a_0'n|$$
$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\frac{nt}{2}\left(b_0 + c_0\,\mathrm{tg}\frac{nt}{2}\right)^{-1}\right] \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) следует, что движение тела является периодическим с периодом $2\pi/n$. Конгруэнтность подвижного и неподвижного годографа очевидна.

5. Прецессионно-изоконические движения общего вида. Пусть в соотношении (1.13) $\varphi^\cdot$ и $\psi^\cdot$ не являются постоянными. Рассмотрим наиболее простой случай, когда $\mathbf{c} = \mathbf{a}$. Тогда из (1.13) следует $\varphi^\cdot = \psi^\cdot$. Интегралы (1.10) принимают вид

$$2\varphi^\cdot(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu} + A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} - 2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) + 2k$$
$$\varphi^{\cdot 2}[A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} + A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu})] = 2(E + \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) - C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} \tag{5.1}$$

При исключении $\varphi^\cdot$ из соотношений (5.1) возникает особый случай $A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu} + A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$, который имеет место при следующих условиях:

$$A_{11} = A_{22}, \quad A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0, \quad a_0 = A_{11}/(A_{11} - A_{33}) \tag{5.2}$$

Тогда правая часть первого уравнения из (5.1) равна нулю для всех φ. Это приводит к равенствам

$$B_{12} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad \lambda_1 = B_{13}a_0, \quad \lambda_2 = B_{23}a_0$$
$$2k = 2\lambda_3 a_0 - {}^1\!/_2\, a_0'^2 (B_{11} + B_{22}) - B_{33}a_0^2 \tag{5.3}$$

Полагая в уравнении (1.11) $\varphi^\cdot = \psi^\cdot$ и подставляя в него $\varphi^{\cdot 2}$, потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по φ. При учете (5.3) это дает следующие условия:

$$B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
$$C_{23} = C_{12} = 0, \quad C_{11} = C_{22}, \quad s_2 = 0$$
$$s_1 = C_{13}(4A_{11}A_{33} - A_{11}^2 - A_{33}^2)(A_{11} - A_{33})^{-1}(2A_{33} - A_{11})^{-1}$$
$$\lambda_3 = [A_{11}B_{33} + B_{11}(A_{33} - 2A_{11})](A_{11} - A_{33})^{-1} \tag{5.4}$$

Итак, при выполнении условий (5.2), (5.4) уравнения (1.1), (1.2) допускают решение

$$\omega = \varphi^{\bullet}(a + \nu), \quad \nu = (a_0' \sin\varphi, \quad a_0' \cos\varphi, a_0), \quad \varphi^{\bullet 2} = a + b \sin\varphi \tag{5.5}$$

$$a = [s_3 (A_{11} - A_{33}) + A_{11} (C_{11} - C_{33})] (A_{11} - A_{33})^{-2}$$

$$b = 2 C_{13} [A_{33} (A_{33} - 2 A_{11})]^{1/2} (2 A_{33} - A_{11})^{-1} (A_{11} - A_{33})^{-1}$$

Решение (5.5) описывает новый класс прецессионно-изоконических движений, для которого прецессия гиростата является прецессией общего вида.

Рассмотрим сведение задачи к квадратурам. Введем во втором уравнении (5.5) новую переменную $\beta = \varphi - \pi/2$. Тогда $\beta^{\bullet} = a + b \cos\beta$ и

$$t = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{a + b\cos\beta}} \tag{5.6}$$

Следовательно, зависимость $\beta(t)$ находим обращением эллиптического интеграла, который можно привести к эллиптическому интегралу первого рода

$$u = F(\gamma, k) = \int_0^{\gamma} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$$

(k – модуль), причем способ приведения зависит от значений параметров a, b. Компоненты угловой скорости найдем из (5.5)

$$\omega_1 = \beta^{\bullet} a_0' \cos\beta, \quad \omega_2 = -\beta^{\bullet} a_0' \sin\beta, \quad \omega_3 = \beta^{\bullet}(1 + a_0) \tag{5.7}$$

Случай $a = b > 0$. Из (5.6) найдем

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{e^{\sqrt{2a}t} - 1}{e^{\sqrt{2a}t} + 1}$$

Поскольку $\beta = \pi$ – стационарная точка, то в качестве начального значения (при $t = 0$) возьмем $\beta = 0$. Когда $t \to \infty$, имеем $\beta \to \pi$. Очевидно, что движение тела является асимптотическим к покою движением.

Случай $a > b > 0$. Из (5.6) получим

$$\beta = 2 \operatorname{am}(\rho_2 t), \quad \sin\beta = \operatorname{sn}(2\rho_2 t, k_2)$$

$$\cos\beta = \operatorname{cn}(2\rho_2 t, k_2) \tag{5.8}$$

$$\beta^{\bullet} = 2\rho_2 \operatorname{dn}(\rho_2 t, k_2), \quad \rho_2 = {}^1/_2 \sqrt{a + b}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2b}{a + b}}$$

Компоненты вектора ω определяют соотношения (5.7), а компоненты вектора ν таковы

$$\nu_1 = a_0' \cos\beta, \quad \nu_2 = -a_0' \sin\beta, \quad \nu_3 = a_0 \tag{5.9}$$

Поскольку решение (5.7) при условиях (5.8) периодическое с периодом $2T$, где

$$T_2 = \frac{K}{\rho_2}, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$$

а неподвижный годограф конгруэнтен подвижному [9], то движение тела является периодическим с периодом $2T_2$.

Случай $b > |a| > 0, -\arccos(-a/b) \leqslant \beta \leqslant \arccos(a/b)$. Если ввести вспомогательную переменную

$$\beta^* = \arcsin\sqrt{\frac{\beta(1-\cos\beta)}{a+b}}$$

то из (5.6) получим $\beta^* = \mathrm{am}(\rho_3 t)$, где $\rho_3 = \sqrt{b/2}$. При этом

$$\begin{aligned} &\sin\beta = 2k_3 \,\mathrm{sn}(\rho_3 t, k_3)\,\mathrm{dn}(\rho_3 t, k_3), \quad k_3 = \sqrt{(a+b)/2b} \\ &\cos\beta = 1 - [(a+b)/b]\,\mathrm{sn}^2(\rho_3 t, k_3), \quad \dot\beta = \sqrt{a+b}\,\mathrm{cn}(\rho_3 t, k_3) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Решение (5.7) при наличии соотношений (5.10) периодическое с периодом $4T_3$, где $T_3 = K/\rho_3$, K – полный эллиптический интеграл первого рода. Этим свойством обладают и компоненты вектора угловой скорости в неподвижном пространстве – движение гиростата периодическое с тем же периодом.

Случай $a > -b > 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Здесь удобно ввести вспомогательную переменную δ

$$\sin\delta = \sqrt{\frac{(a-b)(1-\cos\beta)}{2(a+b\cos\beta)}}$$

На основании (5.6) получим $\delta = \mathrm{am}(\rho_4 t)$, где $\rho_4 = \sqrt{a-b}/2$. Следовательно

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\;\frac{\mathrm{sn}(2\rho_4 t, k_4)}{\mathrm{dn}^2(\rho_4 t, k_4)}$$

$$\cos\beta = \frac{a-b-2a\,\mathrm{sn}^2(\rho_4 t, k_4)}{(a-b)\,\mathrm{dn}^2(\rho_4 t, k_4)}$$

$$k_4 = \sqrt{\frac{-2b}{a+b}}, \quad \dot\beta = \frac{\sqrt{a+b}}{\mathrm{dn}(\rho_4 t, k_4)}$$

Эти соотношения позволяют на основе (5.7), (5.9) найти ω, ν и сделать заключение о периодичности движения гиростата с периодом $T_4 = K/\rho_4$.

Для построения подвижного годографа (а следовательно, и неподвижного) достаточно представить его как линию пересечения конуса

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - \frac{a_0'^2}{(1+a_0)^2}\,\omega_3^2 = 0$$

и цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси $O\omega_3$, и направляющей в плоскости $O\omega_1\omega_2$, уравнение которой в полярной системе координат ρ, ξ имеет вид

$$\rho = a_0'\sqrt{a+b\cos\xi}, \quad (a_0' > 0)$$

Вид годографа, очевидно, будет зависеть от значений параметров a, b.

6. Прецессионно-изоконические движения в классической задаче. Особый интерес представляют прецессионно-изоконические движения в случае, когда $\lambda = 0$, а матрицы B и C нулевые.

Если прецессионно-изоконические движения регулярны, то из соотношений (2.1) следует, что

$$\begin{aligned} &A_{11} = A_{22}, \; A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0, \quad s_1 = s_2 = 0 \\ &n^2 A_{33} - a_0 n^2 (A_{11} - A_{33}) + s_3 = 0 \end{aligned}$$

т.е. такой тип движения возможен только в частном случае решения Лагранжа.

Для определения условий существования полурегулярных прецессионно-изоконических движений первого типа обратимся к результатам работ [9, 4]. В первой работе показано, что полурегулярные прецессии первого типа в классической задаче имеют место только в решении Гесса. Во второй показано, что изоконические движения в этом решении отсутствуют.

Когда движения гиростата — полурегулярные прецессионно-изоконические движения второго типа, то должны выполняться соотношения (4.5). Полагая в них $B_{ij} = 0$, $C_{kl} = 0$, получим противоречие.

Пусть изоконическое движение является прецессией общего вида. Было доказано [9], что необходимым условием существования прецессии общего вида относительно вертикали является равенство нулю постоянной интеграла момента количества движения. Из первого соотношения (5.1) следует, что при этом выражение при $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$ равно нулю для всех φ. Это приводит к случаю, рассмотренному в разд. 5. Однако из (5.5) следует, что прецессия регулярна.

Итак, в классической задаче о движении твердого тела в поле силы тяжести существуют только регулярные прецессионно-изоконические движения гироскопа Лагранжа относительно вертикали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fabbri R.* Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso // Atti Accad. Naz. Lincei.. Cl. Sci. fis. mat. e natar. 1934. – V. 19. N 6. P. 407–415; 495–502; 872–873.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965. 221 с.
3. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. 1968. Вып. 5. С. 194–202.
4. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Изоконические движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1982. Вып. 14. С. 20–33.
5. *Харламова Е.И.* Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1970. Вып. 2. С. 35–37.
6. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Один класс изоконических движений в динамике твердого тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1990. Вып. 22. С. 33–38.
7. *Орешкина Л.Н.* Математические аналогии некоторых задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1986, Вып. 18. С. 103–110.
8. *Яхья Х.М.* Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 5. С. 60–63.
9. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем // Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
10. *Горр Г.В., Курганский Н.В.* О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С. 16–20.
11. *Мозалевская Г.В., Орешкина Л.Н.* Безнутационные движения твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1991. Вып. 23. С. 1–5.

Донецк

Поступила в редакцию
9. VI. 1992