

УДК 531.36:534.1

© 1993 г. М.Б. Севрюк, А.П. Сейранян

ЭВОЛЮЦИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Прослеживается эволюция частот колебаний линейных автономных систем с потенциальными и диссипативными силами в зависимости от одномерного параметра. Рассмотрены случаи сильного и слабого демпфирования. Показано, что при изменении параметра частоты колебаний диссипативной системы во многих случаях ведут себя на комплексной плоскости как частоты нескольких несвязанных осцилляторов с одной степенью свободы.

Вопросам устойчивости диссипативных систем посвящена обширная литература [1 – 9]. Ниже исследуется эволюция полного набора собственных значений системы на всей комплексной плоскости (а не только переход собственных значений через мнимую ось, ответственный за возникновение или потерю устойчивости) и последовательно рассматриваются случаи, когда варьируется матрица потенциальной энергии, матрица диссипативных сил и матрица масс.

1. Уравнения движения линейной механической системы с диссипативными и потенциальными силами имеют вид

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Aq = 0 \quad (1.1)$$

где M , A , D – симметричные вещественные квадратные матрицы порядка n , образующие кинетическую и потенциальную энергии и диссипативную функцию соответственно, q – вектор обобщенных координат размерности n .

Матрицу A будем рассматривать в виде

$$A = C - pB \quad (1.2)$$

где $p \geq 0$ – параметр нагрузки, C и B – симметричные вещественные матрицы. Зависимость (1.2) от параметра нагрузки характеризует так называемые простые системы [4]. Предполагается, что матрицы M , D , C и B положительно определены. Условие $D > 0$ означает, что система (1.1) чисто диссипативна.

Будем исследовать поведение собственных значений и устойчивость системы (1.1) в зависимости от параметра p . После подстановки $q = Xe^{\lambda t}$ придем к обобщенной задаче на собственные значения

$$L(\lambda, p)X = 0, \quad L(\lambda, p) = \lambda^2 M + \lambda D + C - pB \quad (1.3)$$

где X – собственный вектор (СВ) размерности n , а λ – собственное значение (СЗ).

С задачей (1.3) связаны $2n$ СЗ λ_i и соответствующих СВ X_i . СЗ λ определяются из характеристического уравнения

$$\det L(\lambda, p) = 0 \quad (1.4)$$

Так как матрицы M , D , C , B и параметр p вещественны, то наряду с λ и X комплексно-сопряженные величины $\bar{\lambda}$ и \bar{X} также являются соответственно СЗ и СВ в задаче

$$L(\bar{\lambda}, p)\bar{X} = 0 \quad (1.5)$$

Матричные операторы в (1.3) и (1.5) взаимно сопряжены.

Если λ_i — простые корни уравнения (1.4), то общее решение уравнений движения (1.1) имеет вид

$$q(t) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i X_i \exp(\lambda_i t) \quad (1.6)$$

где α_i — постоянные, определяемые начальными условиями. Разложение (1.6) справедливо и для r -кратных корней λ_i , если число линейно независимых СВ X_i , соответствующих λ_i , равно r .

Пусть СВ λ в (1.3) соответствует СВ X . Умножим первое равенство в (1.3) скалярно на X . Результат будем рассматривать как квадратное уравнение относительно λ . Его решения равны

$$\lambda_{1,2} = (-d \pm \sqrt{S})/(2m), \quad S = d^2 - 4m(c - pb) \quad (1.7)$$

$$d = (DX, X), \quad m = (MX, X), \quad c = (CX, X), \quad b = (BX, X) \quad (1.8)$$

$$(X, Y) = X^T \bar{Y} = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

Вектор X будем считать нормированным

$$(X, X) = 1 \quad (1.9)$$

Так как матрицы M, D, C, B положительно определены, из (1.8) получаем $m > 0, d > 0, c > 0, b > 0$ (1.10)

Если СВ λ вещественно, то и соответствующий СВ X действительный с точностью до произвольного комплексного множителя. Для простоты будем считать его действительным.

Рассмотрим дискриминант S в (1.7). Пусть λ — СВ, которому соответствует СВ X . Если $S < 0$, то ввиду (1.10) корни (1.7) будут комплексно-сопряженными. Следовательно, оба корня (1.7) — СВ задачи (1.3), которым соответствуют комплексно-сопряженные СВ. Однако, если $S > 0$, то корни (1.7) вещественны, при этом лишь один из них является СВ λ задачи (1.3), которому соответствует СВ X . Второй корень (1.7) может быть лишним. Априори нельзя установить верный знак перед радикалом в выражении (1.7).

При $p = 0$ согласно (1.7), (1.10) все СВ лежат в левой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Следовательно, система (1.1) устойчива. При возрастании p некоторые λ могут перейти на правую полуплоскость, что означает потерю устойчивости.

Обобщенную задачу на СВ (1.3) путем удвоения размерности можно свести к обыкновенной задаче $KU = \lambda U$ с несимметричной матрицей $K(p)$. Однопараметрическое семейство вещественных матриц общего вида характеризуется [10, 11] простыми СВ, а при отдельных изолированных значениях параметра — двукратными вещественными СВ λ_0 с жордановой клеткой порядка 2. От более сложных особенностей можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства. Рассмотрим слияние комплексно-сопряженной пары λ и $\bar{\lambda}$ в одно действительное СВ λ_0 . При слиянии СВ также сливаются и комплексно-сопряженные СВ X и \bar{X} , соответствующие λ и $\bar{\lambda}$. Случай, когда двукратному корню λ_0 соответствует один СВ X_0 , называется сильным взаимодействием [12]¹, которое характеризуется ортогональными направлениями сближения и расхождения СВ на комплексной плоскости.

¹ См. также: Сейранян А.П. Взаимодействие собственных значений: Препринт № 446. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1990. 37 с.

В точке кратности $p = p_0$ СЗ перестают быть дифференцируемыми. При малых $\Delta p = p - p_0$ разложения для λ имеют вид [12]

$$\lambda = \lambda_0 \pm \lambda_1 \sqrt{\Delta p} + O(|\Delta p|)$$

$$\lambda_1^2 = (BX_0, X_0) / [(L_1(\lambda_0) X_1, X_0) + (MX_0, X_0)]$$

$$L_1(\lambda_0) = \partial L(\lambda_0, p_0) / \partial \lambda = 2\lambda_0 M + D$$

$$L(\lambda_0, p_0) X_0 = 0, L(\lambda_0, p_0) X_1 = -L_1(\lambda_0) X_0$$

(присоединенный вектор X_1 определен с точностью до слагаемого к X_0).

Так как λ_0 вещественно, векторы X_0 и X_1 также могут быть выбраны действительными. Числитель в выражении для λ_1^2 положителен, а знаменатель в общем случае не обращается в нуль [12], т.е. сильное взаимодействие не вырождается.

Условие ортогональности при сильном взаимодействии СЗ [12] в данном случае принимает вид

$$(L_1(\lambda_0) X_0, X_0) = 0 \quad (1.11)$$

Выразив отсюда λ_0 , ввиду положительной определенности D и M заключаем, что $\lambda_0 < 0$. Следовательно, сильное взаимодействие в диссипативных системах на действительной оси возможно лишь при отрицательных λ_0 . Выйдя на действительную ось, простые СЗ λ не могут сойти с нее, поскольку в противном случае это означало бы появление дополнительных корней $\bar{\lambda}$. Таким образом, сильное взаимодействие является механизмом, обеспечивающим выход комплексно-сопряженной пары СЗ на действительную ось и сход пары СЗ с действительной оси. При $p = p_0$ в общем решении $q(t)$ уравнений движения (1.1) появляются секулярные члены

$$\alpha_1 X_0 \exp(\lambda_0 t) + \alpha_2 (X_0 t + X_1) \exp(\lambda_0 t)$$

где α_1, α_2 — постоянные. Это противоречит утверждениям ([7], с. 91, 95), что общее решение диссипативной системы (1.1) всегда имеет вид (1.6).

Вычислим производную от простого СЗ λ по параметру p . Пусть этому СЗ отвечает СВ X . Используя то, что $(\bar{\lambda}, \bar{X})$ — решение сопряженной задачи (1.5), методом возмущений получим [13]

$$d\lambda/dp = b_c / (2\lambda m_c + d_c) \quad (1.12)$$

$$b_c = (BX, \bar{X}), m_c = (MX, \bar{X}), d_c = (DX, \bar{X}) \quad (1.13)$$

Если вектор X комплексный, то величины b_c, m_c, d_c также, вообще говоря, комплексные. Если вектор X действительный, то согласно (1.8), (1.13) $b_c = b, m_c = m, d_c = d$. Используя (1.7), в этом случае получаем

$$d\lambda/dp = \pm bS^{-1/2} \quad (1.14)$$

Далее проанализируем поведение СЗ на комплексной плоскости при изменении параметра p .

2. Рассмотрим сначала случай сильного демпфирования, когда $S > 0$ для всех ненулевых X при некотором значении $p \geq 0$. Согласно (1.7) при этом все СЗ действительны. Более того, любое СЗ λ получается из (1.7) либо со знаком плюс для всех СВ X , отвечающих этому λ , либо со знаком минус для всех СВ X ([3], теорема 7.4). СЗ λ первого типа назовем первичными, а второго — вторичными. Существует ровно n первичных СЗ и n вторичных с учетом кратностей ([3], теорема 7.6), причем любое первичное СЗ больше любого вторичного ([3], теорема 7.7). Матрица $L(\lambda, p)$ (1.3) в случае сильного демпфирования является полупростой [3, 12], т.е. r -кратному СЗ λ соответствуют r линейно независимых СВ X .

Замечание. Теоремы разд. 7.6 в [3], относящиеся к случаю сильного демпфирования в колебательной системе (1.1), доказаны при дополнительном условии $A > 0$. Однако все эти теоремы, кроме теоремы 7.2, остаются в силе и при произвольной симметричной матрице

А. Ключевым условием оказывается положительность дискриминанта $S = d^2 - 4ta$, где $a = (AX, X)$.

Неравенство $S > 0$ выполнено для всех ненулевых X и при всех $p \geq 0$, если

$$(\mu_{\min}^D)^2 - 4\mu_{\max}^M \mu_{\max}^C > 0 \quad (2.1)$$

где μ_{\min} , μ_{\max} — минимальное и максимальное собственные числа соответствующих матриц D , M и C . Действительно, используя соотношения (1.9) и (1.10), находим

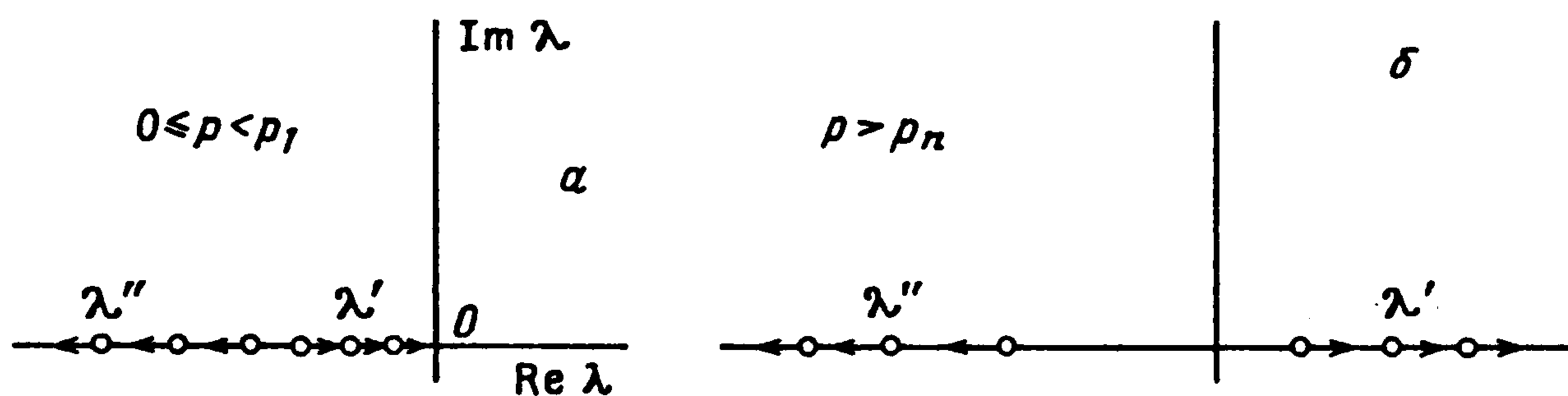
$$\begin{aligned} S &= d^2 - 4tc + 4ptb \geq d^2 - 4tc \geq \\ &\geq (\mu_{\min}^D)^2 - 4\mu_{\max}^M \mu_{\max}^C > 0 \end{aligned}$$

Условие (2.1) назовем достаточным условием сильного демпфирования. Ниже в этом разделе будем полагать это условие выполненным. Тогда согласно (1.7) при $p = 0$ все СЗ λ отрицательны, а при $p > 0$, по крайней мере, действительны ввиду $S > 0$.

Согласно (1.10), (1.14) для первичных λ' и вторичных λ'' простых СЗ имеем

$$d\lambda'/dp = bS^{-1/2} > 0, \quad d\lambda''/dp = -bS^{-1/2} < 0 \quad (2.2)$$

Так как число первичных λ' и вторичных λ'' СЗ равно n , то картина зависимости СЗ от p следующая: при $p = 0$ все λ отрицательные, при увеличении параметра n первичных λ' монотонно возрастают, а n вторичных λ'' монотонно убывают, фиг. 1, а. СЗ отмечены кружками, стрелки показывают направление движения λ при возрастании p .



Фиг. 1

При столкновении двух СЗ они проходят друг сквозь друга, не сходя с действительной оси, и двукратному корню λ_0 соответствуют два линейно независимых СВ. Такой тип слияния СЗ, характеризующийся неизменным направлением их движения при сближении и расхождении, называется слабым взаимодействием [12] (см. также сноску 1). При слабом взаимодействии СЗ остаются дифференцируемыми и в момент столкновения.

Первичные СЗ λ' в своем движении вправо по действительной оси могут проходить через нуль. Положив в (1.3) $\lambda = 0$, приходим к задаче

$$CX = pBX \quad (2.3)$$

Таким образом, прохождение λ' через нуль наблюдается при значениях параметра p , равных СЗ p_1, p_2, \dots, p_n задачи (2.3). При этом $c = pb$ и согласно (1.7), (2.2)

$$\lambda' = 0, \quad d\lambda'/dp = b/d > 0$$

Минимальное СЗ $p_1 = p_c$ задачи (2.3) является критическим: при $p > p_c$ система (1.1) теряет устойчивость статическим путем (дивергенция). При $p < p_c$ движения системы (1.1) монотонно затухают, так как все λ отрицательны.

При $p > p_n$, где p_n — максимальное СЗ задачи (2.3), все n первичных СЗ λ' исходной задачи (1.3) становятся положительными. При дальнейшем увеличении

p все λ' неограниченно возрастают, а n вторичных СЗ λ'' неограниченно убывают (фиг. 1, б). Это согласуется с известными результатами [5].

Картина поведения СЗ λ несколько усложняется в случае кратной нагрузки p , т.е. когда в задаче (2.3) какому-либо СЗ p_k соответствует $g > 1$ линейно независимых СВ X_1, X_2, \dots, X_g . Это означает, что значению параметра $p = p_k$ в исходной задаче (1.3) отвечает g -кратное СЗ $\lambda = 0$ с СВ X_1, X_2, \dots, X_g . Разложение кратного нуля при малых $|\Delta p|$, $\Delta p = p - p_k$, имеет вид $\lambda = \lambda_1 \Delta p + o(|\Delta p|)$, где величины λ_1 определяются из уравнения [12]

$$\det \|(BX_i, X_j) - \lambda_1 (DX_i, X_j)\| = 0, i, j = 1, 2, \dots, g$$

Ввиду положительной определенности матриц B и D все g корней λ_1 этого уравнения положительны. Следовательно, при увеличении $p > p_k$ с отрицательной на положительную полуось переходит сразу g первичных СЗ λ' .

Такой случай, например, реализуется, когда матрицы B и C совпадают: $B = C$. Тогда задача на СЗ (1.3) при $p = p_c = 1$ принимает вид $(\lambda^2 M + \lambda D) X = 0$. Отсюда следует, что n отрицательных СЗ определяются из задачи $DX = -\lambda'' MX$, а остальные n СЗ являются нулевыми: $\lambda' = 0$. При увеличении $p > 1$ эти n СЗ λ' переходят на положительную полуось и расходятся.

3. Для понимания эволюции СЗ в случае отрицательного дискриминанта S рассмотрим сначала частный случай. Пусть $D = \gamma M$, где $\gamma = \text{const} > 0$. Подставляя это выражение в (1.3), приходим к задаче о колебаниях консервативной системы

$$(-M\omega^2 + C - pB) X = 0 \quad (-\omega^2 = \lambda^2 + \gamma\lambda) \quad (3.1)$$

Отсюда $\omega^2 = (c - pb)/m$. При $p = 0$ все n СЗ ω_i^2 задачи (3.1) положительны. Будем считать, что $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$. При возрастании параметра p в соответствии с теоремой Релея все частоты ω^2 убывают

$$d\omega^2/dp = -b/m < 0$$

(эта формула получена методом возмущений [13] с использованием вещественности ω^2 и X в (3.1)). При $p = p_1, p_2, \dots, p_n$, где p_k определяются из (2.3), СЗ ω^2 проходят через нуль и при дальнейшем возрастании p становятся все отрицательными.

Выразим λ через ω^2 и найдем производную по p

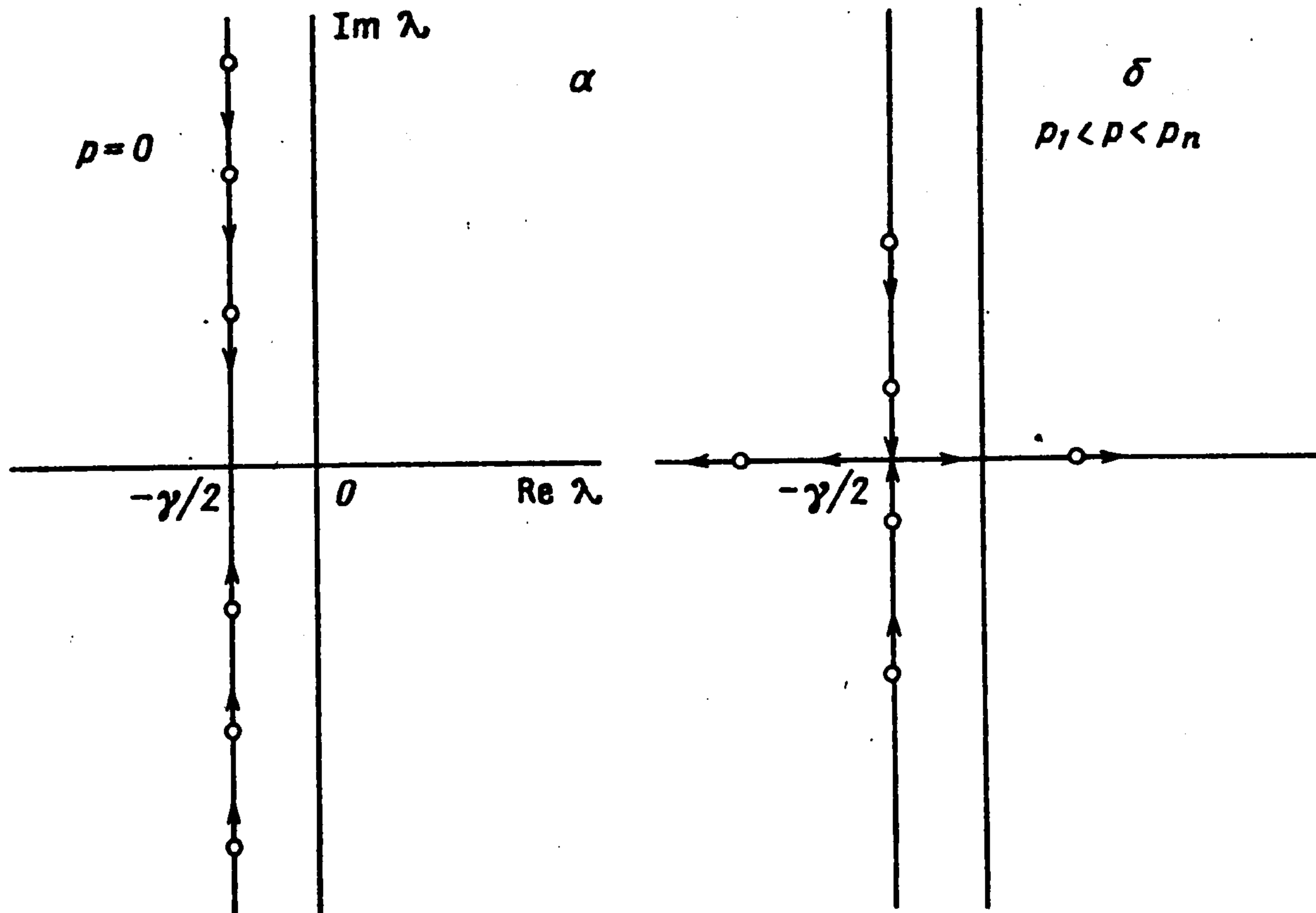
$$\lambda = -\gamma/2 \pm \sqrt{S}, \quad d\lambda/dp = \pm b/(2m\sqrt{S}) \quad (3.2)$$

$$S = \gamma^2/4 - \omega^2 = \gamma^2/4 + (pb - c)/m$$

Если $S < 0$, то знаки плюс и минус в (3.2) соответствуют комплексно-сопряженным СЗ λ .

Предположим, что постоянная γ удовлетворяет неравенству $\gamma^2/4 < \omega_1^2$. Тогда при $p = 0$ имеем $S < 0$ для всех СВ X , так как $c/m \geq \omega_1^2$ при любом ненулевом X . Следовательно, согласно (3.2) при $p = 0$ все λ комплексные, причем $\text{Re } \lambda = -\gamma/2 < 0$. Это означает, что все СЗ λ располагаются в левой комплексной плоскости на прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстоянии $\gamma/2$ (фиг. 2, а). При увеличении p комплексно-сопряженные λ сближаются по этой прямой, попарно сливаются (при этом $S = 0$) и далее расходятся по действительной оси в разные стороны (фиг. 2, б). СЗ λ проходят через нуль при $p = p_1, p_2, \dots, p_n$.

Неравенство $\gamma^2/4 > \omega_n^2$ есть условие сильного демпфирования. Этот случай был рассмотрен в разд. 2. Если же $\omega_1^2 < \gamma^2/4 < \omega_n^2$, то при $p = 0$ часть СЗ комплексные, а часть — отрицательные. При возрастании p согласно (3.2) комплексно-сопряженные λ сближаются по прямой $\text{Re } \lambda = -\gamma/2$, попарно сливаются (при этом $S = 0$), а затем расходятся в разные стороны по действительной оси. Что касается отрицательных λ , то половина из них (λ') движется вправо, а другая половина (λ'') — влево по действительной оси, причем для любых λ', λ'' и при всех $p \geq 0$ имеем $\lambda'' < -\gamma/2 < \lambda'$.



Фиг. 2

4. Рассмотрим теперь случай слабого демпфирования, когда при $p = 0$ дискриминант $S \ll 0$ для всех X , удовлетворяющих (1.9). При этом согласно (1.7) все СЗ λ — комплексные величины, мало отличающиеся от частот соответствующей консервативной системы. Такая ситуация реализуется, например, когда выполнено неравенство

$$S = d^2 - 4mc \leq (\mu_{\max}^D)^2 - 4\mu_{\min}^M \mu_{\min}^C \ll 0 \quad (4.1)$$

где μ_{\max} , μ_{\min} — максимальное и минимальное собственные числа матриц D , M и C .

Для исследования этого случая введем малое демпфирование ϵD , где $\epsilon > 0$ — малый параметр, D — положительно определенная матрица, причем в соответствии с (4.1) $\mu_{\max}^D \sim (\mu_{\min}^M \mu_{\min}^C)^{1/2}$. Задача (1.3) запишется в виде

$$L_2(\lambda, p, \epsilon) X = 0, \quad L_2(\lambda, p, \epsilon) = \lambda^2 M + \epsilon \lambda D + C - pB \quad (4.2)$$

Считая λ простым СЗ, разложим λ и X по ϵ :

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots, \quad X = X_0 + \epsilon X_1 + \dots \quad (4.3)$$

Подставив (4.3) в (4.2), для первых членов разложений найдем

$$L_2(\lambda_0, p, 0) X_0 = 0 \quad (4.4)$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} (DX_0, X_0) / (MX_0, X_0) \quad (4.5)$$

$$L_2(\lambda_0, p, 0) X_1 = -\lambda_0 (2\lambda_1 M + D) X_0$$

(эта формула для λ_1 получена методом возмущений [13] с использованием вещественности λ_0^2 и X_0 в (4.4)). Для величины $\epsilon \lambda_1$ можно получить оценки

$$-\epsilon \nu_{\max} / 2 \leq \epsilon \lambda_1 \leq -\epsilon \nu_{\min} / 2 \quad (4.6)$$

где $\nu_{\max} > 0$ и $\nu_{\min} > 0$ — максимальное и минимальное СЗ задачи $DX = \nu MX$.

Поведение частот консервативной системы, соответствующей нулевому приближению (4.4), уже обсуждалось в разд. 3. Согласно (4.5), (4.6) наличие слабого демпфирования сдвигает в первом приближении все частоты консервативной системы на величины $\epsilon \lambda_1 < 0$.

Разложим производную $d\lambda/dp$ по ϵ . Так как λ и X , вообще говоря, комплексны, воспользуемся выражением (1.12). Подставляя в (1.12) разложения (4.3), в первом приближении по ϵ получим

$$\begin{aligned} d\lambda/dp &= \frac{1}{2} b_0 (\lambda_0 m_0)^{-1} + \epsilon k \\ k &= (\lambda_0 m_0)^{-1} [b_1 - \frac{1}{2} b_0 (\lambda_0 m_0)^{-1} (\lambda_1 m_0 + 2\lambda_0 m_1 + d_0/2)] \\ b_0 &= (BX_0, \bar{X}_0), m_0 = (MX_0, \bar{X}_0), d_0 = (DX_0, \bar{X}_0) \\ b_1 &= (BX_0, \bar{X}_1), m_1 = (MX_0, \bar{X}_1) \end{aligned} \quad (4.7)$$

При малых p все величины λ_0 чисто мнимые, λ_1 — действительные, X_0 могут быть выбраны действительными, а X_1 согласно (4.5) могут быть выбраны чисто мнимыми. При таком выборе X_0 и X_1 величины b_0, m_0, d_0 положительные, а b_1, m_1 — чисто мнимые. Следовательно, коэффициент k действительный, а величина $b_0 (2\lambda_0 m_0)^{-1}$ — чисто мнимая, причем, если $\text{Im } \lambda_0 > 0$, то $\text{Im}(d\lambda/dp) < 0$, и, наоборот, если $\text{Im } \lambda_0 < 0$, то $\text{Im}(d\lambda/dp) > 0$ (фиг. 3). Таким образом, для чисто мнимых λ_0 производная $d\lambda/dp$ является комплексным числом, действительная часть которого имеет порядок ϵ . Если же λ_0 вещественно, то и все величины в (4.5) — (4.7) действительные.

Эволюция частот колебаний слабо демпфированной системы иллюстрируется фиг. 3. При $p = 0$ комплексные СЗ λ лежат в полосе (4.6). При увеличении p они сближаются, оставаясь в пределах этой полосы, попарно сливаются, а затем расходятся по действительной оси в разные стороны. Переход СЗ через нуль, как и прежде, определяется только матрицей $A = C - pB$. Потеря устойчивости системы происходит при $p > p_1$.

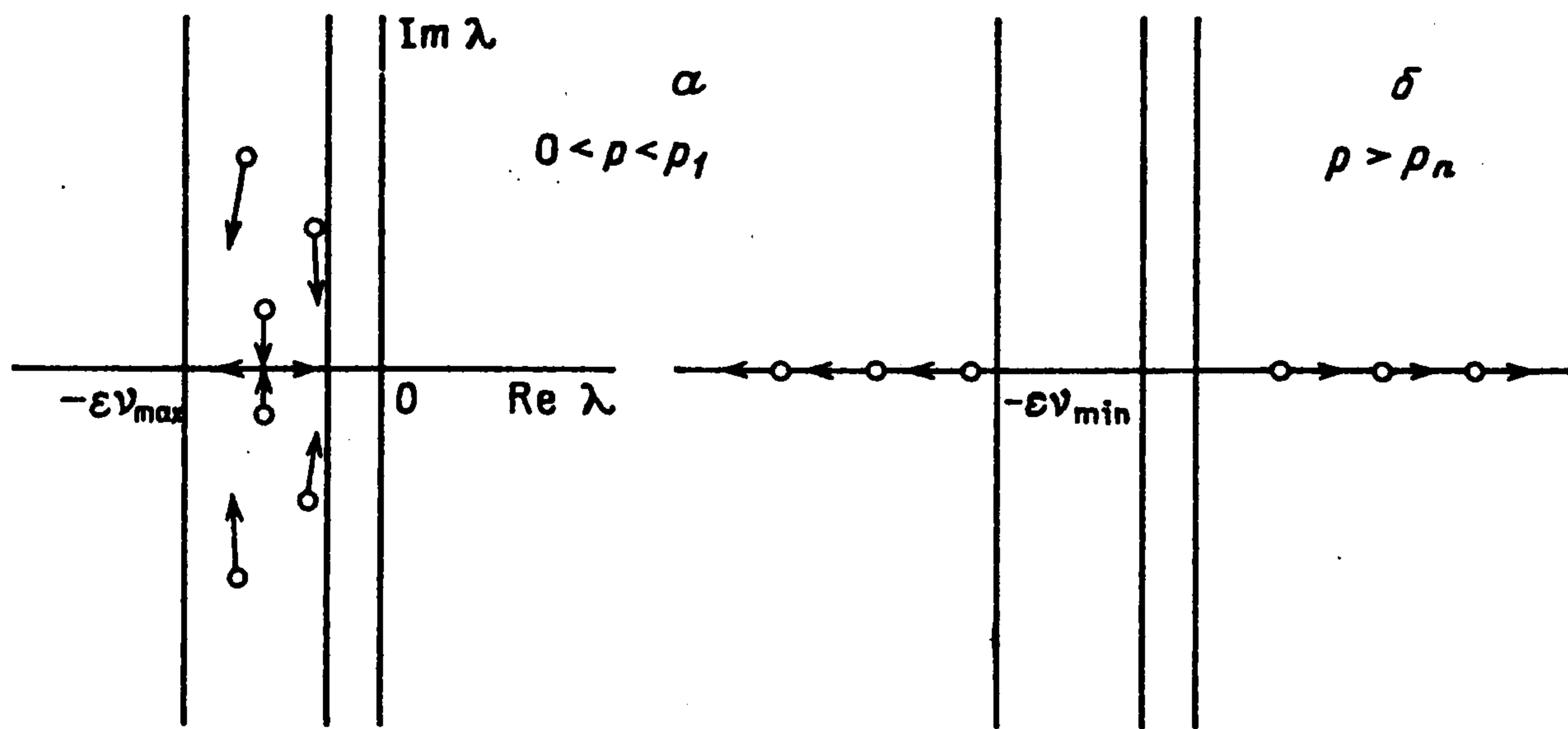
5. Исследуем эволюцию СЗ λ при изменении параметра p в случае произвольного демпфирования $D > 0$.

При $p > p_n$, где p_n — максимальное СЗ задачи (2.3), дискриминант S положителен при всех ненулевых X . Таким образом, при $p > p_n$ система (1.1), (1.2) становится сильно демпфированной. Согласно результатам разд. 2 и положительным первичным СЗ λ' при увеличении $p > p_n$ движутся вправо по действительной оси, а n отрицательных вторичных СЗ λ'' движутся по ней влево.

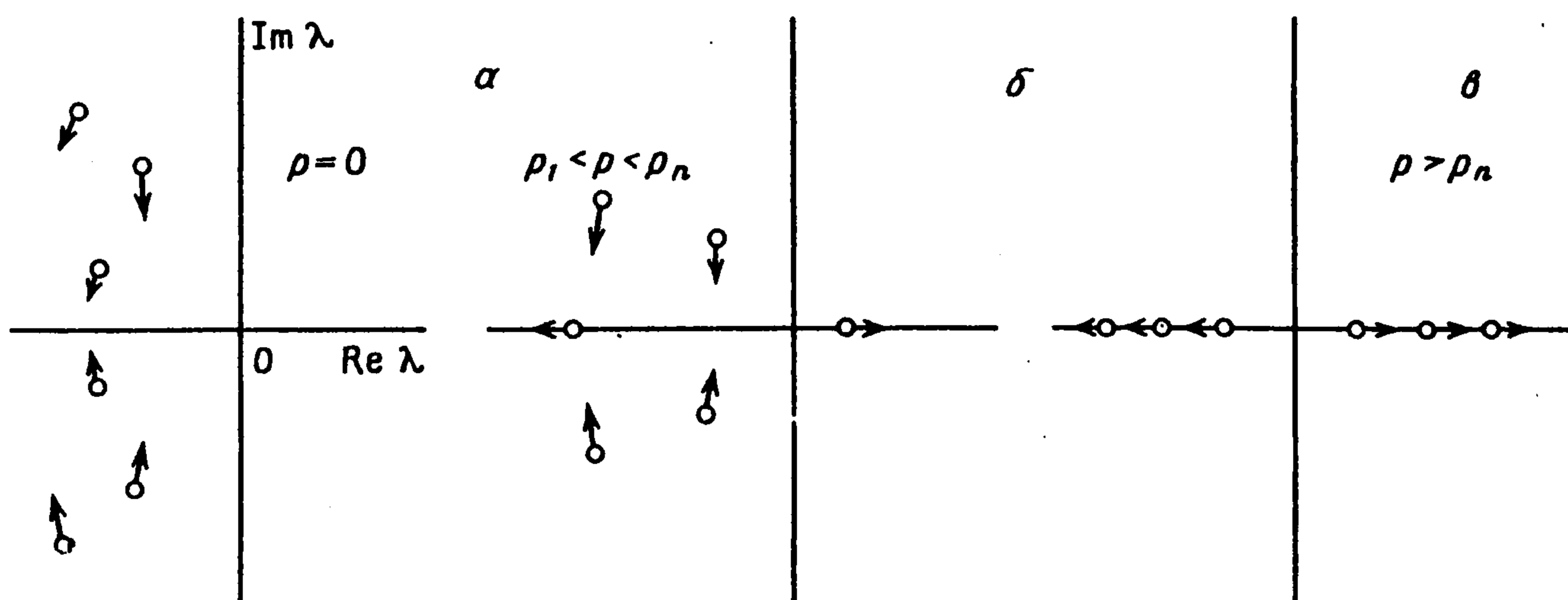
Пусть при $p = 0$ все λ — комплексные величины, что согласно (1.7) эквивалентно условию отрицательности дискриминанта S при $p = 0$ для всех СВ X . Опишем эволюцию СЗ λ при уменьшении p от больших положительных значений $p > p_n$ до нуля. Вначале при уменьшении параметра n положительных первичных λ' монотонно убывают, а n отрицательных вторичных λ'' монотонно возрастают. При $p < p_n$ первичные СЗ встречаются с вторичными. При столкновении λ' с λ'' имеем $S = 0$, что согласно (1.7) можно записать в виде $2\lambda m + d = 0$. Последнее равенство есть условие ортогональности (1.11), означающее сильное взаимодействие λ' и λ'' [12] (см. также сноску 1). Таким образом, при уменьшении p происходит n сильных парных взаимодействий, в результате чего действительные λ становятся комплексно-сопряженными величинами. Эволюция СЗ показана на фиг. 4, стрелки указывают движение λ при увеличении p .

Если же при $p = 0$ не все λ комплексные, то соответственно при уменьшении p от больших положительных значений до нуля некоторые пары СЗ сближаются, но не встречаются и остаются на действительной оси. Для этих λ дискриминант S остается положительным. Эволюция СЗ в этом случае начинается с положения, показанного на фиг. 4, б (конфигурация СЗ при больших p по-прежнему соответствует фиг. 4, в).

6. Выше рассматривались простые системы, характеризуемые линейной зависимостью матрицы A от параметра нагрузки p [4]. Однако полученные результаты допускают обобщение и на нелинейный случай, если только по-прежнему матрица $A(p)$ симметрична при всех $p \geq p_0$, матрица $A(p_0)$ положительно определена, а матрица $B = B(p) = dA/dp$ отрицательно определена при $p \geq p_0$, где p_0 — фиксированное число. Отличие от рассмотренного ранее случая состоит в общем коли-



Фиг. 3



Фиг. 4

честве СЗ, переходящих на положительную полуось при увеличении p . Их число определяется числом СВ в задаче $A(p)X = 0$ при $p \geq p_0$ и может быть меньше n . Критические значения p_k находятся из уравнения $\det A(p) = 0$. Если $\det A(p) \neq 0$ при всех $p \geq p_0$, то все λ при увеличении p остаются в левой полуплоскости.

7. Рассмотрим задачу (1.1), в которой варьируется матрица диссипативных сил $D(p)$. Предположим, что $D(p_0) > 0$ и $D_1 = dD/dp < 0$ при $p \geq p_0$. Постоянные матрицы M и A будем полагать положительно определенными. Сохраняя прежние обозначения (1.8), (1.13), имеем

$$\lambda = \frac{-d \pm \sqrt{S}}{2m}, \quad \frac{d\lambda}{dp} = -\frac{\lambda d_{c1}}{2\lambda m_c + d_c} \quad (7.1)$$

$$S = d^2 - 4ma, \quad a = (AX, X), \quad d_{c1} = (D_1X, \bar{X})$$

Величины с индексом c комплексные, если X — комплексный вектор. Для действительных $X \neq 0$ имеем $m_c = m > 0$, $d_c = d$, $d_{c1} = d_1 = (D_1X, X) < 0$ ввиду $M > 0$, $D_1 = dD/dp < 0$.

Рассмотрим сначала случай достаточно большого демпфирования $D(p_0)$, так что при $p = p_0$ выполняется неравенство $S > 0$ для всех ненулевых X (условие сильного демпфирования). Так как при $p = p_0$ имеем $d > 0$, то из (7.1) с учетом $m > 0$, $a > 0$ следует, что все СЗ λ отрицательные. Поскольку соответствующие СВ X вещественны, то, опуская индекс c во втором равенстве (7.1) и подставляя первое равенство (7.1) во второе, получим

$$d\lambda/dp = -\frac{1}{2} d_1 m^{-1} (1 \mp dS^{-1/2}) \quad (7.2)$$

Из неравенства $S > 0$ для всех ненулевых X вытекает, что при $p = p_0$ имеется n первичных СЗ λ' и n вторичных λ'' , причем $\lambda'' < \lambda'$ для любых λ', λ'' . Первичным

λ' отвечает знак плюс в (7.1) и минус в (7.2), а вторичным λ'' — знак минус в (7.1) и плюс в (7.2). Из (7.2) с учетом $d_1 < 0, m > 0, a > 0, d > 0, S > 0$ следует, что производные по p первичных СЗ λ' отрицательны, а вторичных λ'' — положительны.

Следовательно, n пар СЗ при увеличении $p > p_0$ движутся навстречу друг другу, затем при встрече ($S = 0$) происходит сильное взаимодействие и СЗ становятся комплексно-сопряженными. Эволюция одной пары СЗ показана на фиг. 5.

При дальнейшем увеличении p возможен переход пары $\lambda, \bar{\lambda}$ на правую полуплоскость. При этом происходит потеря колебательной устойчивости системы (1.1) (флаттер). В критической точке $p = p_c$ имеем $\lambda = \pm i\omega$ и $d = 0$. Интересно отметить, что не обязательно $D(p_c) X = 0$, а направление вектора $d\lambda/dp|_{p_c}$ может быть любым.

Пример. Положим

$$n = 2, M = \text{diag}(3, 1), A = \text{diag}(2, 2)$$

$$D = D(p) = \begin{vmatrix} -(1+2x)p & 1+yp \\ 1+yp & -p \end{vmatrix}$$

где x и y малы. Матрицы M и A положительно определены. В случае $x = y = 0$ матрица $D_1 = dD/dp$ (не зависящая от p) отрицательно определена, а при $p = p_0 = -6$ матрица $D(p_0)$ положительно определена, причем выполнено условие сильного демпфирования

$$(\mu_{\min}^D)^2 - 4\mu_{\max}^M \mu_{\max}^A = 1 > 0$$

(ср. (2.1)). Эти свойства $D(p)$ сохраняются и при малых ненулевых x и y .

Характеристическое уравнение для СЗ λ при $p = 0$ имеет простой чисто мнимый корень $\lambda = i$, которому отвечает СВ

$$\sqrt{2} X = \begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix}$$

причем $d\lambda/dp|_{p=0} = x + yi$. Таким образом,

$$\sqrt{2} D(0) X = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \neq 0$$

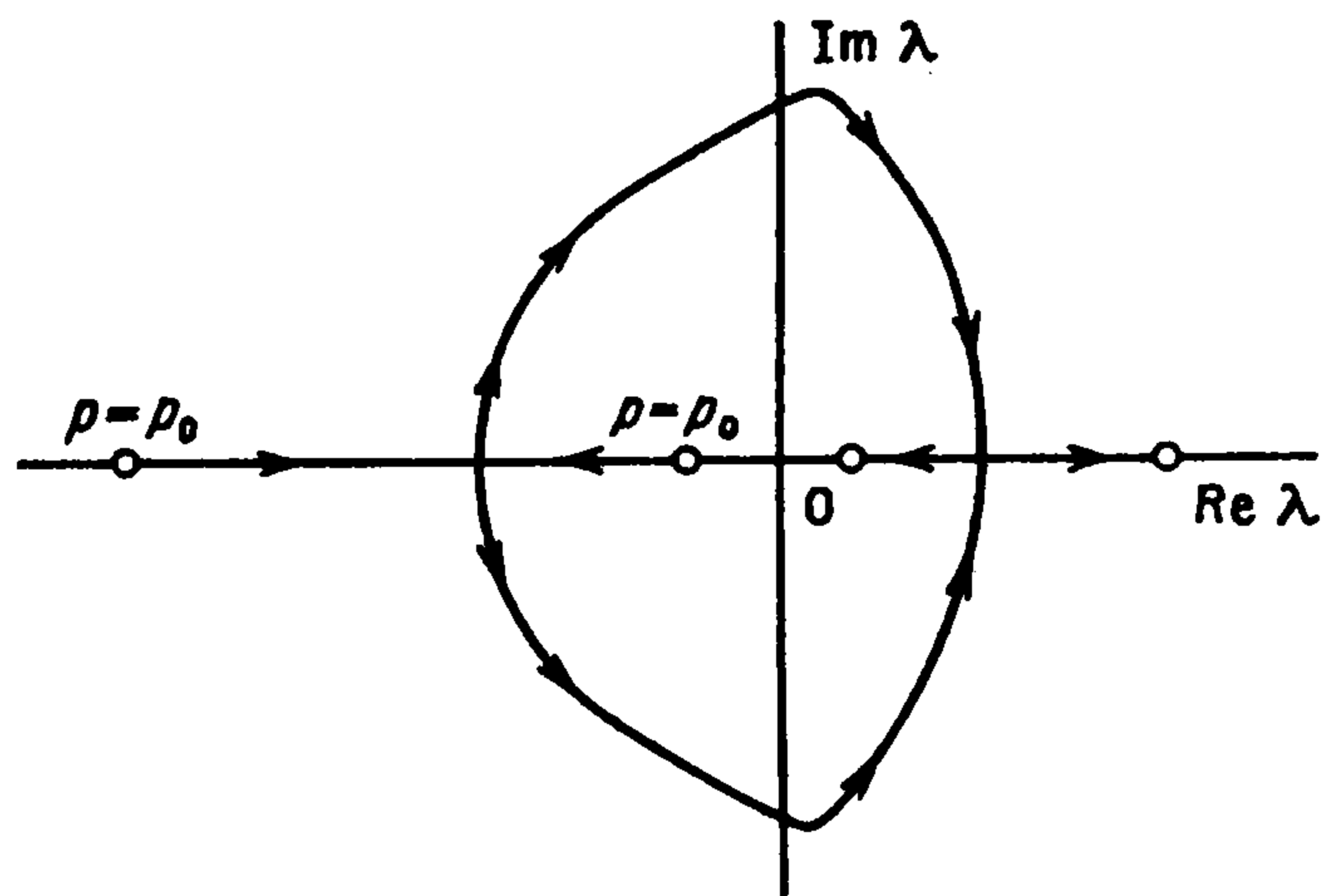
(и, более того, матрица $D(0)$ невырождена), а $d\lambda/dp$ в зависимости от выбора x и y может иметь вещественную и мнимую части любого знака (здесь отвлекаемся от вопроса о том, является ли значение $p = 0$ параметра p наименьшим, при котором СЗ пересекают мнимую ось).

Этот пример показывает, что поведение частот системы при варьировании матрицы диссипативных сил D может быть весьма сложным, во всяком случае сложнее, чем при $n = 1$.

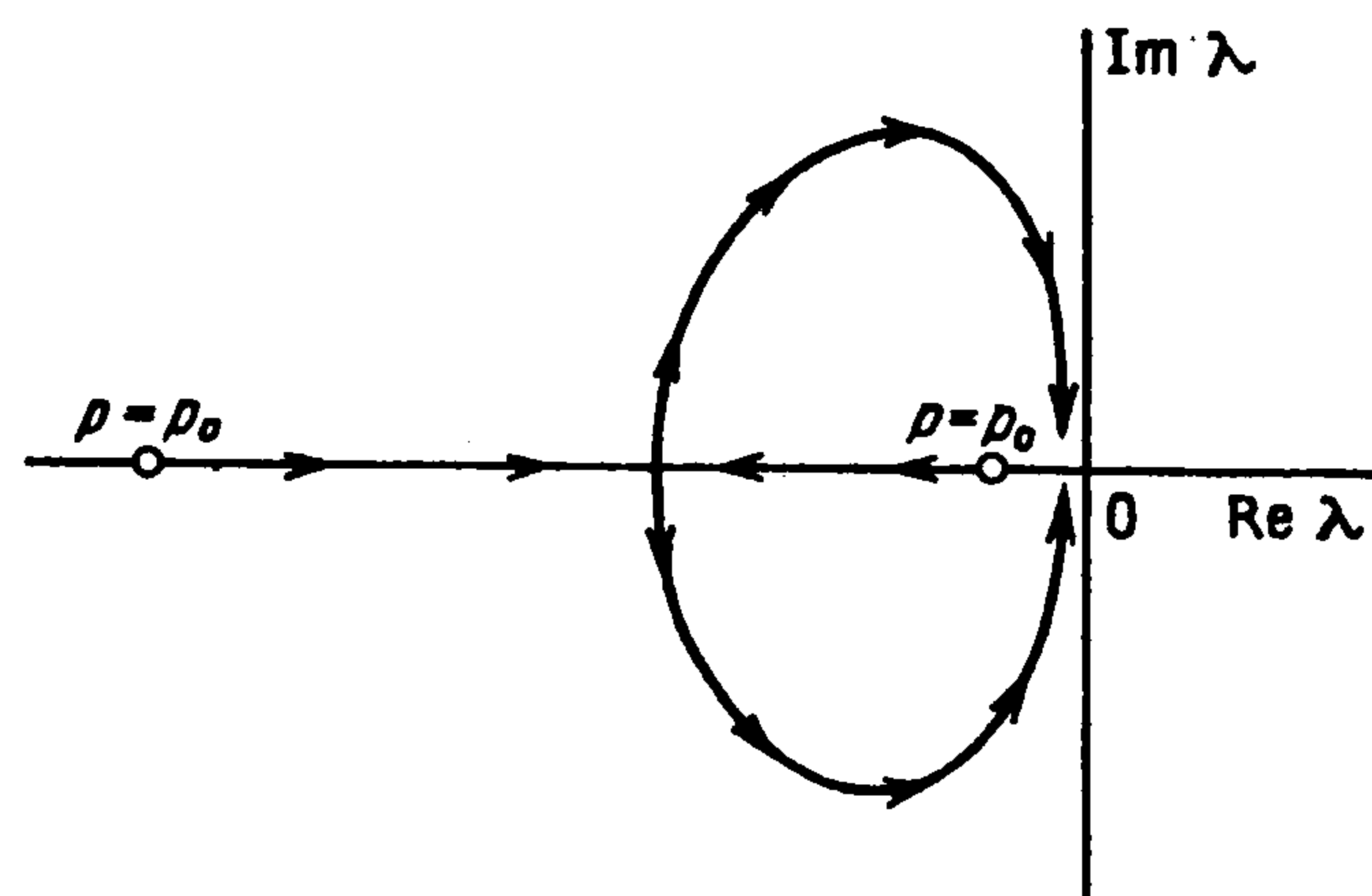
На фиг. 5 представлена полная возможная эволюция любой пары СЗ λ , когда положительно определенная матрица $D(p)$, удовлетворяющая условию сильного демпфирования при $p = p_0$, при возрастании p становится отрицательно определенной, причем ее собственные числа неограниченно возрастают по абсолютной величине. Если же эти условия не выполняются, то пара СЗ проходит лишь часть пути, указанного на фиг. 5. Например, если матрица $D(p)$ остается положительно определенной при $p \geq p_0$, то перехода λ на правую полуплоскость не происходит.

Совокупность эволюций n пар СЗ λ , представленных на фиг. 5, определяет эволюцию полного набора СЗ системы (1.1) при монотонном ($dD/dp < 0$) изменении матрицы диссипативных сил $D(p)$.

8. Рассмотрим задачу (1.1), в которой варьируется матрица масс $M(p)$. Предположим, что начальная масса $M(p_0)$ достаточно мала, так что при $p = p_0$ выполняется условие сильного демпфирования ($d^2 > 4ma$ для всех ненулевых X). Полагая, что $M_1 = dM/dp > 0$ при $p \geq p_0$, исследуем влияние увеличения массы на частоты колебаний. Постоянные симметричные матрицы D и A предполагаются положительно определенными.



Фиг. 5



Фиг. 6

СЗ λ вычисляются из первого соотношения (7.1), причем если λ вещественно, то

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{dm_1}{2m^2} \left[1 \mp \frac{1 - 2am d^{-2}}{(1 - 4amd^{-2})^{1/2}} \right], \quad m_1 = (M_1 X, X) \quad (8.1)$$

В случае очень малой массы ($m \ll d^2/(4a)$) в главном приближении по m получим

$$\lambda' = -\frac{a}{d} - \frac{a^2 m}{d^3}, \quad \lambda'' = -\frac{d}{m} + \frac{a}{d} \quad \frac{d\lambda'}{d\rho} = -\frac{a^2 m_1}{d^3}, \quad \frac{d\lambda''}{d\rho} = \frac{dm_1}{m^2} \quad (8.2)$$

В силу положительности величин m, a, d, m_1 из (8.1), (8.2) вновь следует, что n пар отрицательных λ', λ'' с увеличением ρ сближаются, попарно сливаются, а затем расходятся под прямым углом к действительной оси (сильное взаимодействие). Качественная картина эволюции одной пары СЗ представлена на фиг. 6. При неограниченном возрастании массы (с увеличением минимального собственного числа матрицы M) все частоты стремятся к нулю, при этом $\text{Im } \lambda / \text{Re } \lambda \rightarrow \infty$. Общая картина эволюции набора СЗ определяется совокупностью взаимодействий отдельных пар, показанных на фиг. 6.

Авторы благодарят В.В. Вескатова и В.Б. Лидского за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метелицын И.И. К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. Lancaster P. Lambda-matrices and vibrating systems. Oxford: Pergamon Press, 1966. 193 p.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
5. Лахаданов В.М. О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
6. Müller P.C. Stabilität und Matrizen. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 220 p.
7. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
8. Huseyin K. Vibrations and stability of multiple parameter systems. Alphen aan den Rijn: Noordhoff, 1978. 216 p.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.
10. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. Галин Д.М. О вещественных матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. Вып. 1. С. 241–242.
12. Сейранян А.П. Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // Strojnicky čas. 1991. Т. 42. № 3. С. 193–208.
13. Сейранян А.П., Шаранюк А.В. Анализ чувствительности частот колебаний механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 37–41.