В предельном случае коротких волн имеем уравнение, отличающееся от (5) заменой η на $\eta_2 - m_2\omega^2$, что совпадает с уравнением, исследованным ранее [2].

Автор благодарит В.С. Ленского и Э.В. Ленского за руководство и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M.A.* Propagation of elastic waves in a cylindrical bare containing a fluid // J. Appl. Phys. 1952. V. 23. N 9. P. 997–1005.
2. *Ленский В.С.* Релеевские движения в упругом полупространстве с несвободной границей // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 873–875.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1992

УДК 539.3

© 1993 г. В.Я. Терещенко

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТРЕЩИНАХ

Предлагается алгоритм, использующий вариационный метод граничных элементов и аналитический учет особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины при помощи сингулярного решения уравнения Ламе. Рассматриваемая постановка задачи о трещине учитывает все типы деформаций: нормальный отрыв, поперечный и продольный сдвиг; заданный вектор нормальных напряжений на поверхности трещины представляется в виде суммы регулярной составляющей и сингулярной составляющей, обусловленной наличием особой точки – вершины трещины, в результате реализуется особенность напряжений более высокого порядка в сравнении с существующими алгоритмами.

Возможность вариационной постановки для граничного функционала задач о трещинах отмечалась в [1] (см. дополнение Р.В. Гольдштейна), для численной реализации постановки использовался процесс Ритца на координатных функциях, учитывающих асимптотику решения вблизи особых точек контура трещины; далее указанная постановка развивалась в [2]. Проблема учета особенностей поля напряжений в окрестности вершины трещины использует как аналитические, так и численные приемы [3], в частности, при решении по МКЭ численное моделирование указанных особенностей связано с выбором специальных "сингулярных" конечных элементов, которые усложняют численную процедуру решения [3]. Описанные в [3] подходы позволяют реализовать особенности напряжений порядка $r_0^{-1/2}$ и r_0^{-1}, где r_0 – расстояние от вершины трещины.

В основу предлагаемого алгоритма положено численно-аналитическое моделирование особенности напряжений: во-первых, идея заключается в том, чтобы результат наличия особой точки рассматривать как поле напряжений, порожденное действием единичной силы, приложенной в этой точке; во-вторых, численная реализация использует аппарат метода граничных элементов для конструктивного описания особенности, в частности, концепцию кратных узлов [4].

1. Рассмотрим напряженное состояние упругой среды $G \subset E_7^{(m)}$ ($m = 2, 3$) с трещиной в плоскости $(x^{(1)}, x^{(2)})$; в предположении неограниченной протяженности полости трещины вдоль оси $x^{(3)}$ напряженное состояние может рассматриваться плоским и компонента нагрузки на контуре трещины S, вызывающая деформацию продольного сдвига (вдоль оси $x^{(3)}$), принимается равной нулю. Указанный тип деформации учитывается в пространственной постановке задачи ([3], с. 83) и возможности алгоритма для реализации этой постановки обсуждаются ниже. В дальнейшем для плоской области G контур трещины S рассматривается как внутренняя граница с особыми точками – вершинами трещины на оси $x^{(1)}$, ось $x^{(2)}$ – вертикальная ось симметрии.

Задача нахождения равновесного состояния среды G под действием равномерно распределенных на границе S напряжений $\sigma^{(22)} \equiv -\sigma_0$, $\sigma^{(12)} \equiv -\tau_0$ (обозначения частично заимствованы из [3]) соответствует [5] решению второй внешней задачи линейной изотропной теории упругости (без учета массовых сил). Эта задача однозначно разрешима [5] при условии регулярности на бесконечности искомых перемещений и напряжений ($\mathbf{u}(r)$, $\sigma(r) \to 0$, $r \to \infty$). Ее решение может быть заменено [5] решением эквивалентной вариационной задачи для квадратичного функционала энергии на регулярных на бесконечности допустимых функциях (ниже, при аппроксимации решения такими функциями являются дискретные граничные потенциалы [6–9], которые удовлетворяют указанным условиям регулярности), что соответствует нахождению решения с конечной энергией.

В свою очередь решение такой задачи может быть приведено (при соответствующем обосновании [6, 9]) к задаче минимизации граничного функционала вида

$$F(\mathbf{u}) = \int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\mathbf{u}\,ds - 2\int_S \mathbf{g}^{(\nu)}\mathbf{u}\,ds \tag{1.1}$$

на множестве решений $\mathbf{u} = (u^{(1)}, u^{(2)})$ однородного уравнения Ламе, обозначим это множество D. В (1.1) $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ – вектор искомых напряжений в точках $y = (y^{(1)}, y^{(2)}) \in S$ по направлению внешней к S нормали ν, $g^{(\nu)}$ – вектор заданных нормальных напряжений, который предлагается представить в виде

$$\mathbf{g}^{(\nu)} = \mathbf{g}_1^{(\nu)} + \mathbf{g}_2^{(\nu)} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{g}_1^{(\nu)}(\sigma_0, \tau_0)$ – регулярная составляющая

$$\mathbf{g}_1^{(\nu)} = (-\tau_0)l^{(1)} + (-\sigma_0)l^{(2)} \tag{1.3}$$

($l^{(i)}$ ($i = 1, 2$) – направляющие косинусы нормали ν); $g_2^{(\nu)}$ – сингулярная составляющая, обусловленная наличием особой точки – вершины трещины $y_0 \in S$ и соответствующая сингулярному решению уравнения Ламе при положении источника в точке y_0. Для определения $g_2^{(\nu)}$ используются компоненты тензора напряжений $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ ($\mathbf{V}$ – тензор Сомильяны [10]) и $g_2^{(\nu)}$ – компонента $\mathbf{t}^{(\nu)}(\Sigma \mathbf{v}^{(1j)})$, где $\{\mathbf{v}^{(1j)}\}_{j=1,2}$ – вектор-строка тензора $\mathbf{V}(x, y)$ при $x = y_0$, $y \in S$. Таким образом, описанный прием позволяет реализовать особенность поля напряжений в окрестности вершины трещины порядка r_0^{-2} (так как указанную особенность имеют [10] компоненты тензора $\mathbf{T}$ при $y \to x$).

Пусть вектор перемещений $\mathbf{u}_0$ – решение задачи $\min_{\mathbf{u}} F(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in D$, тогда $\mathbf{u}_0$ удовлетворяют вариационному уравнению

$$\int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}\,ds - \int_S \mathbf{g}^{(\nu)}\mathbf{u}\,ds = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in D \tag{1.4}$$

Отсюда, в частности, следует, что указанная особенность искомых напряжений в окрестности точки $y_0 \in S$ реализуется интегрально. Алгоритм вариационного метода граничных элементов [9], по сути, сводится к аппроксимации и решению уравнения (1.4).

2. Согласно описанному ранее алгоритму [9], допустимые функции дискретной вариационной задачи (речь идет об аппроксимации множества D и функционала (1.1)) есть последовательность дискретных граничных потенциалов с искомой плотностью в виде интерполяционных функций МКЭ, аппроксимирующих в точках конечного (граничного) элемента поле перемещений и напряжений. Глобальные интерполяционные функции в точках дискретной границы, составленные с учетом условия согласованности граничных элементов, имеют вид

$$\mathbf{u}_N=\sum_n\sum_k \mathbf{U}_{nk}\psi_k,\quad \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)=\sum_n\sum_k \mathbf{t}^{(\nu_n)}(U_{nk}\psi_k) \tag{2.1}$$

где U_{nk} – вектор искомых перемещений в узлах $k=1,\dots,K$ граничного элемента Δs_n и $S_\Delta=U\Delta s_n$ $(n=1,\dots,N)$ – дискретная граница. Таким образом, в (2.1) и далее суммирование по k и n проводится соответственно от 1 до K и от 1 до N. Порядок аппроксимаций (2.1) определяется порядком базисных функций МГЭ $\psi_k(\eta)$, где η – локальная координата точек элемента Δs_n и ν_n – внешняя нормаль в точках Δs_n. В дальнейшем индексом Δ отмечены величины, относящиеся к границе S_Δ, или области G_Δ.

Применение процесса Ритца для решения дискретной вариационной задачи на аппроксимациях (2.1) приводит к решению дискретного вариационного уравнения (аппроксимирующего уравнение (1.4)), которое преобразуется [6, 9] в систему Ритца линейных алгебраических уравнений порядка $2K_N$ относительно компонент $U_{nk}^{(i)}$ $(i=1,2)$, где K_N – число узлов S_Δ. Симметричная матрица этой системы имеет ленточную структуру, ширина ленты зависит от порядка аппроксимации (2.1).

Для примера используем линейную изопараметрическую аппроксимацию, тогда $k=1,2$, $\eta\in[-1,1]$ и параметрическое уравнение контура трещины S_Δ имеет вид

$$y_\Delta^{(i)}(\eta)=\sum_n\sum_k y_{nk}^{(i)}\psi_k(\eta),\quad i=1,2 \tag{2.2}$$

где $y_{nk}^{(i)}$ – декартовы координаты узлов разбиения S_Δ. Система Ритца формируется из дискретных граничных уравнений, которые составляются по "шаблону" ([9], с. 448). Аппроксимация в точках S_Δ вектора заданных напряжений (см. (1.2)) принята подобно (2.1) в виде

$$\mathbf{g}_N^{(\nu_\Delta)}=\sum_n\sum_k g_{nk}^{(i)}\psi_k(\eta),\quad \eta\in\Delta s_n$$

где $g_{nk}^{(i)}$ $(i=1,2)$ – компонента узловых значений указанной аппроксимации; вычисление $g_{1nk}^{(i)}$ использует соотношение (1.3), вычисление $g_{2nk}^{(i)}$ использует известные формулы [10] для компонент тензора $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ (см. разд. 1) и эти узловые значения зависят от расстояния узла k от узла в окрестности вершины трещины

$$r_{0n}=\left\{\sum_{i=1}^{2}(Y_{0n}^{(i)})^2\right\}^{1/2},\quad Y_{0n}^{(i)}=y_{nk}^{(i)}-y_{nk_\pm}^{(i)},\quad \forall n$$

При записи уравнений в окрестности вершины трещины рассматриваются дополнительные симметрично расположенные узлы k_+, k_- в достаточной малой (наперед заданной) окрестности вершины; этот прием (согласно концепции кратных узлов [4], с. 196) учитывает то, что в узле, совпадающем с вершиной трещины, компоненты напряжений $g_{2nk}^{(i)}$ $(i=1,2)$ не определены, выбор размера окрестности влияет на точность определения коэффициента интенсивности напряжений. Из решения системы Ритца $\{U_{nk}^{(i)}\}$ $i = 1, 2$; $k = 1, 2$; $n = 1,\ldots, N$ компонента $U_{nk}^{(2)}$ характеризует раскрытие трещины в узловых точках контура S_Δ.

3. При построенных аппроксимациях (2.1) решение "по Ритцу" исходной краевой задачи представляется [9] в виде суперпозиции вектор-потенциалов двойного и простого слоя

$$\bar{\mathbf{u}}_N \equiv \boldsymbol{\alpha}_N(x_\Delta) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{U}_{nk}\alpha_{nk}(x_\Delta), \quad x_\Delta \in G_\Delta \tag{3.1}$$

где α_{nk} – скалярные функции "влияния" k-го узла, n-го граничного элемента определяются согласно ([9], с. 446). Через компоненты перемещений $\alpha_N^{(i)}$ ($i = 1, 2$) по известным соотношениям линейной изотропной теории упругости могут быть определены компоненты напряжений $\sigma_N^{(11)}$, $\sigma_N^{(22)}$, $\sigma_N^{(12)}$ на оси $x^{(1)}$ при $|x^{(1)}| > l$, где $2l$ – длина трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений для рассматриваемого случая нагружения трещины равны ([3], с. 83)

$$\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}_{\pm l} = \sqrt{\pi l}\begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

а напряжения на оси $x^{(1)}$ при $|x^{(1)}| > l$, $x^{(2)} = 0$ определяются по формулам

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{(11)} \\ \sigma^{(22)} \\ \sigma^{(12)} \end{Bmatrix} = \left[\frac{|x^{(1)}|}{\{(x^{(1)})^2 - l^2\}^{1/2}} - 1\right]\begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \\ \tau_0 \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Таким образом, соотношения (3.1)–(3.3) используются для тестовой проверки коэффициента интенсивности напряжений при

$$\sigma^{(11)} = \sigma_N^{(11)}, \quad \sigma^{(22)} = \sigma_N^{(22)}, \quad \sigma^{(12)} = \sigma_N^{(12)},$$

что соответствует прямому методу МКЭ ([3], с. 91) для определения коэффициента интенсивности напряжений.

4. Возможно распространение изложенного алгоритма для реализации пространственной постановки задачи о трещине, например для эллиптической полости трещины, при этом учитывается компонента нагрузки вдоль оси $x^{(3)}$ и соответственно деформация продольного сдвига ([3], с. 83). Поверхность трещины может быть триангулирована и для учета особенности поля напряжений выделена двумерная окрестность вдоль линии берегов трещины. Пример реализации подобной гранично-элементной аппроксимации вариационной задачи для функционала вида (1.1) рассмотрен в [9] при решении пространственной задачи для части шара с выделением особенности граничных условий заданных на линиях. Для оценки приближений "по Ритцу" могут быть использованы апостериорные оценки погрешности [9], при этом нет надобности в решении двойственной задачи, так как правая часть указанных оценок, зависящая от разности значений функционалов двойственных задач на их приближенных решениях, приводится к виду [9]

$$2\int_{S_\Delta}\mathbf{u}_N[\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N) - \mathbf{g}_N^{(\nu_\Delta)}]ds_\Delta$$

В заключение отметим, что изложенная вариационная постановка является связанной в том смысле, что граничные перемещения и напряжения связаны через определяющие соотношения, соответственно аппроксимации (2.1), также связанные. Возможна альтернативная несвязанная формулировка [11], когда указанные соотношения выполняются как уравнения связей при помощи множителей Лагранжа;

тогда аппроксимации поля напряжений независимо от аппроксимации поля перемещений могут быть приняты априори более высокого порядка для учета особенности в окрестности вершины трещины (субпараметрическая аппроксимация), для такой аппроксимации приводятся [11] дискретные граничные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метод граничных интегральных уравнений / Под ред. Круз Т., Риццо Ф. М.: Мир, 1978. 210 с.
2. *Гольдштейн Р.В., Спектор А.А.* Вариационный метод исследования пространственных смешанных задач о плоском разрезе в упругой среде при наличии проскальзывания и сцепления его поверхностей // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 276–285.
3. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
4. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
5. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
6. *Терещенко В.Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.
7. *Терещенко В.Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118–125.
8. *Терещенко В.Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.
9. *Терещенко В.Я.* Алгоритм реализации и оценки погрешности вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 442–451.
10. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
11. *Терещенко В.Я.* Двойственные несвязанные формулировки вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 729–736.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
2.VI.1992

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В статье Ладыгиной Е.В., Маневича А.И. **"Свободные колебания нелинейной кубической системы с двумя степенями свободы при близких собственных частотах"** (ПММ. Т. 57. Вып. 2) по вине авторов и почты, задержавшей корректуру, допущено несколько описок.

Формула (1.9) не закончена. Следует добавить справа $+ 4\, \delta_2 k \sigma$, $\gamma = \theta_2 - \theta_1$. В формуле (2.7) знаменатель $|\Gamma_0| |1 - \Gamma_1^2|^{1/2}$ следует заменить на $|\Gamma_0^2 - \Gamma_1^2|^{1/2}$. В формуле (3.5) условие *2* должно иметь вид: 2) $2\,|\Gamma_1 + \Gamma_2| < |\Gamma_0|$. На стр. 46, 4-я строка сверху, вместо $|\Gamma_1|$ должно быть $|\Gamma_0|$, а в 6-й строке сверху вместо $|\Gamma_1 + \Gamma_0| > |\Gamma_0|/2$ должно быть $|\Gamma_1 + \Gamma_2| > |\Gamma_0|/2$. На стр. 48, 8-я строка сверху, вместо "в случае 2" следует читать "в случае г". На результаты статьи эти описки влияния не оказывают.

Ладыгина Е.В., Маневич А.И.
15.05.1993