

ной линейризованной постановки с ростом  $k$  связано с необходимостью более мелкого разбиения границы полости, учета производных от узловых перемещений  $u_j$  и т.д. В целом же предложенный подход показал достаточную эффективность в широком диапазоне изменения заглубления полости, ее кривизны, особенно при определении инвариантных характеристик дефекта, таких как площадь и длина дуги  $l$ .

Авторы благодарят И.И. Воровича за обсуждение результатов и советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
2. Колтон Д., Кресс Р. Метод интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
3. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves // SIAM Rev. 1984. V. 26. № 3. P. 323–350.
4. Ворович И.И., Сумбатьян М.А. Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 79–84.
5. Сумбатьян М.А., Боев Н.В. Восстановление формы дефекта по рассеянному волновому полю в двумерной упругой среде // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 880–882.
6. Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–86.
7. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
9. Tanaka M., Yamagiwa K. Application of boundary element method to some inverse problems in elastodynamics // Нихон кикай таккай ромбунсю. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1988. V. A54. № 501. P. 1054–1059.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
26.V.1992

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. С.В. Новотный

#### РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С НЕСВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассматривается обобщение задачи Био [1] о распространении упругих волн вдоль цилиндрической полости со свободной границей. Предполагается наличие на границе слоя, описываемого граничными условиями двух типов: 1) основанием типа Винклера; 2) инерционным сопротивлением слоя. Обнаружено, что в предельном случае полости бесконечно большого радиуса или при неограниченном возрастании частоты уравнение частот в точности совпадает с уравнением частот для полупространства, полученным в [2].

Пусть ось цилиндрической полости радиуса  $a$  совпадает с осью  $z$ , а реакция среды на радиальное возмущение аналогична реакции винклеровского основания, касательные напряжения равны нулю. Это может быть либо сплошной цилиндр из материала винклеровского типа, заполняющего цилиндрическую полость, либо слой, покрывающий полость и обладающий свойствами линейной реакции. Рассматривается распространение упругой стационарной волны с фазовой скоростью  $p$  параллельно оси  $z$ , являющейся осью симметрии движения. Будем решать эту задачу с использованием скалярного  $\Phi$  и векторного  $\Psi$  потенциалов, удовлетво-

ряющих волновым уравнениям

$$\begin{aligned} (\nabla - \frac{1}{c_1^2} \partial_t^2) \Phi = 0, (\nabla - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2) \Psi = 0 \\ \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $c_1, c_2$  – скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно.

Перемещения  $u_r$  и  $u_z$  и отличные от нуля напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{rz}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi}{\partial r} \\ \sigma_{rr} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \right) + \frac{\rho(c_1^2 - 2c_2^2)}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ \sigma_{rz} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \mu = \rho c_2^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$  ищем в виде

$$\Phi = AH(r) \cos k(z - pt), \Psi = BG(r) \sin k(z - pt)$$

Подстановка  $\Phi$  и  $\Psi$  в волновые уравнения приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \Phi = AK_0(\nu_1 r) \cos k(z - pt), \Psi = BK_1(\nu_2 r) \sin k(z - pt) \\ \nu_i = k(1 - \alpha_i^2)^{1/2}, \alpha_i = p^2/c_i^2, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $K_0, K_1$  – модифицированные функции Бесселя второго рода, выбранные с учетом условия излучения на бесконечность.

Граничные условия

$$r = a, \sigma_{rr} = \eta u_r, \sigma_{rz} = 0$$

( $\eta$  – жесткость основания Винклера) при учете соотношений (2), (3) приводят к системе линейных однородных уравнений относительно  $A$  и  $B$ , условие нетривиальности решения которой дает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} (2 - \alpha_2^2)^2 \xi_1 - 4\sqrt{1 - \alpha_2^2} \sqrt{1 - \alpha_1^2} \xi_2 - 2\alpha_2^2 (ka)^{-1} \sqrt{1 - \alpha_1^2} - \eta \alpha_2^2 (k\mu)^{-1} \sqrt{1 - \alpha_1^2} = 0 \\ \xi_i = K_0(\nu_i a)/K_1(\nu_i a), i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4)$$

связывающее фазовую скорость с частотой  $\omega = kp$ . Если длина волны очень мала, так что  $\lambda/a \rightarrow 0$ , то  $ak = 2\pi a/\lambda \rightarrow \infty$ , а уравнение (4) при учете асимптотического выражения  $K_n(z) \sim (\pi/(2z))^{1/2} e^{-z}$  при  $z \rightarrow \infty$  сводится к виду

$$(2 - \alpha_2^2)^2 - 4\sqrt{1 - \alpha_1^2} \sqrt{1 - \alpha_2^2} - \eta c_2 \alpha_2^2 (\omega\mu)^{-1} \sqrt{1 - \alpha_1^2} = 0 \quad (5)$$

Уравнение (4) отличается от частотного уравнения, полученного Био, наличием последнего члена, что изменяет набор допустимых частот. Поэтому для предельного случая уравнение (5) отличается от уравнения Релея, к которому приходит Био, наличием последнего члена. Этот предельный случай [1] означает, что при очень малых длинах волн кривизной полости можно пренебречь, т.е. скорость распространения волн определяется как для упругого полупространства.

Для опирания смешанного типа граничные условия имеют вид ( $\eta_1$  – жесткость основания,  $m_1$  – инерционное сопротивление)

$$r = a, \sigma_{rr} = \eta_1 u_r + m_1 \partial^2 u_r / \partial t^2, \sigma_{rz} = 0$$

Аналогично предыдущему получим уравнение частот, отличающееся от (4) заменой  $\eta$  на  $\eta_1 - m_1 \omega^2$ , а для предельного случая  $\lambda/a \rightarrow 0$  – уравнение, отличающееся от (5) заменой  $\eta c_2 \alpha_2^2$  на  $(\eta_1 - m_1 \omega^2) \rho \alpha_2^2$ .

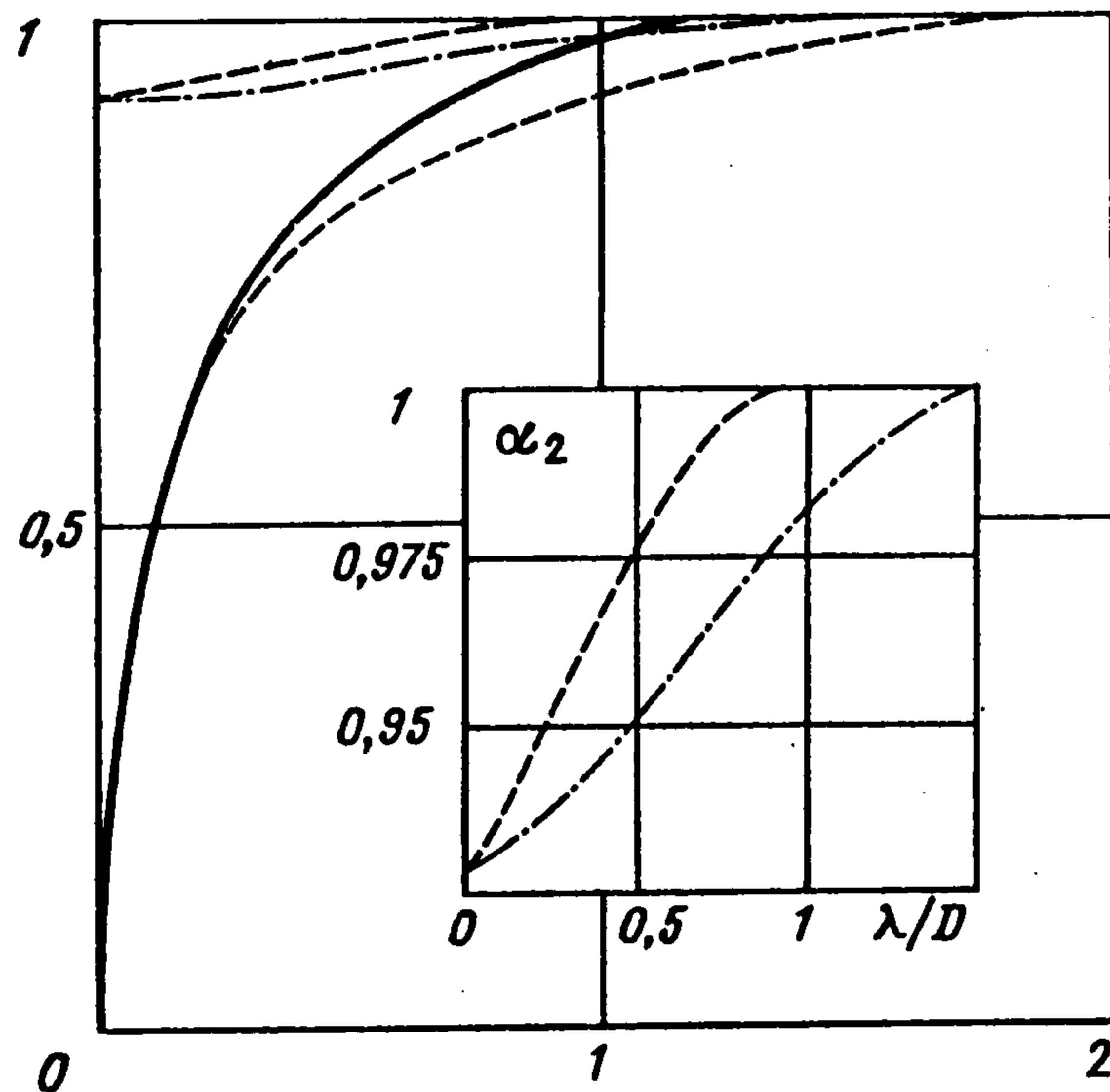
Последнее уравнение не допускает [2] существование движения релеевского типа при

$$(\eta_1 / \omega - m_1 \omega) c_2 \geq \mu R(1) / (\alpha_2^2 \sqrt{1 - \alpha_1^2}) \equiv W$$

где  $R$  – оператор Релея. Это квадратное неравенство для каждого фиксированного значения  $r$  имеет два корня, один из которых  $\omega_k > 0$ . Для частот  $\omega < \omega_k$  релеевское движение не реализуется (запирание низких частот). Запирание низких частот ( $\omega < \eta_1 c_2/W$ ) имеет место также при  $m_1 = 0$ . Если  $\eta_1 = 0$ , запирания частот нет.

Уравнение частот для опирания смешанного типа было решено численно для  $\eta_1 = \eta_1^* = 5,7 \times 10^9$  кг/м<sup>3</sup> и  $m_1 = m_1^* = 1,4 \times 10^8$  кгс<sup>2</sup>/м<sup>3</sup>, что примерно соответствует моделированию бетонного тоннеля радиуса  $a = 3$  м и толщиной  $h = 0,5$  м, находящегося в гранитной среде ( $\nu = 0,3$ ;  $E = 2,9 \times 10^{10}$  кг/м<sup>2</sup>).

На фигуре показана зависимость фазовой скорости распространения волны  $p$  (отнесенной к  $c_2$ ) от длины волны  $\lambda$  (отнесенной к диаметру полости  $D$ ). Во всех случаях  $p \rightarrow c_2$  при  $\omega \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). В случае винклеровского основания и при отсутствии инерционного сопротивления не может быть  $\alpha_2 < 0,928$ , тогда как при коэффициенте жесткости  $\eta_1$ , равном нулю, возможны все значения фазовой скорости от 0 до  $c_2$ .



Видно, что относительная скорость распространения волны  $\alpha_2$  в случае основания типа Винклера при  $\eta_1 = \eta_1^*$  и  $m_1 = 0$  (верхняя штриховая линия) возрастает с увеличением  $\lambda/D$  существенно быстрее, чем по модели Био при  $\eta_1 = 0$ ,  $m_1 = 0$  (штрихпунктирная линия).

Для инерционного основания (нижняя штриховая линия при  $\eta_1 = 0$ ,  $m_1 = m_1^*$ ) обнаруживается качественно иная зависимость  $\alpha_2$  от  $\lambda/D$ : ограничения на значения  $\alpha_2$  снизу нет.

Сплошная линия ( $\eta_1 = \eta_1^*$ ,  $m_1 = m_1^*$ ) иллюстрирует совместное влияние винклеровского и инерционного оснований на значения  $\alpha_2$ , и в этом случае нет ограничения на значения скорости распространения волны  $p$  снизу.

При наличии инерционного сопротивления ( $m_1 = m_1^*$ ) основание типа Винклера не очень существенно изменяет кривую зависимости  $\alpha_2$  от  $\lambda/D$ , что дает сравнение двух нижних кривых.

Следует отметить, что наличие опирания Винклера или инерционного сопротивления дает непрерывный спектр частот, в отличие от предельного случая (полости бесконечно большого радиуса) – уравнения Релея.

В случае

$$r = a, \sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = \eta_2 u_z + m_2 \partial^2 u_z / \partial t^2$$

уравнение частот отличается от (4) заменой последнего слагаемого в левой части на

$$-(\eta_2 - m_2 \omega^2) (k\mu)^{-1} \alpha_2 \sqrt{1 - \alpha_2^2} \xi_1 \xi_2 + O(ak)$$

причем

$$O(ak) = 2(\eta_2 - m_2 \omega^2) (\mu ak^2)^{-1} [\xi_2 \sqrt{1 - \alpha_1^2} \sqrt{1 - \alpha_2^2} - \xi_1] \rightarrow 0$$

при  $ak \rightarrow \infty$ .

В предельном случае коротких волн имеем уравнение, отличающееся от (5) заменой  $\eta$  на  $\eta_2 - m_2 \omega^2$ , что совпадает с уравнением, исследованным ранее [2].

Автор благодарит В.С. Ленского и Э.В. Ленского за руководство и помощь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bare containing a fluid // J. Appl. Phys. 1952. V. 23. N 9. P. 997–1005.
2. Ленский В.С. Релеевские движения в упругом полупространстве с несвободной границей // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 873–875.

Москва

Поступила в редакцию  
30.VI.1992

УДК 539.3

© 1993 г. В.Я. Терещенко

### ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТРЕЩИНАХ

Предлагается алгоритм, использующий вариационный метод граничных элементов и аналитический учет особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины при помощи сингулярного решения уравнения Ламе. Рассматриваемая постановка задачи о трещине учитывает все типы деформаций: нормальный отрыв, поперечный и продольный сдвиг; заданный вектор нормальных напряжений на поверхности трещины представляется в виде суммы регулярной составляющей и сингулярной составляющей, обусловленной наличием особой точки – вершины трещины, в результате реализуется особенность напряжений более высокого порядка в сравнении с существующими алгоритмами.

Возможность вариационной постановки для граничного функционала задач о трещинах отмечалась в [1] (см. дополнение Р.В. Гольдштейна), для численной реализации постановки использовался процесс Ритца на координатных функциях, учитывающих асимптотику решения вблизи особых точек контура трещины; далее указанная постановка развивалась в [2]. Проблема учета особенностей поля напряжений в окрестности вершины трещины использует как аналитические, так и численные приемы [3], в частности, при решении по МКЭ численное моделирование указанных особенностей связано с выбором специальных "сингулярных" конечных элементов, которые усложняют численную процедуру решения [3]. Описанные в [3] подходы позволяют реализовать особенности напряжений порядка  $r_0^{-1/2}$  и  $r_0^{-1}$ , где  $r_0$  – расстояние от вершины трещины.

В основу предлагаемого алгоритма положено численно-аналитическое моделирование особенности напряжений: во-первых, идея заключается в том, чтобы результат наличия особой точки рассматривать как поле напряжений, порожденное действием единичной силы, приложенной в этой точке; во-вторых, численная реализация использует аппарат метода граничных элементов для конструктивного описания особенности, в частности, концепцию кратных узлов [4].

1. Рассмотрим напряженное состояние упругой среды  $G \subset E_7^{(m)}$  ( $m = 2, 3$ ) с трещиной в плоскости  $(x^{(1)}, x^{(2)})$ ; в предположении неограниченной протяженности полости