Уравнение (3.1) при этом принимает вид

$$Lf = m(m-1)f - {}^4/_9(1+2m)(m-1)zf' - {}^1/_9(1+2m)^2(1-z^2)f'' = 0 \qquad (3.2)$$

и может быть решено численно или приближенно. В последнем случае можно воспользоваться методом интегральных соотношений, представив приближенно решение в виде

$$f(z) = c(1-z)^N + (1-c)(1-z)^{N+1}$$

обеспечивающим удовлетворение граничных условий при $z = 0$ и $z = 1$ и асимптотике при $z \to 1$.

Удовлетворяя уравнению (3.2) интегрально, в виде

$$\int_0^1 Lfdz = 0$$

найдем неизвестную постоянную

$$C = 6m(23m^2 + 11m + 2)(2m+1)^{-1}(73m^2 + m - 2)^{-1}$$

Метод может быть обобщен на задачи удара по упругой нити тупым телом, а также на задачи удара по упругим мембранам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. *Рахматулин Х.А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // 1945. ПММ. Т. 9. Вып. 6. С. 449–462.

Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1992

УДК 539.3

© 1993 г. **Ватульян А.О., Гусева И.А.**

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФОРМЫ ПОЛОСТИ В ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПО ЗАДАННОМУ НА ГРАНИЦЕ ВОЛНОВОМУ ПОЛЮ

Определяется форма полости в упругой ортотропной полуплоскости, колебания в которой вызываются сосредоточенным источником, расположенным на его поверхности, по заданному на этой границе вертикальному полю перемещений. Задача сводится к системе трех нелинейных операторных уравнений, предлагается линеаризованная постановка для выпуклых полостей. В конечном итоге проблема сводится к решению системы двух граничных интегральных уравнений по границе известной полости, которая решается методом граничных элементов, и решению линейного интегрального уравнения первого рода с гладким ядром. Это соответствует некорректной задаче, используется ее регуляризация по А.Н. Тихонову [1], исследуется влияние начального приближения и частоты колебаний на эффективность предложенного алгоритма.

При анализе задач рассматриваемого типа обычно используется дифракционная постановка [2–5], которая приводит либо к нелинейным операторным уравнениям, либо к проблеме минимизации неквадратичного функционала. Одако при таком подходе возникают трудности, связанные с идентификацией дефектов, расположенных вблизи поверхности тела. Поскольку измерение поля смещений на поверхности наиболее адекватно описывает реальный процесс дефектометрии, то указанная постановка может быть уточнена путем учета влияния свободной границы, на которой расположены источник и приемник колебаний, что и предлагается ниже.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся колебания ортотропной упругой полуплоскости $x_3 < 0$ с полостью, ограниченной выпуклой гладкой кривой l. Колебания вызываются нормальной единичной сосредоточенной силой, приложенной в начале координат.

Уравнения движения и граничные условия имеют вид (после отделения временного множителя $e^{-i\omega t}$)

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 3 \tag{1.1}$$

$$x_3 = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = -\delta(x_1)$$

$$(x_1, x_3) \in l, \quad \sigma_{ij} n_j = 0$$

Здесь n_j – компоненты единичного вектора нормали к l, внешнего по отношению к упругой среде.

Компоненты тензора напряжений связаны с компонентами вектора перемещений обобщенным законом Гука

$$\sigma_{11} = c_{11} u_{1,1} + c_{13} u_{3,3}, \quad \sigma_{33} = c_{13} u_{1,1} + c_{33} u_{3,3}, \quad \sigma_{13} = c_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}) \tag{1.2}$$

где c_{ij} – упругие постоянные ортотропного материала.

Предположим, что известно вертикальное поле смещений на поверхности $x_3 = 0$, т.е. $u_3(x_1, 0) = f(x_1), x_1 \in [a, b]$. Требуется определить границу полости l.

На первом этапе на основании построенного ранее [6] специального фундаментального решения $U_i^{(m)}(x, \xi)$ для ортотропной полуплоскости, удовлетворяющего условию отсутствия напряжений на границе $x_3 = 0$ и условию излучения на бесконечности [7], можно получить представление поля смещений внутри упругой области

$$u_m(\xi) = -\int_l \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, n_j(x)\, u_i(x)\, dl_x + u_m^e(\xi) \tag{1.3}$$

Функции $\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)$ находятся на основании (1.2), где вместо u_i подставлены фундаментальные решения $U_i^{(m)}$; $u_m^e(\xi)$ – смещения в упругой ортотропной полуплоскости без дефекта, вызванные действием той же поверхностной нагрузки ("эталонные" смещения).

На основании представления (1.3), используя формулы о предельных значениях интеграла в (1.3) [6], поставленную задачу сводим к следующей системе операторных уравнений:

$$\frac{1}{2} u_m(y) = -\int_l \sigma_{ij}^{(m)}(x, y)\, n_j(x)\, u_i(x)\, dl_x + u_m^e(y), \quad y \in l$$

$$f(\xi') = -\int_l \sigma_{ij}^{(3)}(x, \xi')\, n_j(x)\, u_i(x)\, dl_x + u_3^e(\xi'), \quad \xi' = (x_1, 0) \in [a, b] \tag{1.4}$$

Неизвестными в этой системе являются u_i и l. Отметим, что при анализе системы подобного типа для колебаний упругой изотропной плоскости с полостью в дифракционной постановке [5] вместо третьего уравнения из (1.4) использовалось уравнение, позволяющее вычислить диаграмму направленности, которая и считалась заданной.

2. Линеаризованная постановка. Для решения системы (1.4) используем метод линеаризации в окрестности известного состояния. Известно, что при этом требуется строить производную по Фреше от нелинейного оператора, порожденного системой (1.4), преодолевая сложности, связанные с тем, что первые два уравнения в (1.4) сингулярные. Для того чтобы избежать этой процедуры, поступим следующим образом. Запишем формулу (1.3) для плоскости с известной формой полости l_0, мало отличающейся от l и охватывающей ее, обозначим индексом ^{0} величины, относящиеся к среде с полостью l_0:

$$u_m^0(\xi) = -\int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, n_j^0(x)\, u_i^0(x)\, dl_x + u_m^e(\xi) \tag{2.1}$$

Составим разность

$$u_m(\xi) - u_m^0(\xi) = -\int_l \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, n_j(x)\, u_i(x)\, dl_x + \int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, n_j^0(x)\, u_i^0(x)\, dl_x \tag{2.2}$$

Преобразуя интегралы по контурам l и l_0 в предположении их близости, получим

$$u_m(\xi) - u_m^0(\xi) = -\int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, (u_i(x) - u_i^0(x))\, n_j^0(x)\, dl_x -$$

$$-\int_{l_0} (\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, u_i(x))_{,j}\, \nu(x)\, dl_x \tag{2.3}$$

($\nu(x)$ – функция, характеризующая расстояние между кривыми l_0 и l, отсчитываемое по внутренней нормали к l_0). Считая, кроме того, что $u_l(x) = u_l^0(x)$ на l_0, из (2.3) получаем простейший вариант линеаризованной задачи, в котором первые два из уравнений вида (1.4) служат для определения на границе известного контура l_0

$$\frac{1}{2} u_m^0(y) = -\int_{l_0} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j^0(x)\, u_l^0(x)\, dl_x + u_m^e(y), \quad m = 1, 3, \quad y \in l_0 \tag{2.4}$$

а третье представляет собой интегральное уравнение первого рода с гладким ядром (поскольку полость l_0 лежит строго внутри нижней полуплоскости $x_3 < 0$, то $\min\limits_{x \in l_0,\, \xi' \in R_1} |x - \xi'| > c > 0$)

$$g(\xi') = f(\xi') - u_3^0(\xi') = -\int_{l_0} (\sigma_{ij}^{(3)}(x, \xi')\, u_l^0(x))_{,j}\, \nu(x)\, dl_x, \quad \xi' \in [a, b] \tag{2.5}$$

где $u_3^0(\xi')$ находится на основании (2.1).

Система (2.4), (2.5) относительно трех неизвестных функций $u_l^0(x)$, $\nu(x)$ решается последовательно: сначала находятся $u_l^0(x)$ из (2.4), а затем из (2.5) определяется $\nu(x)$.

3. Дискретизация системы интегральных уравнений. На первом этапе находится приближенное решение системы сингулярных уравнений (2.5) методом граничных элементов [8]. Граница l_0 аппроксимируется многоугольником, на каждом звене его (элементе) l_q считается, что $u_l^0(x) = u_{lq}^0$ – постоянны, причем для определения узловых значений u_{lq}^0 получена линейная алгебраическая система (заметим, что подобного типа дискретизация при рассмотрении обратной задачи в дифракционной постановке использована в [9])

$$\frac{1}{2} u_{mp}^0 = -\sum_{q=1}^{N} B_{mlpq} u_{lq}^0 + u_{mp}^e, \quad p = 1, 2 \ldots N \tag{3.1}$$

$$B_{mlq}(\xi) = \int_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi)\, n_{jq}^0 dl_x, \quad B_{mlpq} = B_{mlq}(y_p), \quad u_{mp}^e = u_m^e(y_p) \tag{3.2}$$

(y_p – середина отрезка l_p). Найдя из (3.1) узловые значения смещений, можно рассчитывать поле внутри упругой полуплоскости с полостью l_0 на основании следующего представления:

$$u_m^0(\xi) = -\sum_{q=1}^{N} B_{mlq}(\xi)\, u_{lq}^0 + u_m^e(\xi) \tag{3.3}$$

а уравнение (2.5) в силу уравнений движения (1.1) примет вид

$$g(\xi') = \rho\omega^2 \sum_{q=1}^{N} \int_{l_q} U_l^{(3)}(x, \xi')\, u_{lq}^0 \nu(x)\, dl_x \tag{3.4}$$

Вводя параметризацию на q-м элементе $x_1 = x_{1q} + \beta_{1q} t$, $x_3 = x_{3q} + \beta_{3q} t$, $t \in [-1, 1]$, окончательно имеем

$$g(\xi') = \rho\omega^2 \int_{-1}^{1} \sum_{q=1}^{N} U_l^{(3)}(x_q + \beta_q t, \xi')\, u_{lq}^0 (\beta_{1q}^2 + \beta_{3q}^2)^{1/2} \nu(x_q + \beta_q t)\, dt, \quad \xi' \in [a, b] \tag{3.5}$$

т.е. уравнение Фредгольма первого рода на отрезке, построение решения которого представляет собой некорректную задачу [1]. При построении решения (3.5) использовались алгоритмы, обеспечивающие регуляризацию по А.Н. Тихонову, а также использующие априорную информацию о решении, например монотонность и неотрицательность искомой функции $\nu(x)$ на каждом из элементов l_q. Практически это обеспечивалось линейной аппроксимацией $\nu(x)$ на l_q и использованием регуляризующих алгоритмов на множествах корректности. Заметим, что простейшая аппроксимация постоянными ν_q на элементе, как это предлагалось [9] для круговой полости, не приводит к успеху.

4. Численные результаты. На основании предложенной линеаризованной постановки обратной задачи рассеяния и ее дискретизации исследована задача определения формы выпуклой полости в ортотропной полуплоскости. В качестве примера выбран эллипс с полуосями $d_1 = 0{,}2$; $d_2 = 0{,}1$ и центром в точке $(0, -0{,}5)$ при разных углах наклона к оси x_1. Использовалось 8 и 16 граничных элементов на частотах $\kappa = 0{,}1 \div 0{,}7$ ($\kappa = ka$, $k = \omega(\rho/c_{33})^{1/2}$, $a = \max(d_1, d_2)$). Максимальная относительная погрешность определения формы эллипса при $\kappa = 0{,}1$; $0{,}4$; $0{,}7$ равна соответственно 3; 4,8; 9%. Снижение эффективности предложенной линеаризованной постановки с ростом k связано с необходимостью более мелкого разбиения границы полости, учета производных от узловых перемещений u_j^0 и т.д. В целом же предложенный подход показал достаточную эффективность в широком диапазоне изменения заглубления полости, ее кривизны, особенно при определении инвариантных характеристик дефекта, таких как площадь и длина дуги l.

Авторы благодарят И.И. Воровича за обсуждение результатов и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
2. *Колтон Д., Кресс Р.* Метод интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
3. *Colton D.* The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves // SIAM Rev. 1984. V. 26. № 3. P. 323–350.
4. *Ворович И.И., Сумбатян М.А.* Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 79–84.
5. *Сумбатян М.А., Боев Н.В.* Восстановление формы дефекта по рассеянному волновому полю в двумерной упругой среде // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 880–882.
6. *Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–86.
7. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
9. *Tanaka M., Yamagiwa K.* Application of boundary element method to same inverse problems in elastodynamics // Нихон кикай таккай ромбунсю. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1988. V. A54. № 501. P. 1054–1059.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
26.V.1992

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. С.В. Новотный

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С НЕСВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассматривается обобщение задачи Био [1] о распространении упругих волн вдоль цилиндрической полости со свободной границей. Предполагается наличие на границе слоя, описываемого граничными условиями двух типов: 1) основанием типа Винклера; 2) инерционным сопротивлением слоя. Обнаружено, что в предельном случае полости бесконечно большого радиуса или при неограниченном возрастании частоты уравнение частот в точности совпадает с уравнением частот для полупространства, полученным в [2].

Пусть ось цилиндрической полости радиуса a совпадает с осью z, а реакция среды на радиальное возмущение аналогична реакции винклеровского основания, касательные напряжения равны нулю. Это может быть либо сплошной цилиндр из материала винклеровского типа, заполняющего цилиндрическую полость, либо слой, покрывающий полость и обладающий свойствами линейной реакции. Рассматривается распространение упругой стационарной волны с фазовой скоростью p параллельно оси z, являющейся осью симметрии движения. Будем решать эту задачу с использованием скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов, удовлетво-