

ЛИТЕРАТУРА

1. Перлин П.И. Об асимптотиках решений краевых задач теории потенциала и теории упругости в окрестности конических точек границы // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 835–839.
2. Гельфанд И.М., Шолов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
3. Bazant Z.P., Keer L.N. Singularities of elastic stress and of harmonic function at conical notches or inclusions // Intern. J. Solids and Struct. 1974. V. 10. № 9. P. 957–964.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1991

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. Ю.А. Демьянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НИТИ

Предлагается асимптотический метод решения задач распространения волн в нити, использующий в качестве малого параметра величину характерной деформации. Метод продемонстрирован на примере точечного воздействия на фиксированную частицу нити, моделируемого ее нестационарным перемещением (это воздействие обычно называется поперечным ударом [1, 2]).

В рассматриваемом случае распространяющиеся в нити со скоростью a_0 продольные волны создают соответствующее натяжение перед головной поперечной волной, скорость которой много меньше a_0 . Уравнение количества движения по первоначальному направлению нити приводит в нулевом приближении к независимости натяжения от координаты в области распространения поперечных волн. После определения поперечных смещений в этой области находится поле продольных скоростей и продольных деформаций, причем продольная и поперечная составляющие деформации в нулевом приближении значительно превышают по величине общую деформацию (их порядок ниже порядка последней).

Для случая степенной зависимости скорости приложенного воздействия (поперечного удара) от времени при отсутствии начального натяжения в нити поле поперечных перемещений носит автомодельный характер.

1. Пусть, в момент времени $t = 0$ по гибкой нити бесконечной длины, расположенной вдоль оси x , проводится точечное воздействие (удар), сводящееся к перемещению точки $s_0 = 0$ по закону $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ (s_0 – лагранжева координата). Уравнения движения нити имеют вид [1]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \varphi), \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \sin \varphi) \quad (1.1)$$

Здесь ρ_0 – начальная плотность нити, предполагаемая постоянной, x , y – перемещения точки s_0 , T – натяжение, являющееся функцией деформации e , φ – угол наклона элемента нити к его первоначальному направлению,

$$e = \left[\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0} \right)^2 \right]^{1/2} - 1, \quad \cos \varphi = \left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} \right) (1 + e)^{-1},$$

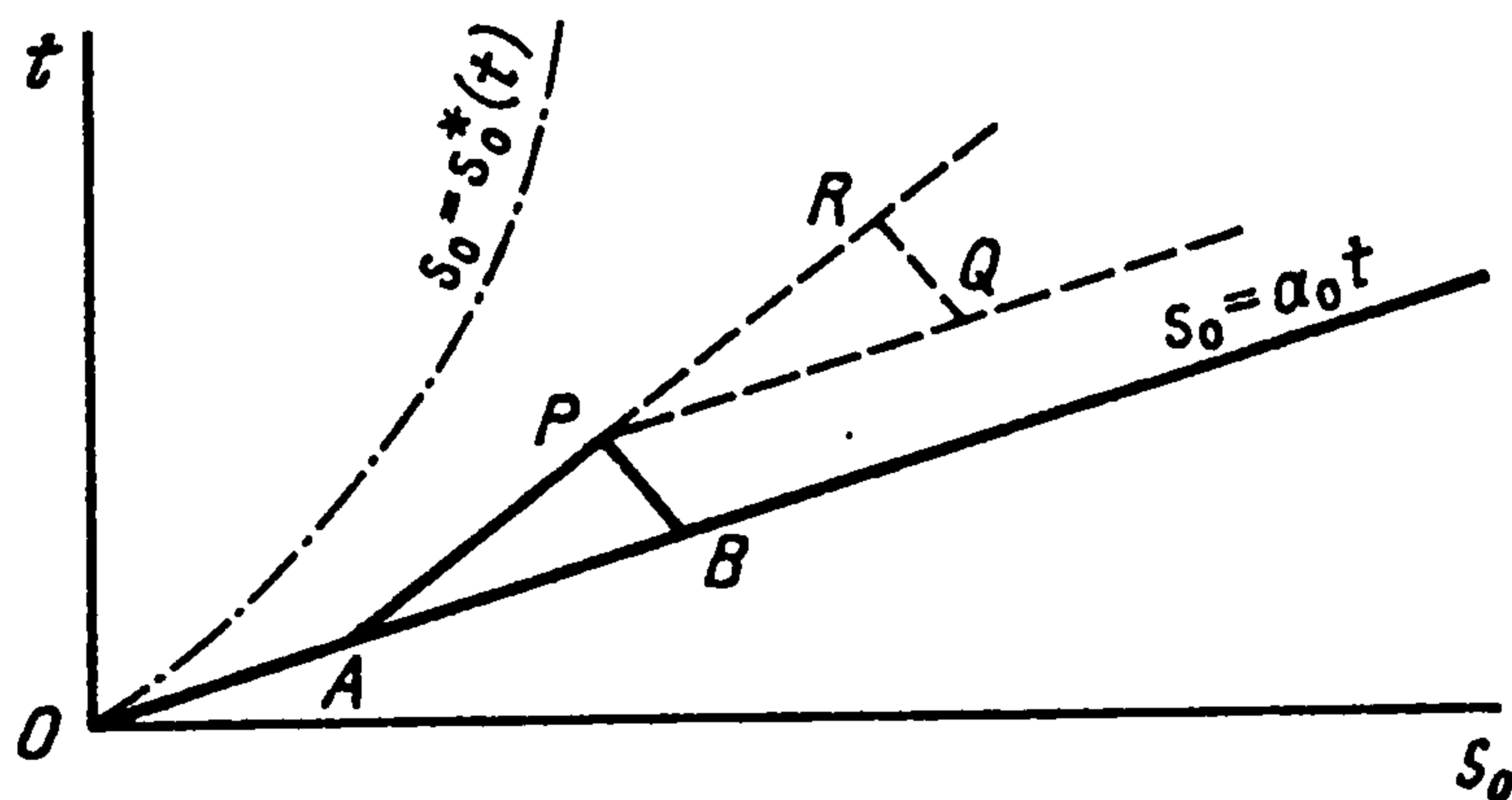
$$\sin \varphi = \frac{\partial y}{\partial s_0} (1 + e)^{-1}$$

Характеристики системы (1.1) и соотношения на них имеют вид [1]

$$\begin{aligned} ds_0/dt &= \pm a, & \cos \varphi du + \sin \varphi dv &= \pm a (\cos \varphi d\mu + \sin \varphi d\vartheta) \\ ds_0/dt &= \pm \lambda, & \cos \varphi dv - \sin \varphi du &= \pm \lambda (\cos \varphi d\vartheta - \sin \varphi d\mu) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$a^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{de}, \quad \lambda^2 = \frac{T}{\rho_0(1+e)}, \quad u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \mu = \frac{\partial x}{\partial s_0}, \quad \vartheta = \frac{\partial y}{\partial s_0}$$

Если предположить, что при $t = 0$ имеем $u = u_0 = \text{const}$, $\mu = \mu_0$, $v = \vartheta = 0$, то так как линия $t = 0$ не является характеристикой, $|\lambda| < |a|$, решением в области $0 < t < s_0/a_0$ будет $u = u_0$, $v = \vartheta = 0$, $\mu = \mu_0$ (фигура). Здесь $s_0 > 0$, $a_0 = a(\mu_0)$. Этот вывод можно получить двояко: или учтя, что полученное решение удовлетворяет системе (1.2), начальным условиям и единственно (для задачи Коши), или записав (1.2) в конечных разностях и решив (с учетом однородности начальных условий при $\varphi = 0$).



За упругой волной $s_0 = a_0 t$ из соотношений на характеристиках $ds_0/dt = \pm \lambda$, записанных в конечных разностях с учетом того, что $\varphi(A) = \varphi(B) = 0$, следует

$$v(P) = \lambda_0 \vartheta(P), \quad v(P) = \vartheta(P) = 0, \quad \varphi(P) = 0 \quad (1.3)$$

если точка P достаточно близка к точкам A и B .

Из соотношения на характеристике $ds_0/dt = -a_0$ получим

$$u(P) = -a_0 [\mu(P) - \mu_0] + u_0 \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3), (1.4) будут выполняться, очевидно, для всех точек на характеристике $s_0 - s_0(P) = a_0 [t - t(P)]$. Беря на этой характеристике точку Q и проводя через точки P, Q характеристики $ds_0/dt = \lambda(P)$, $ds_0/dt = -\lambda(Q)$ при равенстве деформаций $\mu(P) = \mu(Q)$, а следовательно, $\lambda(P) = \lambda(Q)$, снова получим $v(R) = \vartheta(R) = 0$; $u(R) = -a_0 [\mu(R) - \mu_0] + u_0$. Таким образом, убеждаемся, что в области, ограниченной характеристикой $s_0 = a_0 t$ и характеристикой $s_0 = s_0^*(t)$, $s_0^*(0) = 0$, где $ds_0^*/dt = \lambda$, нить не имеет поперечных скоростей и деформаций, а продольные скорости и деформации связаны соотношением

$$u = -a_0 (\mu - \mu_0) + u_0 \quad (1.5)$$

2. Протяженность области распространения поперечных волн значительно уже, чем продольных, так как $\lambda \sim a_0 \sqrt{e_0}$, $s_0^* \sim a_0 t \sqrt{e_0}$. В связи с тем что при $e_0 \ll 1$, $\cos \varphi \sim 1$, $\varphi \sim \vartheta$, то из первого уравнения (1.1) при учете того, что $u \sim a_0 e_0$, получим

$$T(s_0, t) - T(s_0^*, t) = \int_{s_0^*}^{s_0} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} ds_0, \quad e(s_0, t) - e(s_0^*, t) \sim e_0^{3/2}$$

Следовательно, в главном приближении $e(s_0, t) = e(s_0^*, t)$, что приводит второе уравнение (1.1) к уравнению малых поперечных колебаний, скорость распространения которых зависит от времени. Этот результат может быть получен методом сращиваемых асимптотических разложений, если перейти к новым функциям и независимым переменным $\bar{x} = x/(a_0 t_0)$, e_0 , $\bar{y} = y/(V_0 t_0)$; $T = E e_0 \bar{e}$, $z = s_0/\bar{s}_0$, $\bar{t} = t/t_0$, $\bar{s}_0 = e_0 a_0 t_0$ и искать предельную форму уравнений (1.2) при $e_0 \rightarrow 0$ в предположении конечности введенных функций и их производных. Тогда первое уравнение (1.1) принимает вид

$$e_0^{1/2} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial \bar{e}}{\partial z} \quad (2.1)$$

и при $e_0 \rightarrow 0$ для главного приближения дает $\partial \bar{e}/\partial z = 0$, $\bar{e} = \bar{e}(\bar{t})$. Второе уравнение запишем так

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} = \bar{e}(\bar{t}) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

Выражение для деформации

$$e_0 \bar{e} \approx e_0^{1/2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial z} + \frac{V_0^2}{2a_0^2 e_0} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \right)^2 \quad (2.3)$$

показывает, что первое слагаемое имеет в главном приближении порядок более низкий, чем e_0 , и должно быть одного порядка со вторым слагаемым, более того, равно главному приближению последнего с обратным знаком. В противном случае или $\partial \bar{y}/\partial z = 0$, или $\partial \bar{x}/\partial z = 0$, что не дает решения поставленной задачи. Следовательно, $V_0 = V_0 \cdot a_0^{-1} \sim e_0^{3/4}$. Заметим, что в [2], где впервые сформулирована задача об ударе по нити с постоянной скоростью, подобная зависимость скорости от деформации обнаруживается после нахождения решения.

Итак, из соотношения

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} = - \frac{V_0^2}{2a_0^2 e_0^{3/2}} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial z} \right)^2 \quad (2.4)$$

после решения уравнения (2.2) в предположении, что $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{e}(\bar{t})$ и $\bar{x}_0(\bar{t})$ заданы, находим главное приближение для $\bar{x}(z, t)$. Из соотношения (1.5) определяется связь закона перемещения $\bar{y}_0(\bar{t})$ с деформацией $\bar{e}(\bar{t})$.

Из уравнения (2.1) может быть далее определен закон изменения общей деформации в области поперечного движения, из (2.2) найдем следующий член асимптотического разложения для \bar{y} , затем из соотношения (2.3) – следующий член асимптотического разложения для \bar{x} и т.д.

3. Построим решение задачи для случая, когда начальная деформация нити $\mu_0 = 0$, а $y_0(t) = At^m$ ($m > 1$) (скорость удара $y_0' = Am t^{m-1}$). Применим полуобратный метод, предположив, что закон изменения общей деформации при этом также степенной $e = Bt^n$.

Для рассматриваемого случая

$$e < 1, \quad ds_0^*/dt = a_0 B^{1/2} t^{n/2}, \quad s_0^* = a_0 B^{1/2} (1 + n/2)^{-1} t^{1+n/2}$$

Заметим, что при заданном $e(t)$ условия $y(0, t) = y_0(t)$, $y(s_0^*, t) = 0$ определяют единственное решение уравнения (2.2), которым при $e(t) = Bt^n$, $y_0 = At^m$ будет функция $y = At^m f(z)$, $z = s_0/s_0^*$.

Функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$m(m-1)f - (1+n/2)(2m-2-n/2)zf' = (1+n/2)^2(1-z^2)f'' \quad (3.1)$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

Рассмотрим поведение $f(z)$ при $z \rightarrow 1$, представив

$$f(z) = A_1(1-z)^N + \dots$$

Тогда $N = (2m+n/2)(2+n)^{-1}$ и при $N > 1$ имеем $f'(1) = 0$.

В случае $N > 1$ излом на головной поперечной волне отсутствует, поэтому продольные составляющие скорости на ней не разрываются.

Из соотношения (2.4) найдем

$$x = x_0(t) - \frac{A^2}{2a_0 \sqrt{B}} (1+n/2) t^{2m-1-n/2} \int_0^z f'^2 dz$$

На головной волне $z = 1$ при $N > 1$, в случае $x_0' = 0$, который примем для упрощения выкладок, продольная составляющая скорости

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{z=1} = - \frac{A^2 (1+n/2)(2m-1-n/2)}{2a_0 \sqrt{B}} t^{2m-2-n/2} \int_0^1 f'^2 dz = -a_0 e(t)$$

Отсюда $n = 4/3(m-1)$, т.е. $e \sim \dot{y}_0^{4/3}$, что и следовало ожидать в соответствии с асимптотической задачей. При этом $N-1 = 2(m-1)(2m+1)^{-1} > 0$ при $m > 1$, что говорит об отсутствии излома на головной поперечной волне при всех $m > 1$ и его наличии при $m = 1$. При $m > 1$ условие непрерывности продольных скоростей при $z = 1$ приводит к следующей связи коэффициентов в законах скорости и деформации:

$$(1+2m)(4m-1)A^2 \int_0^1 f'^2 dz = 18a_0^2 B^{3/2}$$

Уравнение (3.1) при этом принимает вид

$$Lf = m(m-1)f - \frac{1}{2}(1+2m)(m-1)zf' - \frac{1}{2}(1+2m)^2(1-z^2)f'' = 0 \quad (3.2)$$

и может быть решено численно или приближенно. В последнем случае можно воспользоваться методом интегральных соотношений, представив приближенно решение в виде

$$f(z) = c(1-z)^N + (1-c)(1-z)^{N+1}$$

обеспечивающим удовлетворение граничных условий при $z = 0$ и $z = 1$ и асимптотике при $z \rightarrow 1$.

Удовлетворяя уравнению (3.2) интегрально, в виде

$$\int_0^1 Lf dz = 0$$

найдем неизвестную постоянную

$$C = 6m(23m^2 + 11m + 2)(2m + 1)^{-1}(73m^2 + m - 2)^{-1}$$

Метод может быть обобщен на задачи удара по упругой нити тупым телом, а также на задачи удара по упругим мембранам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. Рахматулин Х.А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // 1945. ПММ, Т. 9. Вып. 6. С. 449-462.

Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1992

УДК 539.3

© 1993 г. Ватульян А.О., Гусева И.А.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФОРМЫ ПОЛОСТИ В ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПО ЗАДАННОМУ НА ГРАНИЦЕ ВОЛНОВОМУ ПОЛЮ

Определяется форма полости в упругой ортотропной полуплоскости, колебания в которой вызываются сосредоточенным источником, расположенным на его поверхности, по заданному на этой границе вертикальному полю перемещений. Задача сводится к системе трех нелинейных операторных уравнений, предлагается линеаризованная постановка для выпуклых полостей. В конечном итоге проблема сводится к решению системы двух граничных интегральных уравнений по границе известной полости, которая решается методом граничных элементов, и решению линейного интегрального уравнения первого рода с гладким ядром. Это соответствует некорректной задаче, используется ее регуляризация по А.Н. Тихонову [1], исследуется влияние начального приближения и частоты колебаний на эффективность предложенного алгоритма.

При анализе задач рассматриваемого типа обычно используется дифракционная постановка [2-5], которая приводит либо к нелинейным операторным уравнениям, либо к проблеме минимизации неквадратичного функционала. Однако при таком подходе возникают трудности, связанные с идентификацией дефектов, расположенных вблизи поверхности тела. Поскольку измерение поля смещений на поверхности наиболее адекватно описывает реальный процесс дефектометрии, то указанная постановка может быть уточнена путем учета влияния свободной границы, на которой расположены источник и приемник колебаний, что и предлагается ниже.