УДК 539.4

© 1993 г. П.И. Перлин

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ РАСХОДЯЩИХСЯ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Применение метода потенциалов для построения собственных функций в конусах для задач теории потенциала и теории упругости привело к одномерным интегральным уравнениям второго рода с ядрами в виде интегралов [1]. Поэтому условия их сходимости потребовали введения ограничений на допустимые значения показателей асимптотики решений (они должны быть меньше единицы). Ниже предлагается устранить эти ограничения на основе регуляризации (в смысле, принятом в теории обобщенных функций [2]) указанных расходящихся интегралов. Приводятся примеры расчетов модельных задач. Осуществляется также модификация алгоритма вычисления ядер полученных интегральных уравнений (в общем случае), учитывающая характер асимптотики подынтегрального выражения на бесконечности.

Остановимся на примере задачи Неймана. Имеется конус, ограниченный поверхностью $\theta = \theta(\varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi$ и $r > 0$. Требуется определить в нем гармоническую функцию, нормальная производная которой равна нулю. Будем исходить из представления собственной функции в виде $r^\lambda u(\varphi, \theta)$ (случай, когда имеются присоединенные функции, исследуется аналогично). Тогда на поверхности конуса для сужения собственной функции получаем представление в виде $r^\lambda U(\varphi)$.

Функция $U(\varphi)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$r^\lambda U(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int_S r_1^\lambda U(\varphi_1)\frac{d}{dn_{q_1}}\frac{1}{R(q,q_1)}\,dS_{q_1} = 0, \quad R = |q - q_1| \tag{1}$$

Здесь S – поверхность конуса, q и q_1 – точки с координатами φ, $r(\varphi)$ и $\theta(\varphi)$ и φ_1, r_1 и $\theta(\varphi_1)$. Зависимость $r(\varphi)$ и определяет контур, на котором требуется выполнение уравнения. Этот контур может быть выбран достаточно произвольным образом, однако целесообразно, чтобы дискретная совокупность точек, используемая при численной реализации для задания контура, не имела общих точек с точками, вводимыми при вычислении интегралов. Перепишем уравнение (1) в развернутой форме

$$r^{\lambda-1}U(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi_1)\,I_1(\varphi,\varphi_1)\int_0^\infty r_1^{\lambda-2}I_2(\varphi_1, r_1)\,dr_1 d\varphi_1 = 0 \tag{2}$$

$$I_1(\varphi,\varphi_1) = \cos\vartheta(\varphi_1)\,[\sin\vartheta(\varphi)\cos\vartheta(\varphi)\cos(\varphi_1 - \varphi) - \cos\vartheta(\varphi)\sin\vartheta(\varphi_1)]$$

$$I_2(\varphi_1, r_1) = \left[1 - 2I_3(\varphi,\varphi_1)\frac{r}{r_1} + \frac{r^2}{r_1^2}\right]^{-3/2}$$

$$I_3(\varphi,\varphi_1) = \sin\vartheta(\varphi)\sin\vartheta(\varphi_1)\cos(\varphi_1 - \varphi) + \cos\vartheta(\varphi)\cos\vartheta(\varphi_1)$$

Поскольку асимптотика подынтегрального выражения внутреннего интеграла на бесконечности имеет вид $r^{\lambda-2}$, то естественно привлечь для осуществления регуляризации соображения ([2], с. 97), относящиеся к интегралу от такой функции. На полуоси от нуля до бесконечности вводится произвольным образом промежуточная точка a и интеграл разбивается на два интеграла. Тогда

$$\int_0^\infty r^\mu dr = \int_0^a r^\mu dr + \int_a^\infty r^\mu dr \tag{3}$$

При условии $\mathrm{Re}\,\mu > -1$ первый интеграл существует и равен $a^{\mu+1}/(\mu + 1)$. Полученная функция является аналитической во всей плоскости комплексного переменного, исключая точку $\mu = -1$.

Второй интеграл существует при условии $\mathrm{Re}\,\mu < -1$, он равен $-a^{\mu+1}/(\mu + 1)$ и также представляет собой аналитическую во всей плоскости функцию, исключая точку $\mu = -1$. Суммируя, приходим к равенству интеграла (3) нулю при любом значении μ, что позволяет преобразовать внутренний интеграл в уравнении (2) к виду

$$\int_0^\infty r_1^{\lambda-2}\xi(\varphi_1, r_1)\,dr_1, \quad \xi(\varphi_1, r_1) = I_2(\varphi_1, r_1) - 1 \tag{4}$$

Очевидно, что при условии $1 < \lambda < 2$ интеграл оказывается сходящимся. Таким образом, процедура регуляризации фактически свелась к вычитанию из подынтегрального выражения слагаемого, обусловливающего расходимость. Аналогичным образом обеспечивается переход к сходящимся представлениям при больших значениях λ. Для этого необходимо получить разложение на бесконечности функции $I_2(\varphi_1, r_1)$ для должного числа членов.

Сходящееся представление в диапазоне $2 < \lambda < 3$ будет иметь вид

$$\int_0^\infty r_1^{\lambda-2}\xi_1(\varphi_1, r_1)\,dr_1, \quad \xi_1(\varphi_1, r_1) = \xi(\varphi_1, r_1) - 3I_3(\varphi, \varphi_1)\frac{r}{r_1} \tag{5}$$

Приведем результаты расчетов тестовых задач, решения которых получены [3] методом разделения переменных. Рассматривались задачи для кругового конуса, и для сокращения вычислений использовалась установленная там зависимость решений от угловой координаты, поэтому было достаточно потребовать выполнения интегрального уравнения лишь в одной точке контура ($r = 1$, $\varphi = 0$). Тогда решение задачи сводилось к определению подбором такого значения λ, при котором интеграл в (2) оказывался равным -2π.

Были рассмотрены два решения задач Неймана: $r^{1,245}P_{1,245}(\cos\vartheta)$ и $r^{2,905}\cos 3\varphi P^3_{2,905}\cdot$ $\cdot(\cos\vartheta)$. Расчетами получены значения показателей 1,22 и 2,92.

Аналогичным образом осуществлялось решение задач Дирихле. Использовались уравнения, получаемые на основе потенциала двойного слоя. В этом случае интегральное уравнение отличается от (1) лишь знаком перед интегралом. Были рассмотрены два решения задач Дирихле: $r^{1,245}\cos\varphi P^1_{1,245}(\cos\vartheta)$ и $r^{2,136}\cos 2\varphi P^2_{2,136}(\cos\vartheta)$. Расчетами получены значения показателей 1,22 и 2,10.

Решение задачи Неймана с показателем 2,92, а равным образом с показателем 0,86 было сопряжено с вычислительными затруднениями. Для достижения должной точности потребовалось производить интегрирование по образующим на очень больших участках, поскольку подынтегральное выражение убывало медленно. Предлагается осуществить модификацию алгоритма (независимо от факта регуляризации, поскольку речь идет о сходящихся интегралах), заключающуюся в учете асимптотики подынтегрального выражения на бесконечности. Пусть в некоторой точке требуется выполнение интегрального уравнения. При вычислении внутреннего интеграла (от нуля до бесконечности) выберем на образующей определенную точку, отстоящую от вершины конуса на расстоянии того же порядка, что и точка, в которой интеграл вычисляется, и будем интегрировать от нуля до этой точки и от нее до бесконечности. Первый интеграл оставляем без изменения, а во втором – к множителю при степени r_1 прибавляем и вычитаем следующий коэффициент его разложения по отрицательным степеням радиуса. Слагаемое со знаком плюс образует отдельный интеграл, который вычисляется в явном виде. Очевидно, что оставшийся интеграл вычисляется более эффективно.

Приведем итоговое выражение для интеграла в диапазоне $2 < \lambda < 3$

$$\int_0^\infty r_1^{\lambda-2}\xi_1(\varphi_1, r_1)\,dr_1 = \int_0^a r_1^{\lambda-2}\xi_1(\varphi_1, r_1)\,dr_1 + \int_a^\infty r_1^{\lambda-2}\xi_2(\varphi_1, r_1)\,dr_1 - I_4(\varphi, \varphi_1)\frac{r^2 a^{\lambda-3}}{\lambda-3}$$

$$\xi_2(\varphi_1, r_1) = \xi_1(\varphi_1, r_1) - I_4(\varphi, \varphi_1)\frac{r^2}{r_1^2}, \qquad I_4(\varphi, \varphi_1) = \frac{15I_3^2(\varphi, \varphi_1) - 3}{2} \tag{6}$$

Были проведены расчеты для значений показателей 0,5 и 0,9. Интегралы вычислялись в точке на единичном расстоянии от вершины конуса, а введенная выше вспомогательная точка располагалась на расстоянии 10. Учет асимптотики привел к тому, что точность в третьем знаке была достигнута в первом случае на участке длины 10, а во втором – 20. В то же время расчеты без учета асимптотики в первом случае потребовали производить интегрирование на участке длиной 3×10^4. Во втором же случае интегрирование на участке длиной 10^6 привело к погрешности 35%.

Таким образом, результаты расчетов подтверждают эффективность модификации, особенно для значений показателей, близких к целым числам, но меньших их.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перлин П.И.* Об асимптотиках решений краевых задач теории потенциала и теории упругости в окрестности конических точек границы // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 835–839.
2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
3. *Bazant Z.P., Keer L.N.* Singularities of elastic stress and of harmonic function at conical notches or inclusions // Intern. J. Solids and Struct. 1974. V. 10. № 9. P. 957–964.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1991

УДК 539.3:534.1

Ю.А. Демьянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НИТИ

Предлагается асимптотический метод решения задач распространения волн в нити, использующий в качестве малого параметра величину характерной деформации. Метод продемонстрирован на примере точечного воздействия на фиксированную частицу нити, моделируемого ее нестационарным перемещением (это воздействие обычно называется поперечным ударом [1, 2]).

В рассматриваемом случае распространяющиеся в нити со скоростью a_0 продольные волны создают соответствующее натяжение перед головной поперечной волной, скорость которой много меньше a_0. Уравнение количества движения по первоначальному направлению нити приводит в нулевом приближении к независимости натяжения от координаты в области распространения поперечных волн. После определения поперечных смещений в этой области находится поле продольных скоростей и продольных деформаций, причем продольная и поперечная составляющие деформации в нулевом приближении значительно превышают по величине общую деформацию (их порядок ниже порядка последней).

Для случая степенной зависимости скорости приложенного воздействия (поперечного удара) от времени при отсутствии начального натяжения в нити поле поперечных перемещений носит автомодельный характер.

1. Пусть в момент времени $t = 0$ но гибкой нити бесконечной длины, расположенной вдоль оси x, проводится точечное воздействие (удар), сводящееся к перемещению точки $s_0 = 0$ по закону $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ (s_0 – лагранжева координата). Уравнения движения нити имеют вид [1]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\varphi), \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\varphi) \tag{1.1}$$

Здесь ρ_0 – начальная плотность нити, предполагаемая постоянной, x, y – перемещения точки s_0, T – натяжение, являющееся функцией деформации e, φ – угол наклона элемента нити к его первоначальному направлению,

$$e = \left[\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2\right]^{1/2} - 1, \quad \cos\varphi = \left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0}\right)(1+e)^{-1},$$

$$\sin\varphi = \frac{\partial y}{\partial s_0}(1+e)^{-1}$$

Характеристики системы (1.1) и соотношения на них имеют вид [1]

$$ds_0/dt = \pm a, \quad \cos\varphi du + \sin\varphi dv = \pm a(\cos\varphi d\mu + \sin\varphi d\vartheta)$$

$$ds_0/dt = \pm \lambda, \quad \cos\varphi dv - \sin\varphi du = \pm \lambda(\cos\varphi d\vartheta - \sin\varphi d\mu) \tag{1.2}$$