

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В.В. Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа-Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928–937.
2. Козлов В.В. Гипотеза о существовании асимптотических движений в классической механике // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 4. С. 72–73.
3. Kneser A. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen // J. reine und angew. Math. 1897. Bd. 118. H. 3. S. 186–223.
4. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
5. Сосницкий С.П. О неустойчивости равновесия натуральных систем // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во Вычисл. центра АН СССР, 1991. С. 48–61.
6. Виннер Г.М. Асимптотические движения механических систем с неголономными связями // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 549–555.
7. Сосницкий С.П. Об устойчивости равновесий неголономных систем в одном частном случае // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 4. С. 440–447.

Подгорица

Поступила в редакцию
19.II.1992

УДК 532.5:534.1

© 1993 г. А.Г. Петров, В.Г. Смолянин

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Предлагается численная схема расчета нестационарных, периодических по пространству капиллярно-гравитационных волн. Существенным отличием от существующих методов граничных интегральных уравнений [1, 2] является использование полученного в работе уравнения для кривизны кривой, меняющейся во времени. Метод обладает высокой точностью и экономичностью. Приводятся результаты тестирования, а также расчеты обрушения волн при изменении глубины, образования струи при колебании жидкости с большой амплитудой.

1. Краевая задача для потенциала поля скорости. Введем декартову систему координат x, y , где ось y направлена вертикально вверх. Без ограничения общности будем полагать, что длина одного периода волны равна 2π , а ускорение силы тяжести равно единице.

Пусть $x(t, s), y(t, s)$ – параметрическое уравнение профиля L одного периода волны в момент времени t , где s – натуральный параметр ($ds^2 = dx^2 + dy^2$, $0 < s < l(t)$, $l(t)$ – длина дуги одного периода волны), уравнения $y = 0$ и $y = -h$ определяют соответственно невозмущенную поверхность волны и уровень дна. Нормаль всюду предполагается внутренней по отношению к жидкости.

Тогда потенциал поля скорости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения Ω , условию периодичности, условию на дне и динамическому и кинематическому условиям на свободной поверхности L :

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \Phi(x + 2\pi, y) = \Phi(x, y), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{y=-h} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + y - \sigma k = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_L = v = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{на } L \quad (1.2)$$

Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, k – кривизна, v – компонента скорости частиц жидкости в направлении внутренней к жидкости нормали n . Под $\partial/\partial t$ понимается частная производная по времени при фиксированных декартовых координатах x и y .

Задача (1.1), (1.2) определяет потенциал поля скорости Φ при известном движении профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности жидкости конечной глубины.

2. Параметрическое уравнение свободной поверхности. Профиль свободной поверхности волны, меняющейся во времени, будем описывать натуральным уравнением $k = k(t, s)$, где

k – кривизна кривой, s – натуральный параметр (длина дуги от фиксированной точки). Тогда радиус-вектор $r(x, y)$ и координаты профиля волны x, y можно найти интегрированием следующей системы уравнений:

$$\partial\theta/\partial s = k, \quad \partial r/\partial s = \tau \quad (2.1)$$

Единичный вектор τ , направленный по касательной к профилю волны, имеет компоненты $\cos\theta, \sin\theta$, где θ – угол наклона касательной к горизонтальной оси x .

Натуральный параметр s удобно выразить через параметр z , меняющийся на периоде в фиксированных, не зависящих от времени пределах:

$$ds = l(t)f(z)dz, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad \left(\int_0^1 f(z)dz = 1 \right) \quad (2.2)$$

где l – длина одного периода волны, так что функция $f(z)$ подчинена условию, указанному выше в скобках.

Таким образом, профиль волны определяется следующим параметрическим уравнением: $r = r(z, t)$.

Если точки на профиле (маркеры) расположить в значениях $z_i = i/N$ ($i = 1, 2, \dots, N$) с постоянным шагом $\Delta z = 1/N$ по параметру z , то расстояние между точками будет определяться по формуле (2.2) как $\Delta s = lf(z_i)\Delta z_i$. Таким образом, $f(z)$ – величина, обратная к плотности маркеров.

Будем считать, что $f(z)$ не зависит от времени. Поэтому отношение расстояний между точками будут сохраняться во времени. По-видимому, впервые такое распределение маркеров было предложено в [2]. Последующие работы [3] проводились с таким же распределением маркеров и подтвердили устойчивость численных схем.

3. Уравнение изменения кривизны. Пусть $v(t, z)$ и $u(t, z)$ – компоненты скорости движения маркеров, v – нормальная к профилю волны, u – касательная. Тогда

$$\partial r/\partial t = \tau u - v\nu \quad (3.1)$$

где ν – вектор с компонентами $-\sin\theta, \cos\theta$, перпендикулярный τ . Выразим изменение кривизны k со временем через компоненты скорости маркеров u и v . Для этого перейдем в уравнении (2.1) от переменной s к переменной z с помощью (2.2)

$$\partial r/\partial z = \tau lf \quad (3.2)$$

Из равенств (3.1) и (3.2) вытекает, что

$$\partial^2 r/\partial t \partial z = \partial(\tau u - v\nu)/\partial z = \partial(\tau lf)/\partial t = \partial^2 r/\partial z \partial t \quad (3.3)$$

Воспользуемся формулами дифференцирования векторов τ, ν по z и t

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \nu \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} = -\tau \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \nu \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

и подставим их в (3.3). Тогда получим векторное уравнение, из которого следуют два скалярных

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{\partial \theta}{\partial z} = f \frac{dl}{dt}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{u}{lf} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{lf} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.4)$$

Продифференцировав по z второе уравнение (3.4) и сделав замены

$$K = kl, \quad V = v/l, \quad U = u/l, \quad \partial\theta/\partial z = fkl = fK, \quad (3.5)$$

получим искомое уравнение для изменения кривизны профиля

$$\frac{\partial fK}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{UfK - \partial V/\partial z}{f} \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) имеет дивергентную форму, удобную для построения численной схемы, консервативной по отношению к величине fK .

4. Уравнение для элемента длины и касательной скорости. Первое уравнение (3.4) при помощи замены (3.5) представится в форме

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{f(z)}{l} \frac{dl}{dt} - fKV(z) \quad (4.1)$$

Интегрируя уравнение (4.1) по z в пределах от 0 до 1, используя периодичность функции $U(z)$ и условие, приведенное в скобках в (2.2), получим

$$\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^1 fKV(z') dz' \quad (4.2)$$

Интегрируя (4.1) по z при помощи соотношения (4.2), получим выражение для касательной скорости

$$U = U_0 + \int_0^z (f(z') \int_0^1 fKV(z'') dz'' - fKV(z')) dz' \quad \left(\int_0^1 U dz = 0 \right) \quad (4.3)$$

причем произвольную постоянную U_0 целесообразно вычислить из условия, приведенного в скобках.

Представляет интерес уравнение для изменения со временем элемента длины ds (расстояния между маркерами)

$$\frac{\partial}{\partial t} ds = \left(kv + \frac{\partial u}{\partial s} \right) ds \quad (4.4)$$

где первое слагаемое определяет изменение элемента ds за счет его удлинения при движении маркеров по нормали со скоростью v , второе слагаемое определяет удлинения при движении маркеров по касательной к кривой с различными скоростями u .

В то же время из требования (2.2) следует, что расстояние между маркерами меняется пропорционально длине профиля

$$\partial(ds)/\partial t = (l^{-1} dl/dt) ds \quad (4.5)$$

Уравнение, вытекающее из (4.4) и (4.5), эквивалентно уже полученному уравнению (3.4), определяющему скорость движения маркеров по касательной к кривой.

5. Уравнение для потенциала на свободной поверхности. Выразим частную производную $\partial'/\partial t$ при постоянных x и y через производную $\partial/\partial t$ при постоянном z с помощью (2.2) и (3.5)

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial s} - v \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{U}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - V^2 l^2$$

Тогда динамическое граничное условие на свободной поверхности (1.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} V^2 l^2 - y + U \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\sigma f K}{lf} \quad (5.1)$$

Это уравнение определяет значение потенциала на профиле волны как функцию $\Phi(t, z)$. Для замыкания системы уравнений необходимо получить выражение для скорости $V(t, z)$.

6. Вычисление нормальной скорости по значению потенциала на свободной поверхности. Функция тока Ψ является гармонической функцией в области течения жидкости и удовлетворяет следующему условию на дне $\Psi(x, -h) = \Psi_h = \text{const}$. Можно показать, что значения функции тока $\Psi(Q)$ и потенциала $\Phi(Q)$ на свободной поверхности связаны линейным соотношением

$$- \int_L (W(Q, Q') \frac{\partial \Phi}{\partial s'}(Q') + (\Psi(Q') - \Psi(Q)) \frac{\partial W}{\partial n'}(Q')) ds' = \pi(\Psi(Q) - \Psi_h) \quad (6.1)$$

где $W(Q, Q')$ — функция Грина для задачи Дирихле в области течения жидкости. Интегрирование ведется по профилю волны L , $Q'(x', y')$ — точка интегрирования, принадлежащая L , ds' — элемент дуги в точке Q' , $Q(x, y)$ — фиксированная точка. Функция $W(Q, Q')$ имеет вид

$$W(Q, Q') = W(x, y, x', y') = \frac{1}{2} \ln \frac{\text{ch} \bar{y} - \cos \bar{x}}{1 - 2E \cos \bar{x} + E^2}, \quad E = e^{-(y+y'+2h)} \quad (6.2)$$

$$\bar{x} = x' - x, \quad \bar{y} = y' - y \quad (6.3)$$

7. Формулы численного дифференцирования и интегрирования. Пусть функция $F(z)$ периода 1 представляется кубическим сплайном на отрезке $z_{i-1} < z < z_i$, $z_i = i/N$, ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$P_i(z) = F_{i-1} q_1 + F_i q_2 + \alpha_{i-1} q_3 + \alpha_i q_4 \quad (7.1)$$

где F_i — значения функции $F(z)$ в точках $z = z_i$, q_i — кубические многочлены переменной $X = N(z - z_{i-1})$, $0 \leq X \leq 1$:

$$q_1 = 1 - X, \quad q_2 = X, \quad q_3 = -(X^3 - 3X^2 + 2X)/6, \quad q_4 = (X^3 - X)/6$$

Значения a_i находятся из условий непрерывности первой и второй производных сплайна в узлах сетки $z = z_i$ и условия периодичности методом прогонки.

Формулы дифференцирования и интегрирования выражаются через коэффициенты сплайна a_i :

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z_i} = \frac{N}{2} (F_{i+1} - F_{i-1} - \frac{1}{12} (\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})) \quad (7.2)$$

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} F(z) dz = \frac{1}{2N} (F_{i+1} + F_{i-1} - \frac{1}{24} (\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})) \quad (7.3)$$

Формула (7.2) имеет порядок точности N^{-3} , а (7.3) — N^{-4} .

Вытекающая из (7.3) формула интегрирования по периоду имеет вид

$$\int_0^1 F(z) dz = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i + R_N, \quad R_N = \frac{1}{720N^4} F^{(IV)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1 \quad (7.4)$$

Остаточный член R_N формулы (7.4) имеет коэффициент, в 8 раз меньший по сравнению с остаточным членом формулы Симпсона.

Для интегрирования периодических функций с логарифмической особенностью можно получить следующую квадратурную формулу при четном числе маркеров $N = 2M$:

$$\int_0^1 \ln|\sin(z - z_i)| F(z) dz = \sum_{j=1}^N \alpha_{(i-j)} F_j \quad (7.5)$$

$$\alpha(m) = \frac{-1}{N} \left(\ln 2 + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{j} \cos(2\pi j \frac{m}{N}) \right) + \frac{(-1)^m}{N}$$

Формула (7.5) является точной для всех тригонометрических полиномов порядка N .

3. Аппроксимация интегрального уравнения для функции тока. При помощи квадратурных формул (7.4), (7.5) можно получить следующую аппроксимацию уравнения (6.1):

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j} + B_{ij} \Psi_j) = \pi(\Psi_i - \Psi_N) \quad (8.1)$$

$$A_{ij} = -\frac{1}{N} (W(x_i, y_i, x_j, y_j) + \beta |i - j|), \quad i \neq j$$

$$\beta(m) = -\ln|\sin \pi \frac{m}{N}| + N\alpha(m), \quad m \geq 1$$

$$A_{ii} = -\frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{l^2 f^2(z_i)}{2\pi^2 (1 - e^{-z(y_i+h)})^2} \right) - \alpha(0) \quad (8.2)$$

$$B_{ij} = -\frac{1}{N} \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \sin \theta_j - \frac{\partial W}{\partial y_j} \cos \theta_j \right), \quad i \neq j, \quad B_{ii} = -\sum_{k \neq i} B_{ik} \quad (8.3)$$

Коэффициенты матрицы B_{ij} на свободной поверхности достаточно малы, а на свободной поверхности вида $y = 0$ тождественно равны нулю. Поэтому для определения Ψ из (8.1) можно пользоваться итерационными методами. При расчетах нестационарных волн обычно хватает одной-двух итераций.

Нормальная к профилю волны компонента скорости V определяется дифференцированием

$$V = (l^2 f)^{-1} \partial \Psi / \partial z \quad (8.4)$$

Точность расчета функции тока Ψ и скорость сходимости метода проверялась следующими вычислениями. По точному решению уравнения Лапласа $\Psi = \sin(x) \operatorname{sh}(y+h)$ на кривой $x = 2\pi z$, $y = \sin(2\pi z)$ вычисляем точные значения $\partial \Phi / \partial z = -f(z) \partial \Psi / \partial x$ и подставляем в (8.1). Прибли-

Величина	Расчет по формулам (11.1)		Погрешность численного решения			
	a = 0,2	a = 0,3	a = 0,2		a = 0,3	
			N = 8	N = 32	N = 8	N = 32
$E_p(\pi/2)$	0,061612	0,135414	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$
$y(\pi/2, \pi)$	0,219711	0,343656	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
$E(\pi)$	0,061611	0,135414	$3 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$E_p(\pi)$	$8 \cdot 10^{-8}$	$215 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-8}$
$y(\pi, \pi)$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$

женные значения Ψ_j , полученные из решения системы уравнений (8.1) сравниваются с точными значениями функции тока $\Psi_{ex} = \sin(2\pi z_j) \text{sh}(\sin(2\pi z_j) + h)$.

Относительная погрешность $\epsilon(N) = \max|\Psi - \Psi_{ex}|/\max|\Psi|$ в зависимости от числа N уменьшается при глубине $h = 100$ следующим образом: $\epsilon(8) = 10^{-3}$, $\epsilon(12) = 7 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon(16) = 3 \cdot 10^{-7}$. При глубине $h = 1,5$ имеем $\epsilon(8) = 10^{-3}$, $\epsilon(12) = 2 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon(16) = 9 \cdot 10^{-7}$.

9. Полная система уравнений. Приведем окончательную систему уравнений для описания эволюции волны во времени

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j} + B_{ij} \Psi_j) = \pi \Psi_i$$

$$V = (l^2 f(z))^{-1} \partial \Psi / \partial z$$

$$U = U_0 + \int_0^z (f(z') \int_0^1 f K V(z'') dz'' - f K V(z')) dz'$$

(9.1)

$$\frac{\partial f K}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{U f K - \partial V / \partial z}{f}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} V^2 l^2 - y + U \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{1}{2l^2} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial f K}{l f}$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^z f k dz', \quad x = x_0 + l \int_0^z f \cos \theta dz', \quad y = y_0 + l \int_0^z f \sin \theta dz'$$

Матрицы A_{ij} , B_{ij} вычисляются по формулам (8.2), (8.3). Постоянные интегрирования U_0 , θ_0 , x_0 , y_0 и l находятся из следующих требований. Должны точно выполняться условия периодичности: $U(z+1) = U(z)$, $\theta(z+1) = \theta(z)$, $y(z+1) = y(z)$, $x(z+1) = x(z) + 2\pi$; функции $U(z)$ и $y(z)$ подчиняются условиям

$$\int_0^1 U(z) dz = 0, \quad \int_0^1 y(z) dx(z) = 0$$

Четвертое и пятое уравнения (9.1) аппроксимируются системой дифференциальных уравнений порядка $2N$ и решаются методом Адамса четвертого порядка. В начальный момент задаются значения кривизны k_i и потенциал Φ_i в N точках, расположенных на поверхности волны. Расстояния между маркерами определяются функцией $f(z)$, которую целесообразно задавать так, чтобы ее точка максимума попала в окрестность наибольшей кривизны профиля волны.

10. Формулы перехода в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью c . Для расчета бегущих нестационарных волн удобно переходить в подвижную систему координат. Для этого достаточно подставить в уравнение (5.1)

$$V = V' + c (l^2 f)^{-1} \partial y / \partial z, \quad U = U' + c (l^2 f)^{-1} \partial x / \partial z \quad (10.1)$$

Параметр c удобен для расчетов опрокидывающихся волн. Удачным выбором параметра c можно добиться, чтобы минимум функции $f(z)$ находился в точке наибольшей кривизны

профиля волны. Таким образом, в окрестности такой точки плотность распределения маркеров будет наибольшей.

11. Тестирование численного метода расчета нестационарных волн. Точность метода проверяется на периодических стоячих волнах, для которых авторами [4] получены решения в виде разложений по малому параметру — амплитуде волны a при помощи системы аналитических вычислений REDUCE [5]. Аналогичные разложения были приведены в [6, 7]. Таким путем могут быть представлены полная энергия волны E , потенциальная энергия $E_p(\omega t)$, и уравнение профиля волны $y(\omega t, x)$, где ω — круговая частота колебаний. В частности, в моменты времени $\omega t_1 = \pi/2$ и $\omega t_2 = \pi$ для этих функций получим с точностью до a^6 :

$$E_p(\pi/2) = E = \frac{\pi a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{223}{616} a^4 - 0,10261 a^6 + \dots \right)$$

$$E_p(0) = E_p(\pi) = \frac{\pi a^2}{2} (0,02084 a^6 + \dots)$$

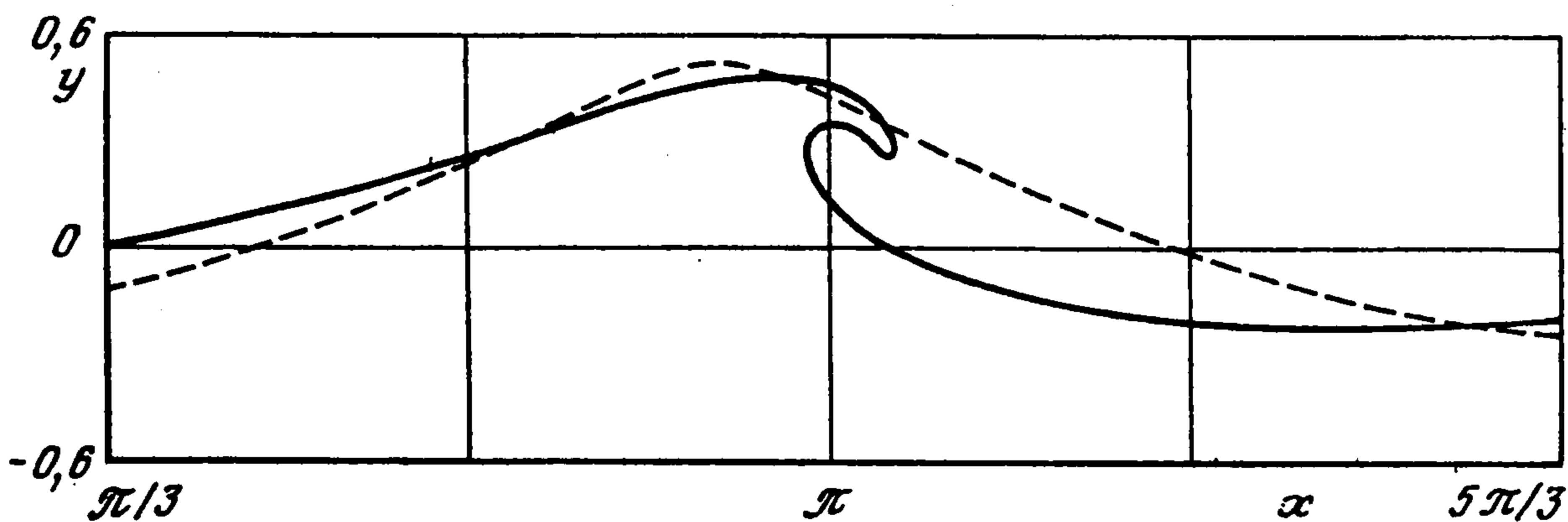
$$y(0, \pi) = y(\pi, \pi) = \frac{41}{336} a^4 - 0,12983 a^6 + \dots \quad (11.1)$$

$$y(\pi/2, \pi) = a + \frac{1}{2} a^2 - \frac{19}{112} a^4 + 0,04122 a^6 + \dots$$

$$\omega = 1 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{11}{256} a^4 - 0,004492 a^6 + \dots$$

Для оценки точности и сходимости численного метода были проведены расчеты стоячей волны при значениях амплитуды $a = 0,2$ и $a = 0,3$ (при $a = 0,3$ порядок остаточных членов рядов (11.1) около 10^{-5}). Результаты сравнения численных результатов со значениями соответствующих величин, полученными по формулам (11.1), приведены в таблице. Для волны максимального развития кинетическая энергия равна нулю, поэтому $E(\pi/2) = E_p(\pi/2)$.

12. Примеры расчетов волн. Были проведены расчеты для задачи об опрокидывании бегущей волны в глубокой воде при переходе на глубину $h = 1$ и для задачи об образовании кумулятивной струи при неперіодических стоячих колебаниях жидкости в сосуде.

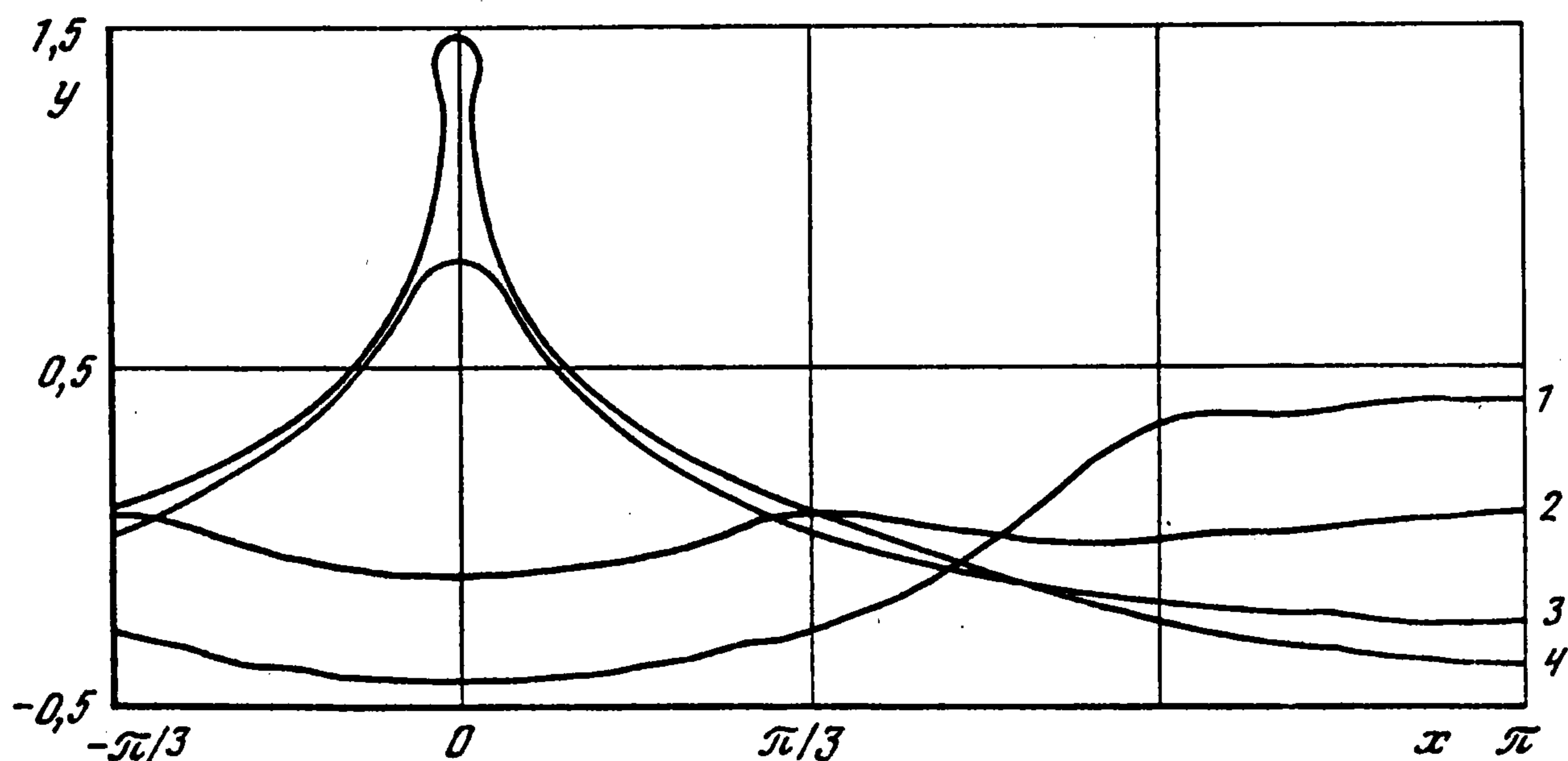


Фиг. 1

Расчет обрушения волны проводился следующим образом. Рассчитывался профиль прогрессивной волны заданной конечной амплитуды в тяжелой жидкости заданной глубины по схеме, приведенной в [8].

Все полученные характеристики волны (скорость распространения, энергия и импульс) сравнивались с соответствующими результатами [9], полученными методом суммирования рядов, и совпадали во всех приведенных в [9] значащих цифрах. Затем полученный профиль и поле скоростей принимались за начальные данные, и рассчитывалось изменение профиля волны со временем в жидкости с измененной глубиной. Расчет проводился методом, изложенным в настоящей работе.

На фиг. 1 штрихами изображен профиль прогрессивной волны с амплитудой $a = 0,406$ в жидкости бесконечной глубины, соответствующий [9]. Сплошной линией изображен профиль волны при ее опрокидывании при переходе на глубину $h = 1$.



Фиг. 2

Подобное опрокидывание волны под действием переменной ветровой нагрузки на глубокой воде рассматривалось в [10].

Во втором примере в момент времени $t = 0$ задается неподвижный синусоидальный профиль амплитуды $a = 0,5$. Глубина бесконечная. В линейном приближении этому начальному условию соответствует периодическая стоячая волна. Вследствие нелинейности после нескольких периодов колебаний образуется кумулятивная струя. На фиг. 2 изображены свободные поверхности в моменты времени $t = 13,5; 14,5; 15,5; 16,3$ (кривые 1–4 соответственно, симметричные относительно оси $x = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов В.В., Воинов О.В., Петров А.Г. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 3. С. 797–802.
2. Воинов В.В., Воинов О.В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
3. Dommermuth D.G., Yue D.K.P. Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flows with a free surface. // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 195–219.
4. Петров А.Г., Смолянин В.Г. Принцип Гамильтона и волны на поверхности тяжелой жидкости. // Механика: Современные проблемы. М.: 1987. С. 57–63.
5. Hearn A.C. REDUCE-2 User's Manual. Stanford: Stanford Univ., 1973.
6. Aoki H. Higher order calculation of finite periodic standing gravity waves by means of the computer. // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 49. No. 4. P. 1598–1606.
7. Schwartz L.W., Whitney A.K. A semi-analytic solution for nonlinear standing waves in deep water // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 147–171.
8. Петров А.Г., Смолянин В.Г. Расчет профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины. Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1991. № 3. С. 92–96.
9. Cokelet E.D. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1977. V. A286. No 1335. P. 183–230.
10. Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D. The deformation of steep surface waves on water: 1. A numerical method of computation. // Proc. Roy. Soc. London. 1976. V. A350. No 1660. P. 1–26.