ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 4, 1993

УДК 531.36

©1993 г. Р.М. Булатович

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методами, изложенными ранее [1], исследуется задача о существовании асимптотических движений механических систем в случае, когда ряд Маклорена потенциальной энергии начинается с постоянно положительной квадратичной формы.

1. Рассмотрим сначала движение механической системы, описываемое уравнениями Лагранжа с аналитическим лагранжианом

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad x \in R^n; \quad L(x, x^{\cdot}) = T(x, x^{\cdot}) - \Pi(x) \tag{1.1}$$

где $T = ½\langle K(x)x^{\cdot}, x^{\cdot}\rangle$ – кинетическая энергия ($K(x)$ – положительно определенная матрица, $\langle,\rangle$ – скалярное произведение в R^n), $\Pi(x)$ – потенциальная энергия. Предположим, что система (1.1) имеет положение равновесия, которое без уменьшения общности будем считать началом координат, и пусть $\Pi(0) = 0$. Движение $x(t) \not\equiv 0$ называется асимптотическим, если $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В силу обратимости времени ($x(-t)$ тоже является движением), из факта существования асимптотического движения вытекает неустойчивость равновесия в смысле определения Ляпунова.

Была высказана гипотеза [2]: если в точке $x = 0$ функция $\Pi(x)$ не имеет минимума, то асимптотическое движение существует.

Доказательство гипотезы представляет сложную задачу, решенную при некоторых дополнительных условиях. Первые результаты в этом направлении принадлежат Кнезеру [3], наиболее сильные результаты – В.В. Козлову [1]. Эти утверждения дополним теоремами 1 и 2, приводимыми ниже, а потом сформулируем некоторые обобщения на ненатуральные системы.

Пусть

$$\Pi(x) = \Pi_2(x) + \Pi_j(x) + \ldots \ (2 < j) \tag{1.2}$$

– разложение потенциальной энергии в ряд Маклорена, Π_i – однородные формы степени i, Π_j – первая нетривиальная форма после квадратичной. В дальнейшем предполагается, что квадратичная форма Π_2 имеет $l\,(1 < l < n)$ нулевых и $n - l$ положительных собственных значений. Отметим, что если $l = 0$, то равновесие устойчиво и асимптотических движений нет. Через P обозначим ограничение функции Π на l-мерную плоскость $\pi = \{x: \Pi_2(x) = 0\}$.

Теорема 1. Система (1.1), (1.2) обладает асимптотическим движением, если выполнено одно из следующих двух условий:

а) в точке $x = 0$ функция $\Pi(x)$ не имеет минимума и $P \equiv 0$,

б) первая нетривиальная форма P_r в разложении функции P может принимать отрицательные значения.

Отметим, что в случае б) формы $\Pi_j, \ldots, \Pi_{r-1}$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

При $r = j$ случай б) совпадает с известным результатом [1].

Доказательство. В окрестности точки $x = 0$ можно ввести нормальные координаты, в которых (E – единичная матрица)

$$T = ½\langle (E + B(x))x^{\cdot}, x^{\cdot}\rangle, \quad B(0) = 0 \tag{1.3}$$

$$\Pi = ½\langle Dy, y\rangle + \Pi_j(x) + \ldots, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_i), \lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n - l$$

$$x = (y, z), y \in R^{n-l}, \quad z \in R^l \tag{1.4}$$

Согласно лемме о расщеплении [4], посредством нелинейной замены вида

$$\bar{y} = y + b(x), \quad b(x) = b_{j-1}(x) + b_j(x) + \ldots, \quad \bar{z} = z \tag{1.5}$$

можно привести разложение (1.4) к виду

$$\bar{\Pi} = ½\langle D\bar{y}, \bar{y}\rangle + W(\bar{z}), \quad W(\bar{z}) = W_k(\bar{z}) + \ldots, k > 2 \tag{1.6}$$

Ясно, что

$$P(z) \equiv ½\langle Dc(z), c(z)\rangle + W(z) \tag{1.7}$$

$$(c(z) = b(y = 0, z) = c_m(z) + \ldots, m > j - 1)$$

Из предположений случая а) следует, что функция $W(z) \not\equiv 0$ и неположительна. . Пусть теперь выполняются предположения случая б). Если $2m > r$, то $k = r$ и $W_r(z) \equiv P_r(z)$. Если $2m < r$ то $k = 2m$ и $W_k(z) < 0$. Следовательно, в предположениях теоремы 1 первая нетривиальная форма $W_k(z)$ ряда Маклорена функции $W(z)$ принимает отрицательные значения. Далее, можно воспользоваться известным результатом [1], согласно которому существуют асимптотические движения, асимптотические разложения которых в переменных $\bar{y}$, $\bar{z}$ имеют вид

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_i(\tau)}{t^{2+\mu(2+i)}}, \quad \bar{z} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_i(\tau)}{t^{\mu(1+i)}}, \quad \tau = \ln(t), \quad \mu = \frac{2}{k-2}$$

где y_i, z_i — некоторые полиномы от τ. Теорема доказана.

Заметим, что неисследованной остается ситуация, когда $P_r \geqslant 0$. Ясно, что тогда r четно. Если форма P_r положительно определена и $2(j-1) > r$, то в положении равновесия потенциальная энергия имеет локальный минимум и асимптотических движений нет. Если $2(j-1) < r$ и $\operatorname{grad}\Pi_j|_\pi \not\equiv 0$, то в выражение (1.7) $c_{j-1}(z) \not\equiv 0$. Следовательно, $k = 2(j-1)$ и $W_k < 0$.

Итак, доказана

Теорема 2. Если $P_r \geqslant 0, r > 2(j-1)$ и $\operatorname{grad}\Pi_j|_\pi \not\equiv 0$, то асимптотическое движение существует.

Следствие 1. В предположениях теорем 1 и 2 положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

2. Обратимся теперь к более общему случаю, когда вместо натуральной системы рассматривается система с полунатуральным лагранжианом

$$L = ½\langle K(x)x^\bullet, x^\bullet\rangle + \langle v(x), x^\bullet\rangle - \Pi(x) \tag{2.1}$$

где $v(x)$ — аналитическое векторное поле в R^n. Не уменьшая общности, предположим, что $v(0) = 0$. Разложение $v(x)$ в ряд Маклорена имеет вид $v(x) = v_m(x) + v_{m+1}(x) + \ldots, m \geqslant 1$. Остальные предположения те же, что и в разд. 1.

При помощи процедуры, аналогичной использованной в разд. 1, доказывается

Теорема 3. Система (1.1), (2.1) обладает асимптотическим движением, если выполнено одно из следующих условий:

а) $m > [r/2]$ и форма P_r может принимать отрицательные значения,

б) $m > j - 1$, $r > 2(j-1)$ и $\operatorname{grad}\Pi_j|_\pi \not\equiv 0$

При $r = j$ случай а) следует из результата работы [5].

Отметим что если $x(t)$ — движение системы с лагранжианом (2.1), то $x(-t)$ — движение системы с лагранжианом $L^- = L(x, -x^\bullet)$ и наоборот. Так как условия теоремы инвариантны относительно обращения времени, то справедливо

Следствие 2. В указанных предположениях положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

3. Пусть на полунатуральную систему дополнительно налагается s связей, линейных по скоростям $\langle a_i(x), x^\bullet\rangle = 0, i = 1, \ldots, s < n$, где $a_i(x)$ — аналитическое векторное поле в R^n и $a_i(0) \neq 0$. Векторы a_i считаются линейно независимыми. Движение такой системы описывается уравнениями Лагранжа с множителями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x^\bullet} - \frac{\partial L}{\partial x} = \Sigma \lambda_i a_i, \quad \langle a_i(x), x^\bullet\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, s \tag{3.1}$$

Через $\hat{P}_r$ обозначим ограничение формы P_r на подпространство, ортогональное всем связям в нуле.

Теорема 4. Если $m > [r/2]$ и форма $\hat{P}_r$ может принимать отрицательные значения, то существует асимптотическое движение системы (3.1) и равновесие $x = 0$ неустойчиво.

При $v(x) \equiv 0$ и $r = j$ теорема 4 совпадает с полученным ранее результатом [6], а при $\Pi_2 \equiv 0$ — с аналитическим случаем результата [7].

Для доказательства теоремы 4 надо сначала привести разложение потенциальной энергии к виду (1.6), а потом использовать известную методику [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа-Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928–937.
2. *Козлов В.В.* Гипотеза о существовании асимптотических движений в классической механике // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 4. С. 72–73.
3. *Kneser A.* Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen // J. reine und angew. Math. 1897. Bd. 118. H. 3. S. 186–223.
4. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
5. *Сосницкий С.П.* О неустойчивости равновесия натуральных систем // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: Изд-во Вычисл. центра АН СССР, 1991. С. 48–61.
6. *Виннер Г.М.* Асимптотические движения механических систем с неголономными связями // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 549–555.
7. *Сосницкий С.П.* Об устойчивости равновесий неголономных систем в одном частном случае // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 4. С. 440–447.

Подгорица

Поступила в редакцию 19.II.1992

УДК 532.5:534.1

© 1993 г. А.Г. Петров, В.Г. Смолянин

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Предлагается численная схема расчета нестационарных, периодических по пространству капиллярно-гравитационных волн. Существенным отличием от существующих методов граничных интегральных уравнений [1, 2] является использование полученного в работе уравнения для кривизны кривой, меняющейся во времени. Метод обладает высокой точностью и экономичностью. Приводятся результаты тестирования, а также расчеты обрушения волн при изменении глубины, образования струи при колебании жидкости с большой амплитудой.

1. Краевая задача для потенциала поля скорости. Введем декартову систему координат x, y, где ось y направлена вертикально вверх. Без ограничения общности будем полагать, что длина одного периода волны равна 2π, а ускорение силы тяжести равно единице.

Пусть $x(t, s)$, $y(t, s)$ – параметрическое уравнение профиля L одного периода волны в момент времени t, где s – натуральный параметр ($ds^2 = dx^2 + dy^2$, $0 < s < l(t)$, $l(t)$ – длина дуги одного периода волны), уравнения $y = 0$ и $y = -h$ определяют соответственно невозмущенную поверхность волны и уровень дна. Нормаль всюду предполагается внутренней по отношению к жидкости.

Тогда потенциал поля скорости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа в области течения Ω, условию периодичности, условию на дне и динамическому и кинематическому условиям на свободной поверхности L:

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \Phi(x + 2\pi, y) = \Phi(x, y), \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{y=-h} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial'\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + y - \sigma k = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = v = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} \text{ на } L \tag{1.2}$$

Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, k – кривизна, v – компонента скорости частиц жидкости в направлении внутренней к жидкости нормали n. Под $\partial'/\partial t$ понимается частная производная по времени при фиксированных декартовых координатах x и y.

Задача (1.1), (1.2) определяет потенциал поля скорости Φ при известном движении профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности жидкости конечной глубины.

2. Параметрическое уравнение свободной поверхности. Профиль свободной поверхности волны, меняющейся во времени, будем описывать натуральным уравнением $k = k(t, s)$, где