

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. Т.И. Белянкова, В.В. Калинчук

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ШТАМПА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

На основании обобщения [1, 2] метода факторизации на интегральные уравнения, символы ядер которых имеют точки ветвления на вещественной оси, развивается метод исследования динамики жесткого штампа, осциллирующего на поверхности преднапряженного полупространства. Исследования проводятся в рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечную [3, 4]. Для задачи о колебаниях полосового штампа на поверхности среды построено новое приближенное решение, структура которого наглядно представляет волновое поле под штампом и на свободной поверхности, а также позволяет проводить эффективный анализ влияния начальных напряжений на волновой процесс как под штампом, так и вне его. При построении решения использована специальная аппроксимация [5], учитывающая все характерные особенности символа ядер интегрального уравнения, в том числе точки ветвления на вещественной оси. В явном виде показана осцилляция у краев штампа, обусловленная возбуждением ими продольных и поперечных волн в преднапряженной среде.

В рамках линеаризованной теории упругих волн [6, 7] был развит [8–11] эффективный метод изучения влияния начальных напряжений на волновой процесс в зоне контакта и на свободной поверхности. Однако предложенный метод не учитывал наличие у ядра интегрального уравнения точек ветвления на вещественной оси, что характерно для задач о колебаниях штампа на поверхности полупространства. Для низких частот колебаний штампа влиянием точек ветвления можно пренебречь [8–15], но для достаточно высоких частот учет точек ветвления необходим [1, 2, 5].

1. При исследовании процессов в предварительно напряженном теле различают три его состояния (конфигурации) [3, 4, 6, 7]: натуральное (ненапряженное), начально-деформированное и возмущенное. Следуя [3, 4], введем в рассмотрение систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , связанную с начально-деформированным состоянием тела, занимающего область  $x_3 \leq 0, -\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$ .

Краевая задача о возбуждении преднапряженной среды осциллирующей нагрузкой  $q(x_1, x_2, t)$ , распределенной в области  $\Omega$ , описывается линеаризованными уравнениями движения с граничными условиями [3, 4]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Theta &= \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \\ \mathbf{n} \cdot \Theta &= \mathbf{q}(x_1, x_2, t), \quad x_3 = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \Theta &= 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1, x_2 \notin \Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\Theta = T \cdot \nabla \mathbf{u} + 4 \sqrt{\frac{g}{G}} \left[ -\psi_0 \varepsilon(\mathbf{u}) + \psi_2 F \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot F + \sum_{k=0}^2 \sum_{m=0}^2 V_{km} F^k F^m \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \right]$$

Здесь  $\nabla$  – оператор Гамильтона, определенный в координатах начально-деформированной конфигурации,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещения произвольной точки,  $\rho$  – плотность среды,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности среды,  $\mathbf{q}$  – заданный вектор напряжений,  $T$  – тензор начальных напряжений,  $G, g$  – соответственно метрические множители натуральной и начально-деформированной конфигураций,  $F$  – мера деформации Фингера [3, 4] начального состояния,  $\varepsilon(\mathbf{u})$  – линейный тензор возмущенного состояния. Коэффициенты  $\psi_k$  участвуют в представлении закона состояния материала среды [3, 4]

$$T = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} (\psi_0 E + \psi_1 F + \psi_2 F^2) \quad (1.2)$$

и определяется через упругий потенциал. В случае гиперупругой, сжимаемой среды, имеющей упругий потенциал вида ( $I_k = I_k(F)$  – инварианты меры начальной деформации)

$$\Xi = \Xi(I_1, I_2, I_3) \quad (1.3)$$

коэффициенты  $\psi_k, V_{ij}$  [3, 4] определяются по формулам

$$\begin{aligned} \psi_0 &= I_3 \frac{\partial \Xi}{\partial I_3}, \quad \psi_1 = I_3 \frac{\partial \Xi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Xi}{\partial I_2}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial \Xi}{\partial I_2} \\ V_{0m} &= I_3 \frac{\partial \psi_m}{\partial I_3}, \quad V_{1m} \frac{\partial \psi_m}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi_m}{\partial I_2}, \quad V_{2m} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial I_2}, \quad m = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Далее полагаем, что колебания носят гармонический характер, все функции имеют вид  $f(x_1, x_2, x_3, t) = f'(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}$ . Далее штрихи и экспоненциальный множитель опускаем.

2. Предположим, что начальная деформация является однородной, определяемой соотношениями [3, 4] ( $\mathbf{R}, \mathbf{r}$  – радиус-векторы точки среды соответственно в начально-деформированной и натуральной конфигурациях,  $v_i = 1 + \delta_i$ ,  $\delta_i$  – относительные удлинения волокон, направленных в натуральном состоянии вдоль осей  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера)

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \Lambda, \quad F = \Lambda^T \cdot \Lambda, \quad \Lambda = [\delta_{ij} v_i]_{i,j=1,2,3}$$

В этом случае компоненты тензора  $\Theta$ , имеют вид:

$$\Theta_{ii} = 2(\det \Lambda)^{-1} \sum_{k=1}^3 X_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Theta_{ij} = 2(\det \Lambda)^{-1} \left[ v_i^2 \psi_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varphi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right], \quad i \neq j$$

$$2X_{ii} = a_i + b_{ii}, \quad X_{ij} = b_{ij}, \quad i \neq j$$

$$a_i = -\psi_0 + \psi_1 \nabla_i^2 + 3\psi_2 \nabla_i^4$$

$$b_{ij} = V_{00} + v_i^2 v_j^2 (V_{11} + V_{12} v_j^2 + V_{21} v_i^2)$$

$$\psi_{ij} = \psi_1 + \psi_2 (v_i^2 + v_j^2)$$

$$\varphi_{ij} = -\psi_0 + \psi_2 v_i^2 v_j^2$$

Используя методы операционного исчисления и принцип предельного поглоще-

ния, решение краевой задачи (1.1) можно записать в виде ( $\alpha, \beta$  – параметры преобразования Фурье по переменным  $x_1, x_2$ )

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} k(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega) q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$k(s, t, x_3, \omega) = \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K(\alpha, \beta, x_3, \omega) e^{i(\alpha s + \beta t)} d\alpha d\beta$$

Контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [1, 2] и поведением элементов матрицы-функции  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega)$  на вещественной оси, свойства которых определяются характером начального деформированного состояния и свойствами материала среды. В случае, когда начальное напряженное состояние задается условием ( $\sigma_{ii}^0$  – компоненты тензора  $T$  (1.2))

$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0$  (состояние  $a$ ), матрица-функция  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega)$  имеет характерное для динамических задач теории упругости представление [1, 2, 12, 13]:

$$K(\alpha, \beta, x_3, \omega) = \begin{vmatrix} \alpha^2 M + \beta^2 N & \alpha\beta(M - N) & -i\alpha S \\ \alpha\beta(M - N) & \beta^2 M + \alpha^2 N & -i\beta S \\ i\alpha S & i\beta S & R \end{vmatrix}$$

$$u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad M = M(u, x_3, \omega), \quad N = N(u, x_3, \omega), \quad S = S(u, x_3, \omega), \quad R = R(u, x_3, \omega)$$

$$M = [\sigma_1 m_2 e^{\sigma_1 x_3} - \sigma_2 m_1 e^{\sigma_2 x_3}] u^{-2} \Delta^{-1}, \quad N = e^{\sigma_1 x_3} u^{-2} l_3^{-1}$$

$$S = [s_1 - s_2] \Delta^{-1}, \quad R = [l_1 t_2 - l_2 t_1] \Delta^{-1}, \quad \Delta = l_1 m_2 - m_1 l_2$$

$$t_k(u, x_3) = d_k e^{\sigma_k x_3}, \quad s_k(u, x_3) = l_k \sigma_{3-k} e^{\sigma_k x_3}, \quad k = 1, 2$$

Здесь

$$l_k = A_3 \sigma_k^2 - A_8 d_k, \quad m_k = [A_6 d_k + A_4 u^2] \sigma_k$$

$$d_k = (A_3 \sigma_k^2 - R_1) / A_5, \quad k = 1, 2, \quad l_3 = A_3 \sigma_3^2$$

$$\sigma_k^2 = (D_2 \pm \sqrt{\Sigma}) / 2D_1, \quad k = 1, 2, \quad \sigma_3^2 = R_2 / A_3, \quad D_1 = A_3 A_6 \quad (2.2)$$

$$D_2 = A_3 R_3 + A_6 R_1 - A_5 u^2, \quad D_3 = R_1 R_3, \quad \Sigma = D_2^2 - 4D_1 D_3$$

$$R_k = A_k u^2 - \rho \omega^2, \quad k = 1, 2, \quad R_3 = A_7 u^2 - \rho \omega^2$$

$$A_1 = g_0 X_{11}, \quad A_2 = g_0 v_2^2 \psi_{12}, \quad A_3 = g_0 v_3^2 \psi_{13}$$

$$A_4 = 2g_0 X_{13}, \quad A_5 = g_0 (\varphi_{13} + 2X_{13}), \quad A_6 = g_0 X_{33}$$

$$A_7 = g_0 v_1^2 \psi_{13}, \quad A_8 = g_0 \varphi_{13}, \quad g_0 = 2(\det \Lambda)^{-1}$$

В случае  $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0$  (состояние  $b$ ) элементы матрицы-функции  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega) = \|K_{ij}\|_{i, j=1, 2, 3}$  имеют вид:

$$K_{11} = \{d_1 f_{11}^0 - d_2 f_{12}^0\} \Delta^{-1}, \quad K_{12} = \alpha\beta \{f_{11}^0 - f_{12}^0 + \sigma_3 \beta^{-2} f_{13}^0\} \Delta^{-1}$$

$$K_{13} = -i\alpha \{\sigma_1 f_{11}^0 - \sigma_2 f_{12}^0 + f_{13}^0\} \Delta^{-1}, \quad K_{21} = K_{12}$$

$$K_{22} = \{f_{21}^0 - f_{22}^0 + \sigma_3 \beta^{-2} f_{23}^0\} \beta^2 \Delta^{-1}, \quad K_{23} = -i\beta \{\sigma_1 f_{21}^0 - \sigma_2 f_{22}^0 + f_{23}^0\} \Delta^{-1}$$

$$K_{31} = -K_{13}, \quad K_{32} = -K_{23}, \quad K_{33} = \{\sigma_1 f_{31}^0 - \sigma_2 f_{32}^0 + f_{33}^0\} \Delta^{-1}$$

$$\Delta = \sigma_3 l_3 f_{33} - l_2 f_{32} + l_1 f_{31}$$

$$f_{1k} = \sigma_{3-k} \sigma_3 n_{3-k} l_3 - l_{3-k} n_3, \quad f_{2k} = l_{3-k} m_3 - \sigma_{3-k} \sigma_3 m_{3-k} l_3$$

$$\begin{aligned}
f_{3k} &= \sigma_{3-k} [m_{3-k} n_3 - n_{3-k} m_3], \quad k=1,2 \\
f_{13} &= n_1 [\sigma_1 l_2 - l_1 \sigma_2], \quad f_{23} = \sigma_2 m_2 l_1 - l_2 \sigma_1 m_1 \\
f_{33} &= \sigma_1 \sigma_2 n_1 [m_1 - m_2], \quad f_{ik}^0 = f_{ik} e^{\sigma_k x_3}, \quad i, k=1,2,3 \\
m_k &= A_2 k_k + \alpha^2 A_8, \quad l_k = A_6 \sigma_k^2 - (A_4 d_k + \beta^2 A_{42}) \\
n_k &= \beta^2 (A_{82} + A_{32}), \quad d_k = (A_6 \sigma_k^2 - R_6) / A_5, \quad k=1,2 \\
m_3 &= \alpha^2 A_8, \quad l_3 = A_6 - A_{42}, \quad n_3 = A_{32} \sigma_3^2 + \beta^2 A_8 \\
\sigma_{1,2}^2 &= [D_2 \pm \Sigma^{1/2}] [2D_1]^{-1}, \quad \sigma_3^2 = R_4 / A_{32} \\
D_1 &= A_2 A_6, \quad D_2 = A_{32} R_5 + A_2 R_4 + A_{52} A_2 \beta^2 + R_7 \\
D_3 &= R_4 R_5 + R_7 \beta^2, \quad \Sigma = D_2^2 - 4D_1 D_3, \quad R_4 = A_7 \alpha^2 + A_{32} \beta^2 - \rho \omega^2 \\
R_5 &= A_1 \alpha^2 + A_2 \beta^2 - \rho \omega^2, \quad R_7 = (A_{52} A_1 - A_5^2) \alpha^2 + A_{52} A_2 \beta^2 - \rho \omega^2 \\
R_6 &= A_7 \alpha^2 + A_6 \beta^2 - \rho \omega^2 \\
A_{32} &= g_0 v_3^2 \Psi_{23}, \quad A_{52} = g_0 (\Phi_{23} + 2X_{23}) \\
A_{82} &= g_0 \Phi_{23}, \quad A_{42} = 2g_0 X_{23}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

( $A_1, \dots, A_8$  определены последними формулами (2.2)).

В общем случае, когда  $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0$  ( $v_1 \neq v_2 \neq v_3$ ), элементы матрицы-функции  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega)$  имеют значительно более громоздкий вид.

3. Выражение (2.1) определяет перемещение произвольной точки среды под действием заданной нагрузки  $q(x_1, x_2)$ . В случае задачи о вибрации штампа на поверхности преднапряженного полупространства в выражениях (2.1) необходимо положить  $x_3 = 0$ . При этом  $q(x_1, x_2)$  – неизвестная функция распределения контактных напряжений  $u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$  – заданная амплитуда перемещений подошвы штампа. Частным случаем является задача о вертикальных колебаниях полосового штампа, занимающего в плане область  $|x_1| \leq a$  на поверхности преднапряженного полупространства (случай сдвиговых колебаний исследован ранее [16]). Решение ее сводится к системе интегральных уравнений ( $f(x) = \{f_1(x), f_3(x)\}$ ,  $q(x) = \{q_1(x), q_3(x)\}$ , – соответственно векторы смещений и напряжений), которую можно записать в безразмерном виде

$$f'(x'_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x'_1 - \xi') q'(\xi') d\xi', \quad |x'_1| \leq 1 \tag{3.1}$$

$$k(t') = \int_{\Gamma} K(\alpha) e^{i\alpha t'} d\alpha, \quad K(\alpha) = \|K_{ij}(\alpha)\|_{i,j=1,3}$$

$$\left( x'_i = \frac{x_i}{a}, \quad \xi'_i = \frac{\xi_i}{a}, \quad t'_i = \frac{t_i}{a}, \quad q'_i = \frac{q_i}{\mu}, \quad f'_i = \frac{f_i}{a} \right)$$

Далее штрихи опускаем. В случае начального состояния  $a$

$$K'_{11}(\alpha) = M^0(\alpha), \quad K'_{13}(\alpha) = -i\alpha S^0(\alpha), \quad K'_{31}(\alpha) = -K'_{13}(\alpha), \quad K'_{33}(\alpha) = R^0(\alpha) \tag{3.2}$$

где

$$M^0(\alpha) = (\sigma_1 m_2 - \sigma_2 m_1) \Delta^{-1} \tag{3.3}$$

$$S^0(\alpha) = (l_1 \sigma_2 - l_2 \sigma_1) \Delta^{-1}, \quad R^0(\alpha) = (l_1 d_2 - l_2 d_1) \Delta^{-1}$$

Коэффициенты  $l_k, m_k, d_k, \sigma_k$  определяются формулами (2.2).

В случае начального состояния  $b$

$$K_{11}(\alpha) = R^0(\alpha), \quad K_{13}(\alpha) = i\alpha S^0(\alpha), \quad K_{31}(\alpha) = -K_{13}(\alpha), \quad K_{33}(\alpha) = M^0(\alpha) \quad (3.4)$$

Функции  $M^0, S^0, R^0$  определены формулами (3.3), но коэффициенты  $l_k, m_k, d_k, \sigma_k$  определяются формулами (2.3).

Выражение (3.1) представляет собой систему интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных функций контактных напряжений  $q(x_1, x_2)$ . Функции  $M^0, S^0, T^0, R^0$  (3.3) являются аналитическими в комплексной плоскости с непрерывными друг в друга разрезами, лежащими строго в первом и третьем квадрантах (по два в каждом из них), и имеют на вещественной оси два полюса (по одному на положительной и отрицательной полуосях). Разрезы проводятся от точек ветвления, которые определяются численно из уравнения  $\sigma_k(\alpha, \beta, \omega, \sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0) = 0$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) до бесконечно удаленных точек. На разных отрезках вещественной оси эти функции обладают качественно различным поведением: при  $|\alpha| \geq \kappa_2$  ( $\kappa_2 > \kappa_1$ ) – принимают вещественные значения, при  $|\alpha| \leq \kappa_1$  – чисто мнимые, а при  $\kappa_1 < |\alpha| < \kappa_2$  – комплексозначные. При  $\alpha \rightarrow \infty$  для функций  $R^0, M^0$  справедливо представление  $|\alpha|f(\alpha) = c_i + O(\alpha^{-2})$ , а для функции  $S^0(\alpha) - \alpha^2 S^0(\alpha) = c_3 + O(\alpha^{-2})$ . Здесь  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – функции начальных напряжений.

4. Детальное исследование влияния начальной деформации на процесс взаимодействия штампа с преднапряженной средой можно проводить исключительно на основе анализа решений интегральных уравнений соответствующих задач. В качестве примера рассмотрим задачу о вертикальных колебаниях полосового в плане штампа на поверхности полупространства. Трение между штампом и полупространством отсутствует. Предполагаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства однородно и определено условием  $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0$ .

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$u_3(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{33}(x_1 - \xi) q(\xi) d\xi = f(x), \quad |x_1| \leq 1 \quad (4.1)$$

$$k_{33}(t) = \int_{\Gamma} K_{33}(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha \quad (4.2)$$

Функция  $K_{33}(\alpha)$  определена формулами (3.3), (3.4) с коэффициентами (2.4). Контур  $\Gamma$  совпадает с вещественной осью, обходя положительные особенности  $K_{33}(\alpha)$ , свойства которой отмечены выше, снизу, а отрицательные – сверху.

В силу описанных выше свойств  $K_{33}(\alpha)$  к решению интегрального уравнения (4.1) можно применить ряд численных и асимптотических методов (например [5, 8–15]). В соответствии с предложенным ранее [1, 2] подходом, заменим  $K_{33}(\alpha)$  функцией  $K^*(\alpha)$  [5]

$$K^*(\alpha) = \frac{A\sqrt{\alpha^2 - \kappa_1^2}}{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - a_0^2)(\alpha^2 - \bar{a}_0^2)} M_+(\alpha) M_-(\alpha), \quad \text{Im } a_0 > 0$$

$$M_{\pm}(\alpha) = B\alpha\sqrt{\alpha \pm \kappa_1}\sqrt{\alpha \pm \kappa_2} + (\sqrt{2}\alpha \pm \kappa_2)^2 \quad (4.3)$$

Функция  $K^*(\alpha)$  сохраняет все свойства  $K_{33}(\alpha)$  и обладает таким же качественным поведением на вещественной оси. Полюсы  $\alpha = \pm a_0$  и  $\alpha = \pm \bar{a}_0$  компенсируют нули функций  $M_+(\alpha)$  и  $M_-(\alpha)$ . Постоянные  $A, B$  ( $A > 0, B > 0$ ) выбираются из условия равенства функций  $K^*(\alpha)$  и  $K_{33}(\alpha)$  в нуле и на бесконечности.

Видно, что функция  $K^*(\alpha)$  допускает факторизацию

$$K^*(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha) \quad (4.4)$$

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{d^{\pm} \sqrt{\alpha \pm \kappa_1}}{(\alpha \pm \xi)(\alpha \mp a_0)(\alpha \mp \bar{a}_0)} M_{\pm}(\alpha), \quad d^{\pm} = \sqrt{Ae^{\pm i\pi/4}}$$

$d^{\pm}$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие  $K_+(\alpha) = K_-(\alpha)$ .

При учете отмеченных выше свойств функции  $K^*(\alpha)$  уравнение (4.1) после ряда преобразований [12, 13] сведем к системе интегральных уравнений второго рода следующего вида (берутся последовательно верхние, затем нижние знаки):

$$X(z, \pm) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} X(\alpha, \pm) P(\alpha, z) d\alpha + \alpha(z, \pm), \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (4.5)$$

$$P(\alpha, z) = K_-(\alpha) e^{-2i\alpha} [K_+(\alpha)(\alpha + z)]^{-1}$$

$$\alpha(z, \pm) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} [F(\alpha) \pm F(-\alpha)] [K_+(\alpha)(\alpha + z)]^{-1} e^{i\alpha} d\alpha$$

$$X(\alpha, \pm) = [\Phi^+(\alpha) \pm \Phi^-(\alpha)] e^{i\alpha} [K_-(\alpha)]^{-1}$$

относительно вспомогательных неизвестных  $X(z, \pm)$ , являющихся комбинациями  $\Phi^+(\alpha)$ ,  $\Phi^-(\alpha)$  – преобразований Фурье функций, представляющих собой продолжение правой части уравнения (4.1), соответственно, в область  $x > 1$  ( $\varphi^+(x)$ ) и  $x < 1$  ( $\varphi^-(x)$ ),  $F(\alpha)$  – преобразование Фурье функции  $f(x)$ . Контур  $\Gamma_1$  лежит строго выше контура  $\Gamma$ , но не выходит из полосы регулярности, являющейся некоторой окрестностью контура  $\Gamma$  [1, 2]. Решение интегрального уравнения (4.1) определяется формулой [12, 13]

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [F(\alpha) + \Phi^+(\alpha) + \Phi^-(\alpha)] e^{-i\alpha x} [K(\alpha)]^{-1} d\alpha, \quad |x| \leq 1 \quad (4.6)$$

$$\Phi^{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2} [X(\mp\alpha, +) \pm X(\mp\alpha, -)] K_{\pm}(\alpha) e^{\pm i\alpha}$$

Поведение свободной поверхности вне штампа имеет вид

$$\varphi^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Phi^{\pm}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad |x| > 1 \quad (4.7)$$

Для построения решения системы (4.5) продеформируем контур  $\Gamma_1$  в нижней полуплоскости (в области регулярности  $X(\alpha, \pm)$ ,  $K_-(\alpha)$ ) так, чтобы он обходил разрез от точек ветвления  $-\kappa_1$ ,  $-\kappa_2$  до бесконечно удаленных точек параллельно мнимой оси (от  $-\kappa_1 - i\infty$  до  $-\kappa_1$ , от  $-\kappa_2 - i\infty$  до  $-\kappa_2$  слева от разрезов и от  $-\kappa_1$  до  $-\kappa_1 - i\infty$ ,  $-\kappa_2$  до  $-\kappa_2 - i\infty$  – справа от разрезов). Представляя интегралы по левым и правым берегам разрезов в виде суммы и учитывая связь между значениями  $K_+(\alpha)$  на этих берегах, систему (4.5) представим в виде [16]

$$X(z, \pm) = \pm \sum_{k=1}^{N+M} X(-z_k, \pm) \frac{r_k}{z - z_k} + \alpha(z, \pm) + O(e^{-Ziz_{N+M+1}}), \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (4.8)$$

$$r_k = \frac{1}{\pi i} \frac{K_-(-z_k)}{K_+(-z_k)} e^{Ziz_k} \Delta z_k$$

где  $z_k = \kappa_1 + it_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) – узлы по берегам разреза  $[-\kappa_1, -\kappa_1 - i\infty]$ ,  $z_k = \kappa_2 + it_k$  ( $k = N + 1, \dots, N + M$ ) – узлы по берегам разреза  $[-\kappa_2, -\kappa_2 - i\infty]$ . Полагая в

(4.8)  $z = -z_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N + M$ ) получим конечную систему алгебраических уравнений, относительно  $X(z_k, \pm)$  [16], решение которой при подстановке в (4.8) дает формулу

$$X(z, \pm) = \pm \sum_{k=1}^{N+M} \frac{r_k}{z - z_k} \left[ \sum_{l=1}^{N+M} S_{kl}^{\pm} \alpha(-z_l, \pm) \right] + \alpha(z, \pm), \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (4.9)$$

где  $S_{kl}^{\pm}$  – элементы матрицы, обратной матрице вида

$$A^{\pm} = \left( \delta_{lk} \pm \frac{r_k}{z_l + z_k} \right)_{k,l=1,\dots,N+M}$$

Функции  $q(x)$  и  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  восстанавливаются по формулам (4.6), (4.7).

5. Рассмотрим случай, когда смещение подошвы штампа задается функцией

$$f(x) = e^{i\eta x}, \quad |x| \leq 1 \quad (5.1)$$

Следуя [1, 2, 12, 13], продолжим эту функцию на интервалы  $x > 1$  и  $x < -1$ . Тем самым перейдем к новым функциям  $\varphi^*(x)$  и  $\psi^*(x)$ :

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - e^{i\eta x}, \quad x > 1, \quad \psi^*(x) = \psi(x) - e^{i\eta x}, \quad x < -1 \quad (5.2)$$

Участвующие в правых частях уравнений (4.8) функции  $\alpha(z, \pm)$  представляются в виде

$$\alpha(z, \pm) = -\frac{1}{2} \frac{e^{\pm i\eta}}{K_{\mp}(\eta)(z \mp \eta)} \quad (5.3)$$

При учете соотношений (4.5), (4.8), применяя к равенствам (4.6), (4.7) формулы операционного исчисления [17, 18], получим:

$$q(x) = -\frac{e^{i\eta x}}{k(\eta)} + q^+(x) + q^-(x) \quad (5.4)$$

$$q^{\pm}(x) = \sum_{n=1}^2 \left[ \sum_{m=0}^3 q_{mn}^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{N+M} P_{kn}^{\pm}(x) \right] \quad (5.5)$$

$$q_{0n}^{\pm}(x) = G_{0n}^{\pm} e^{i\kappa_n(1 \mp x)} [\pi(1 \mp x)]^{-1/2} \quad (5.6)$$

$$q_{mn}^{\pm}(x) = G_{mn}^{\pm} \varphi_n^{\pm}(t_m^{\pm}), \quad m = 1, 2, 3$$

$$P_{kn}^{\pm}(x) = \frac{1}{2} b_k^{\pm} K_{\pm}^{-1}(z_k) e^{-iz_k(1 \mp x)} + B_{kn}^{\pm} \varphi_n^{\pm}(z_k) \quad (5.7)$$

Здесь:

$$\varphi_n^{\pm}(z) = e^{-iz(1 \mp x)} \text{erf} \sqrt{-i(\kappa_n + z)(1 \mp x)} [-i(\kappa_n + z)]^{-1/2} \quad (5.8)$$

$$G_{mn}^{\pm} = \gamma_{1n} \delta_m \left[ \alpha_{m\eta}^{n\pm} \frac{e^{\pm i\eta}}{K_{\mp}(\eta)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+M} b_k^{\pm} \alpha_{mk}^n \right], \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad n = 1, 2$$

$$B_{kn}^{\pm} = -\frac{i}{1} \gamma_{1n} \alpha_{1k}^n b_k^{\pm}, \quad G_{1n}^{\pm} = \gamma_{1n} \alpha_{1\eta}^{n\pm} \frac{e^{\pm i\eta x}}{K_{\pm}(\eta)}$$

$$b_k^{\pm} = r_k \sum_{l=1}^{N+M} [S_{kl}^+ \alpha(-z_l, +) \mp S_{kl}^- \alpha(-z_l, -)]$$

$$\gamma_{1n} = d_n e^{-i\pi/4}, \quad \delta_0 = i, \quad \delta_n = 1, \quad n = 1, 2, 3$$

$$d_1 = \frac{B}{d^+(B^2 - 4)}, \quad d_2 = \frac{1}{d^+(B^2 - 4)}, \quad t_1^\pm = \pm\eta, \quad t_2^\pm = -b_0, \quad t_3^\pm = -\bar{b}_0$$

Поведение свободной поверхности вне штампа описывается функцией

$$\varphi(x) = \varphi^\pm(x), \quad 1 \mp x < 0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi^\pm(x) = & \sum_{n=1}^2 D_{1n}^\pm \Psi_n^\pm(\pm\eta) + D_{2n}^\pm \Psi_n^\pm(\xi) + D_{3n}^\pm \Psi_n^\pm(a_0) + D_{4n}^\pm \Psi_n^\pm(\bar{a}_0) + \\ & + \sum_{k=1}^{N+M} C_{kn}^\pm \Psi_n^\pm(z_k) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\Psi_n^\pm(z) = e^{-iz(1 \mp x)} \operatorname{erf} \sqrt{-i(\kappa_n z)(-1 \pm x)[-i(\kappa_n - z)]}^{-1/2} \quad (5.11)$$

$$D_{mn}^\pm = \gamma_{2n} e^{-i\pi/4} \left[ \beta_{m\eta}^{n\pm} \frac{e^{\pm i\eta}}{K_\mp(\eta)} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{N+M} b_n^\pm \beta_{mk}^n \right], \quad m = 2, 3 \quad (5.12)$$

$$D_{1n}^\pm = \gamma_{2n} e^{-i\pi/4} \beta_{1n}^{n\pm}, \quad \gamma_{2n} = Bd^- \sqrt{A}, \quad C_{kn}^\pm = -\frac{1}{2} \gamma_{1n} \beta_{1k}^n b_k^\pm$$

Коэффициенты  $\alpha_{m\eta}^{n\pm}$ ,  $\alpha_{mk}$  определяются из разложения на простые дроби выражений

$$[(\alpha \pm \eta)K_+(\alpha)]^{-1} \quad \text{и} \quad [(\alpha - z_k)K_+(\alpha)]^{-1}$$

соответственно, а коэффициенты  $\beta_{m\eta}^{n\pm}$  и  $\beta_{mk}$  — из разложения

$$K_-(\alpha)[\alpha \pm \eta]^{-1} \quad \text{и} \quad K_-(\alpha)[\alpha \pm z_k]^{-1}$$

соответственно. Функции  $K_\pm(\alpha)$  определены формулами (4.4). Участвующие в (5.7) и (5.10) постоянные  $a_0, \bar{a}_0, b_0, \bar{b}_0$  являются нулями, соответственно  $M_+(\alpha)$  (4.3) и

$$L(\alpha) = B\alpha \sqrt{\alpha + \kappa_1} \sqrt{\alpha + \kappa_2} - (\sqrt{2\alpha + \kappa_2})^2$$

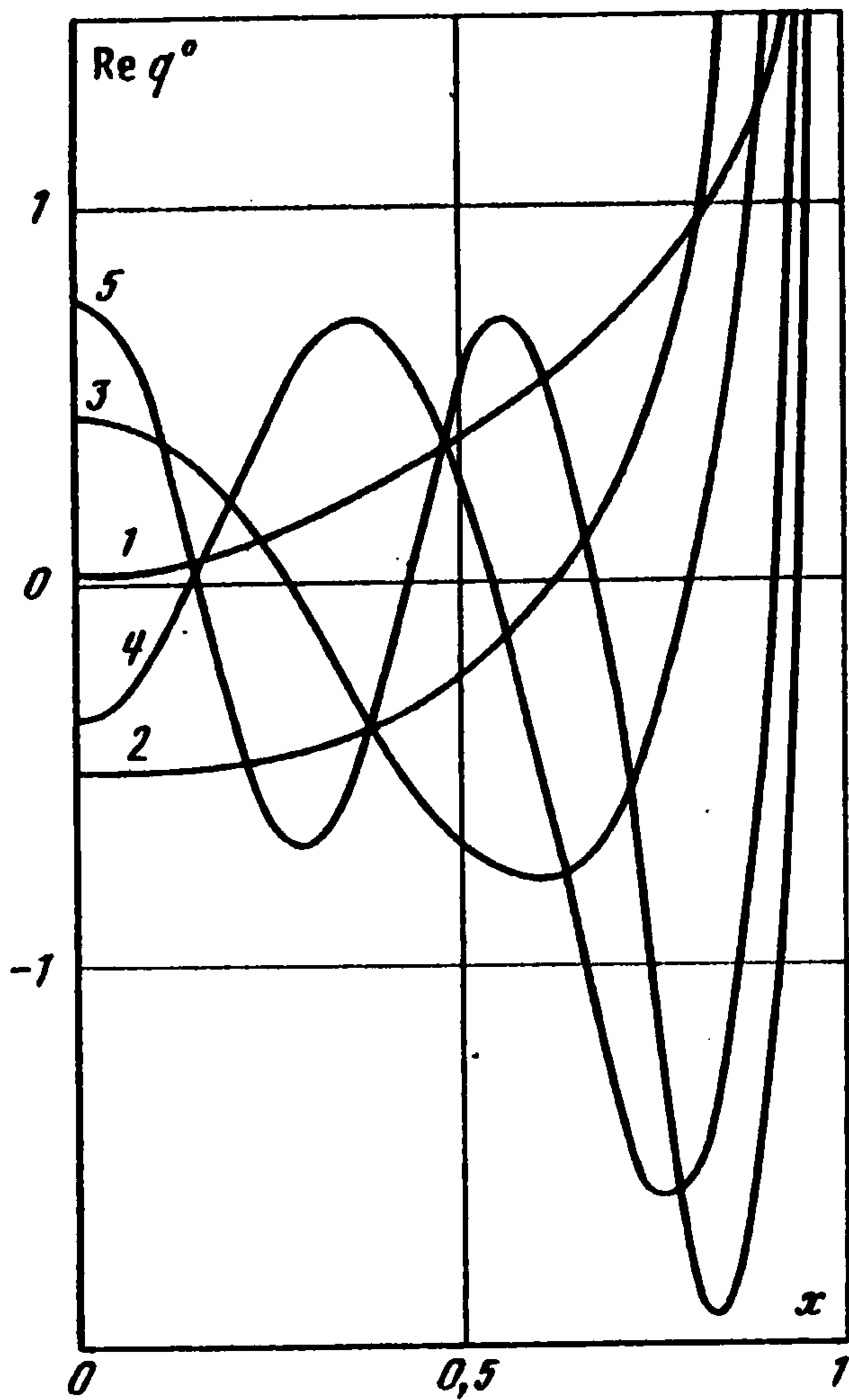
Из представления (5.6) видно, что начальные напряжения влияют на особенности, имеющие осциллирующий характер.

Из (5.5), (5.7) следует, что от краев штампа движутся быстро затухающие волны со скоростями равными скоростям продольных и поперечных волн в преднапряженной среде. Аналогично на свободной поверхности вне штампа (5.9) обнаруживаются быстро затухающие волны, движущиеся от его краев и имеющие скорости продольных и поперечных волн. Кроме этих волн по поверхности от краев штампа в обе стороны распространяется по одной незатухающей волне ( $\operatorname{Im}\xi = 0$ ), на фазовую скорость которой, так же как и на скорости быстро затухающих волн, оказывают влияние начальные напряжения.

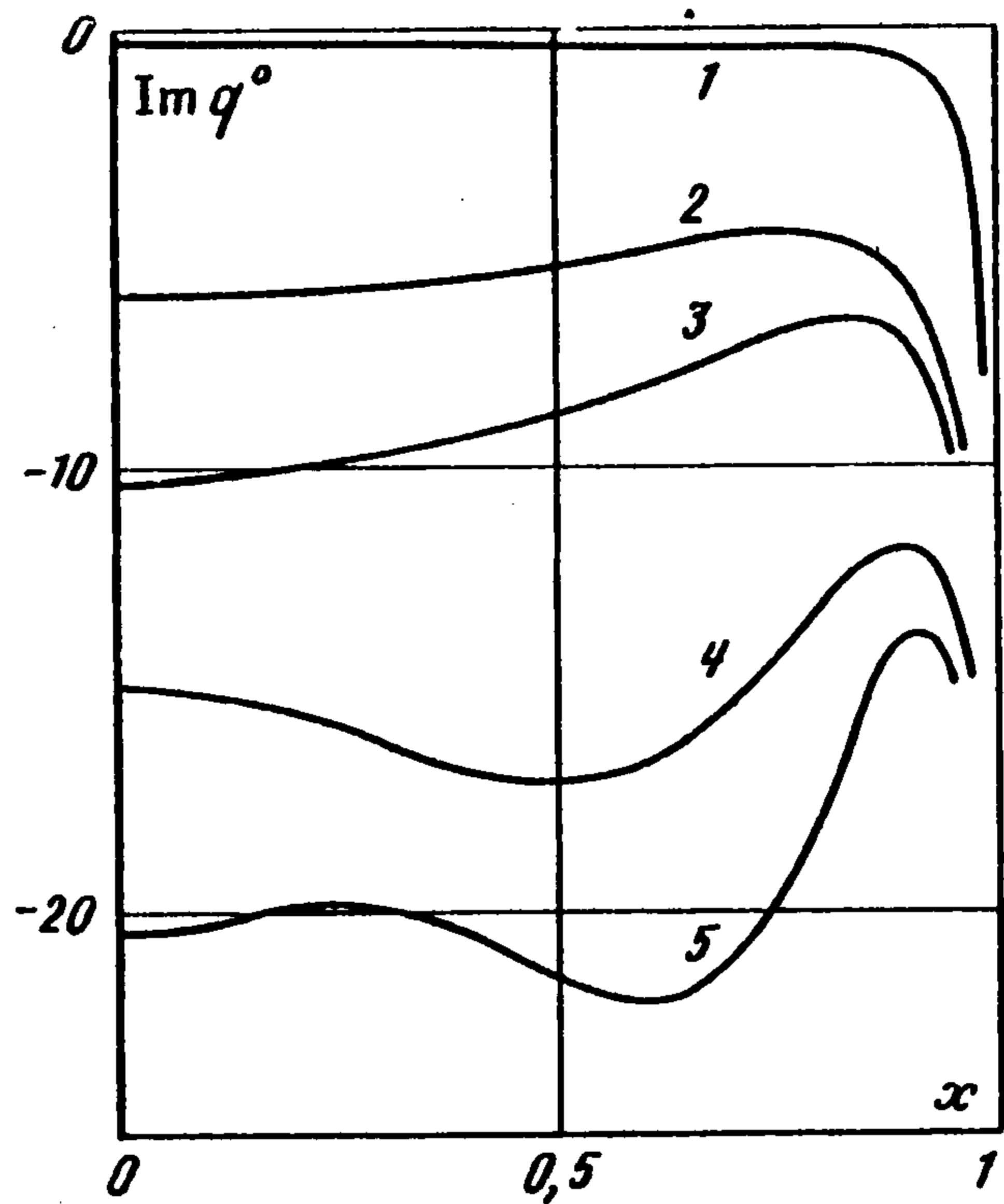
6. В качестве примера рассмотрим задачу о вибрации плоского штампа ( $\eta = 0$ ). С этой целью необходимо в формулах (5.1), (5.2), (5.4)–(5.8) и (5.9)–(5.12) положить  $\eta = 0$ . При этом значительного упрощения выражений (5.4)–(5.12) не происходит. Из (5.3), (5.8), (5.12) следует справедливость равенств

$$D_{mn}^+ = D_{mn}^- = D_{mn}, \quad C_{kn}^+ = C_{kn}^- = C_{kn}, \quad G_{mn}^+ = G_{mn}^- = G_{mn}$$

$$b_k^0 = b_k^0 = b_k, \quad B_{kn}^+ = B_{kn}^- = B_{kn}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

что определяет симметрию волнового процесса на поверхности среды. Отметим, что вырожденная составляющая функция  $q(x)$  (5.4) при  $\eta = 0$  в безнапряженном случае качественно (с точностью до обозначений) совпадает с асимптотическим решением [5] для высокочастотных колебаний.

Амплитудное значение реактивной силы, действующей на плоский штамп ( $\eta = 0$ ) со стороны полупространства, имеет вид

$$P = \int_{-1}^1 q(x) dx = P_1 + P_2, \quad P_n = P_{00n} + P_{0n} + P_{1n} \quad (6.1)$$

где

$$P_{00n} = -\frac{2}{K(0)} + \sum_{k=1}^{N+M} \frac{b_k}{K_+(z_k)} \frac{1 - e^{-Zik_k}}{z_k} + 2iG_{1n} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_n \sqrt{\pi}} e^{2i\kappa_n} \quad (6.2)$$

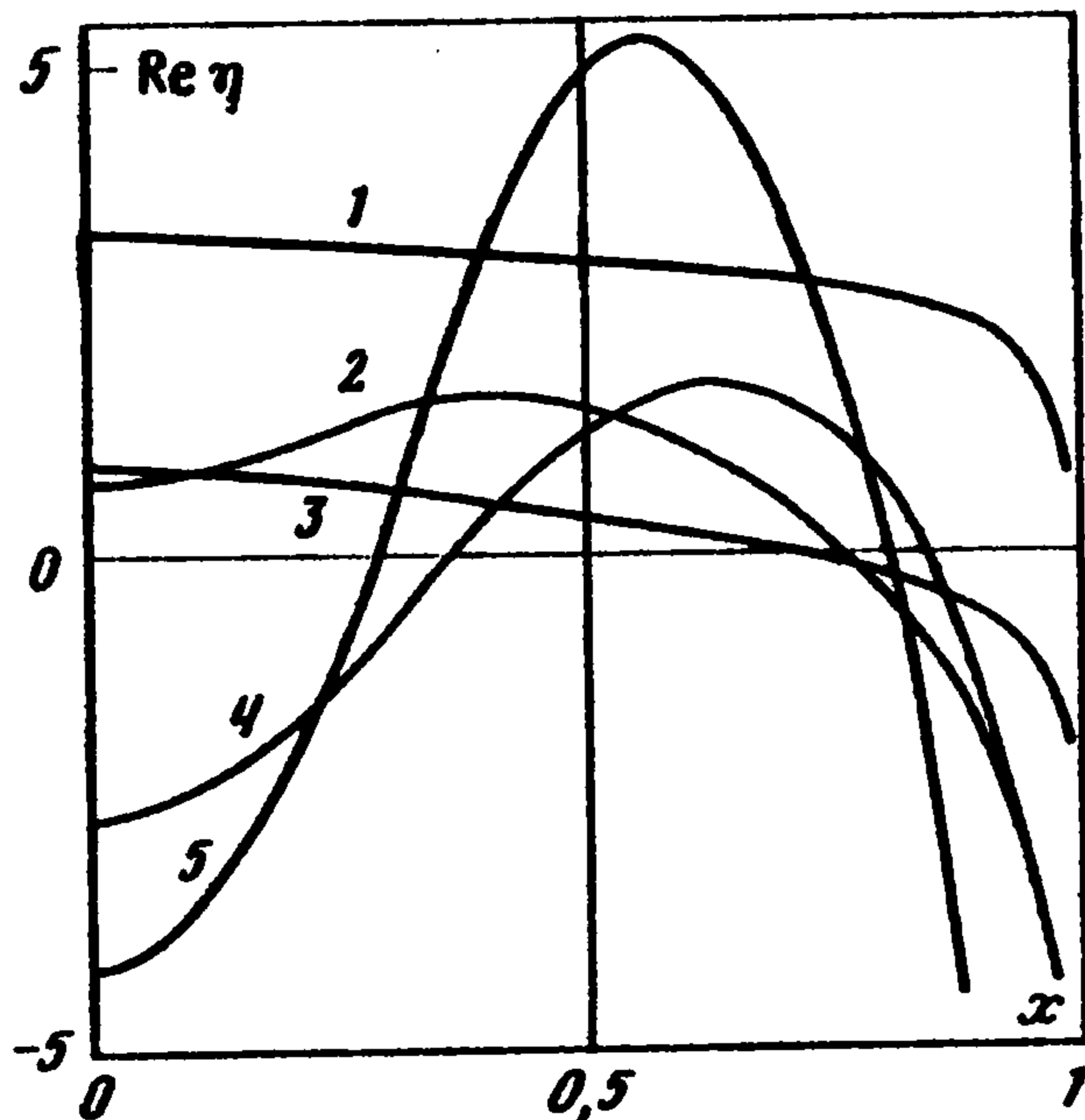
$$P_{0n} = 2\Phi_n(0) \left[ G_{0n} + 2 \left( 1 + \frac{1}{4i\kappa_n} \right) G_{1n} + i \sum_{m=1}^3 \frac{G_{mn}}{t^+ m} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{N+M} \frac{B_{km}}{z_k} \right]$$

$$P_{1n} = -2i \sum_{m=2}^3 \frac{G_{mn}}{t^+ m} \Phi_n(t_m^+) + i \sum_{k=1}^{N+M} \frac{B_{km}}{z_k} \Phi_n(z_k) \quad (6.3)$$

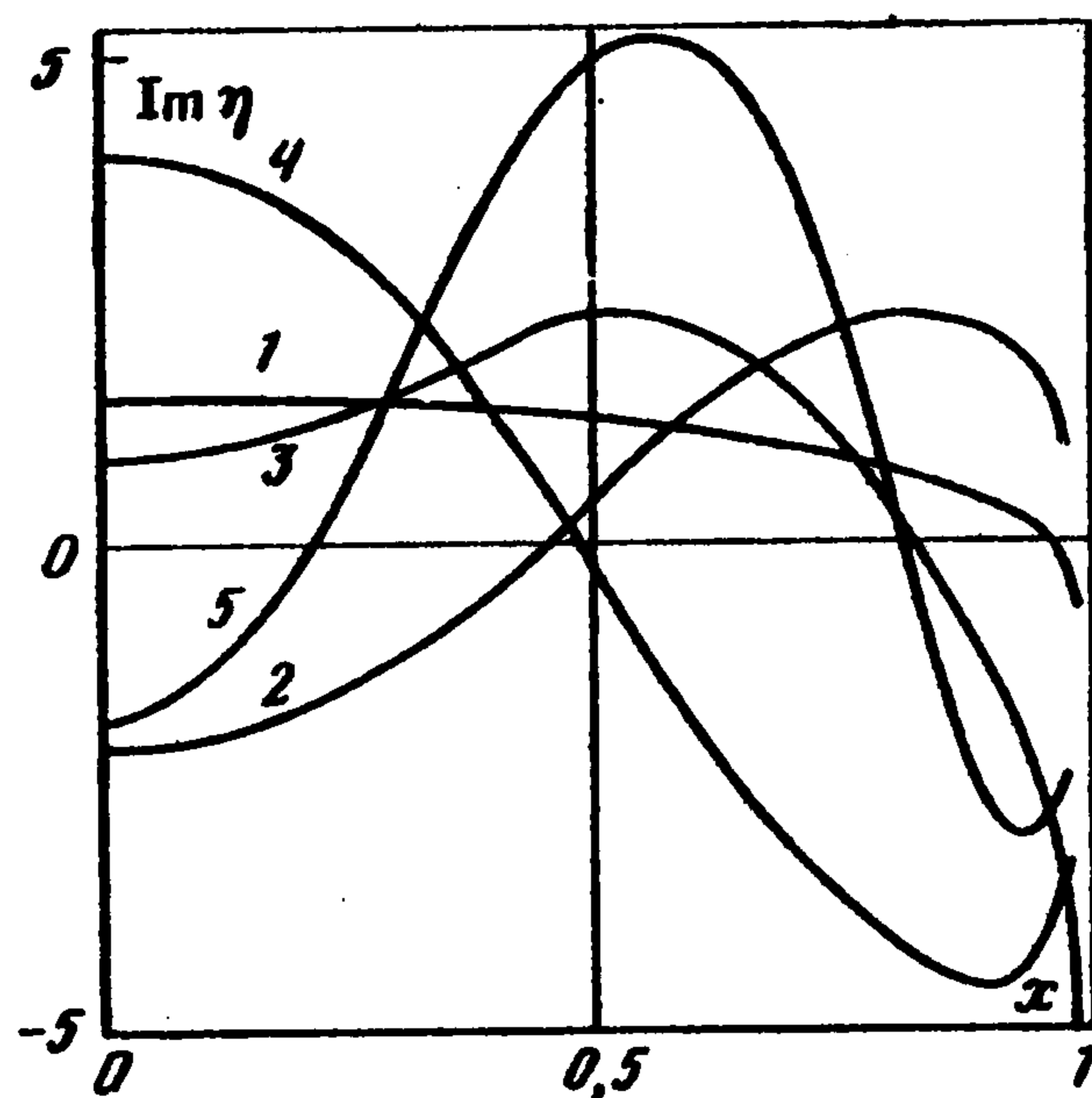
$$\Phi_n(x) = e^{-ix} \operatorname{erf} \sqrt{-2i(\kappa_n + x)} [-i(\kappa_n + x)]^{-1/2}, \quad n=1,2$$

Формулы (5.4)–(5.8), (5.9)–(5.12) представляют достаточно наглядно структуру волнового поля как под штампом, так и на свободной поверхности. Параметры  $\kappa_k$  ( $k = 1, 2$ ) сложным образом связаны с начальной деформацией, поэтому начальные напряжения непосредственно влияют на характер волнового поля.

7. Формулы (5.4)–(5.12) и (6.1)–(6.3) построены в самом общем случае, независимо от вида начального напряженного состояния и свойств материала среды. Для проведения дальнейших исследований необходимо конкретизировать свойства среды. С этой целью будем полагать, что материал среды является сжимаемым, первоначально изотропным, имеющим упругий потенциал (1.3). В качестве последнего используем по-



Фиг. 3



Фиг. 4

тенциал Мурнагана [3, 4]

$$\begin{aligned} \Xi = \frac{1}{4} & \left[ \left( -3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2} \right) I_1(F) + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1(F) + \left( -2\mu + 3m - \frac{n}{2} \right) I_2(F) - \right. \\ & \left. - m I_1(F) I_2(F) + \frac{1}{6}(l + 2m) I_1^3(F) + \frac{n}{2}(I_3(F) - 1) \right] \end{aligned}$$

( $\lambda, \mu$  – постоянные Ляме,  $l, m, n$  – постоянные третьего порядка). Полагая начальную деформацию однородной ( $v_i = \text{const}$ ), из (1.4) получаем

$$\Psi_0 = \frac{1}{8} n l_3$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{4} \left[ (I_1 - 3)\lambda - 2\mu + \frac{1}{2}l(I_1 - 3)^2 + m(I_1 - I_2) - \frac{1}{2}n(I_1 - 1) \right]$$

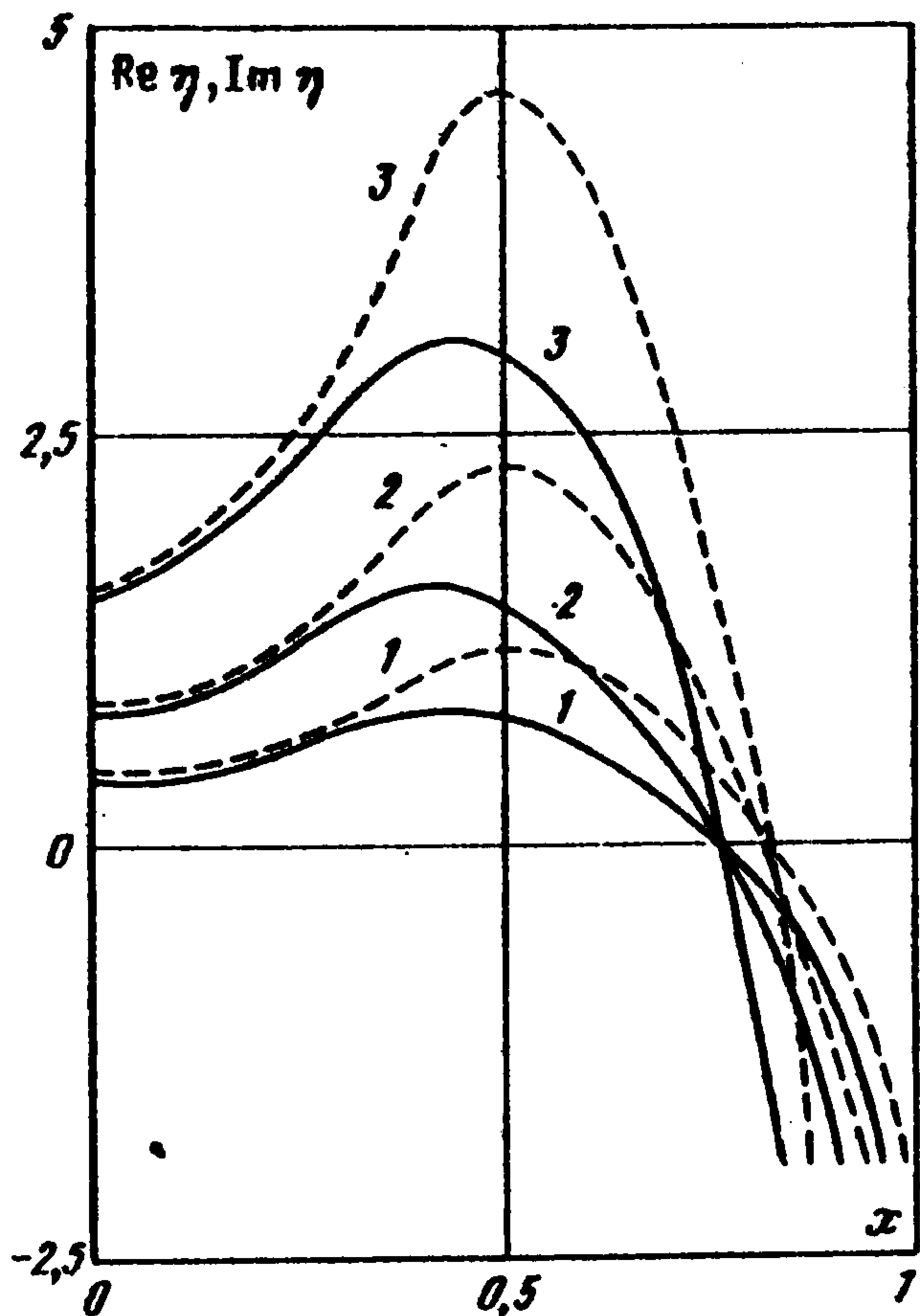
$$\Psi_2 = \frac{1}{4} \left[ 2\mu + m(I_1 - 3) + \frac{1}{2}n \right]$$

Для численных расчетов был использован материал со следующими параметрами  $\rho = 7,748 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2$ ,  $\lambda = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 0,804 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $l = -6,32 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $m = -3,25 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $n = -8,04 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$  (сталь О9Г2С [3, 4]).

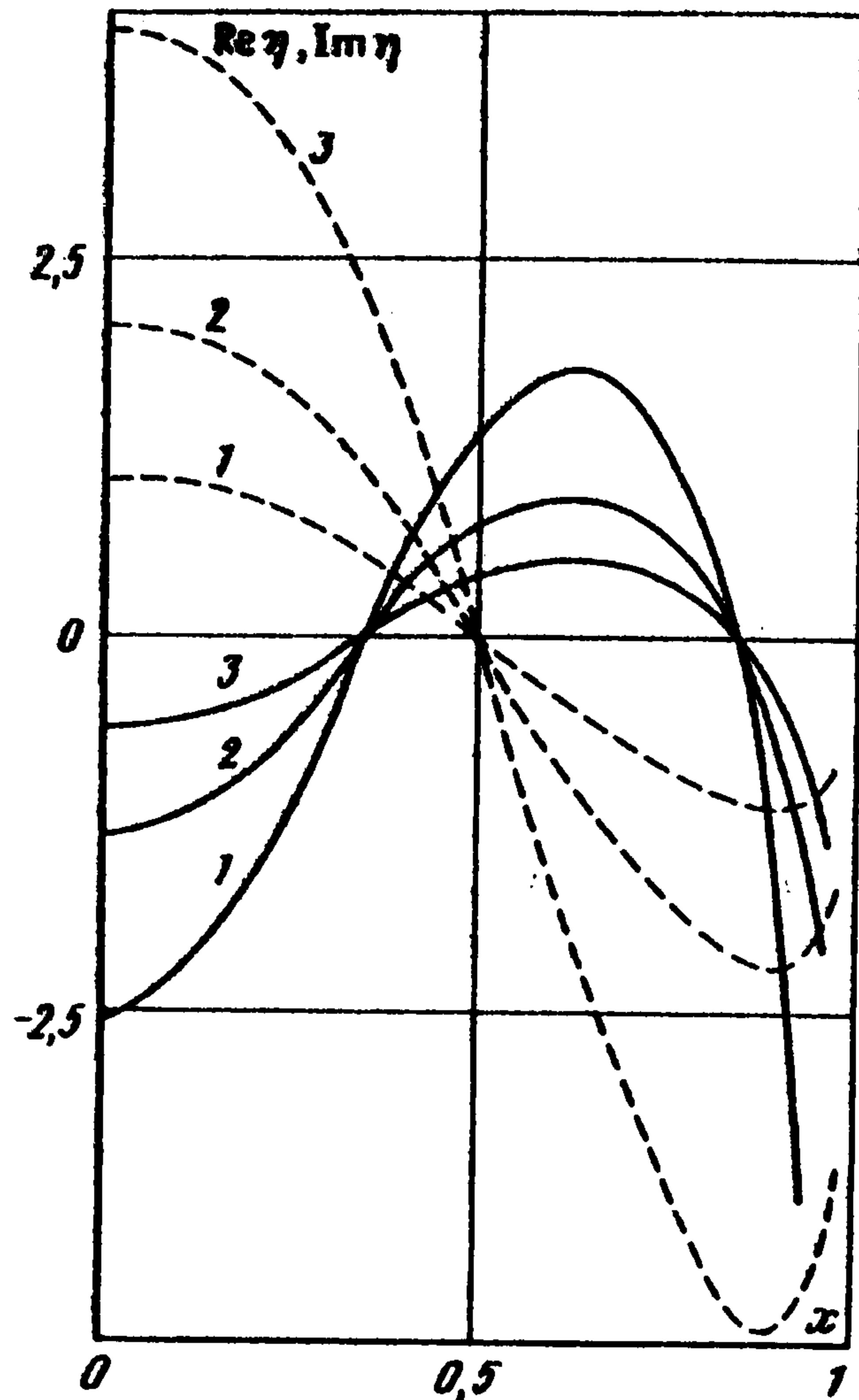
Начальное напряженное состояние полагали одноосным, определенным условием  $\sigma_{11}^0 = p, \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = 0$ .

На фиг. 1, 2 приведены графики функций ( $q^0(x) = q(x)$  в отсутствие начальной деформации среды)  $\text{Re}q^0(x)$  и  $\text{Im}q^0(x)$  для различных значений частоты колебаний штампа (кривые 1–5 соответствуют значениям  $\kappa_2 = 0,9; 3,0; 4,5; 7,5; 10,5$ ). Видно, что на малой частоте  $\kappa_2 = 0,9$  распределение контактных напряжений близко к статическому (функция  $\text{Re}q^0(x)$  – знакопостоянна и значительно превышает  $\text{Im}q^0(x)$ ). На средней частоте ( $\kappa_2 = 3,0$ )  $\text{Im}q^0(x)$  резко возрастает.  $\text{Re}q^0(x)$  меняет знак в области контакта, сохраняя монотонный характер. На высоких частотах (кривые 3–5) эпюра контактных напряжений приобретает осциллирующий характер за счет того, что длина возбуждаемой краями штампа сдвиговой волны становится меньше его размера. Влияние продольной волны сказывается на огибающей эпюры напряжений (кривые 4, 5). Наложение на проникающую (постоянную на фиксированной частоте) составляющую  $q^0(x)$  осциллирующих членов трансформирует  $\text{Im}q^0(x)$  сначала к седлообразному, а с дальнейшим повышением частоты к пилообразному виду.

На фиг. 3, 4 приведены графики функций ( $\eta(x) = [q^0(x) - q(x)] \cdot 10^3$  – изменение контактных напряжений)  $\text{Re}\eta(x)$  (фиг. 3) и  $\text{Im}\eta(x)$  (фиг. 4) в зависимости от частоты



Фиг. 5



Фиг. 6

(кривые 1–5 соответствуют тем же значениям  $\kappa_2$ , что и на фиг. 1, 2) при фиксированной начальной деформации. На малой частоте влияние начальной деформации имеет монотонный характер, равномерный во всей области контакта за исключением краев штампа. На средних частотах влияние начальной деформации усложняется. Так уже при  $\kappa_2 = 3,0$  (кривые 2)  $\text{Re}\eta(x)$  и  $\text{Im}\eta(x)$  меняют знак в области контакта. На высоких частотах (кривые 4, 5) влияние начальной деформации приобретает осциллирующий характер, причем осцилляция по мере роста частоты усиливается.

На фиг. 5, 6 приведены графики функций  $\text{Re}\eta(x)$  (сплошные кривые) и  $\text{Im}\eta(x)$  (штриховые кривые) в зависимости от величины начальных напряжений (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $p = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ;  $5 \cdot 10^{-4}$ ;  $10^{-3}$ ) при фиксированных значениях частоты:  $\kappa_2 = 4, 5$  (фиг. 5),  $\kappa_2 = 7, 5$  (фиг. 6). Видно что под штампом имеются точки, в которых влияние начальной деформации отсутствует, равно как и точки, в которых влияние начальной деформации максимально. Количество и местонахождение этих точек существенным образом зависит от частоты. С ростом частоты количество точек, в которых начальная деформация не влияет на  $\text{Re}q(x)$  и  $\text{Im}q(x)$  увеличивается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В.А. К теории пространственных контактных задач для анизотропных сред // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 324–328.
2. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 С.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 С.
5. Боев С.И., Сумбатян М.А. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебания // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1039–1043.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 373 С.; Т. 2. 535 С.

7. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 С.
8. Калинин В.В., Полякова И.Б. О возбуждении волн в слое с начальными напряжениями // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 320–326.
9. Калинин В.В., Полякова И.Б. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // Прикл. механика. 1982. Т. 18. Вып. 6. С. 22–27.
10. Ананьев И.В., Калинин В.В., Полякова И.Б. О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
11. Калинин В.В., Лысенко И.В., Полякова И.Б. Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 301–308.
12. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 С.
13. Бабенко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 С.
14. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 С.
15. Александров В.М., Буряк В.Г. О некоторых динамических смешанных задачах теории упругости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 114–121.
16. Белянкова Т.И., Калинин В.В. О сдвиговых колебаниях штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 313–329.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1110 С.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 С.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
6.V.1992