ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 4, 1993

УДК 531.36+539.3

© 1993 г. Е.В. Синицын

О КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Исследуется устойчивость решений одного класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, встречающегося при исследовании динамики деформируемых систем. Показано, что вывод об устойчивости решений совпадает с выводом об устойчивости решений уравнений квазистатических движений в случаях, когда последние отвечают критериям асимптотической устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Показана неустойчивость относительного равновесия нерастяжимого вязкоупругого кольца на круговой орбите, когда его плоскость ортогональна радиусу-вектору центра масс.

1. Постановка задачи. При исследовании динамики больших упругих систем в гравитационном поле получил развитие "квазистатический подход"[1], который заключался в следующем. Системы моделируются в виде сплошных упругих тел, обладающих внутренним демпфированием. Исследование проводится в рамках линейной теории вязкоупругости. Предполагается, что тело достаточно жесткое, а время затухания свободных упругих колебаний много меньше характерного времени движения тела как целого. Поле смещений ищется в виде ряда по собственным формам свободных упругих колебаний тела. На основе указанных предположений вводится малый параметр и система уравнений динамики преобразуется к счетной системе сингулярно-возмущенных уравнений вида

$$\dot{y}_s = f_s(y_j, q_n, \dot{q}_n), \quad s = 1, \ldots, k \tag{1.1}$$

$$\ddot{q}_n + 2\epsilon^{-1} b\omega_n^2 \dot{q}_n + \epsilon^{-2}\omega_n^2 q_n = Q_n(y_s, q_i, \dot{q}_i) \tag{1.2}$$

$$n = 1, 2, \ldots; \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

Здесь y_s – фазовые координаты, описывающие движение связанного с телом трехгранника, q_n – обобщенные (нормальные) координаты, описывающие деформации тела, ϵ – малый параметр, характеризующий "большую" жесткость тела и малость диссипативных сил по сравнению с упругими, точкой обозначена производная по времени. Величины $\epsilon^{-1}\omega_n$ представляют собой собственные частоты свободных упругих ($b = 0$) колебаний тела.

Построение асимптотики решений системы (1.1), (1.2) проводится методом пограничного слоя [1], аналогично методу [2, 3], разработанному для систем с упругими и диссипативными элементами. Учитываемые члены в асимптотических выражениях для обобщенных координат q_n соответствуют квазистатическому

[1] *Климов Д.М., Маркеев А.П.* Нелинейные задачи динамики крупногабаритных космических конструкций. Препринт № 449. М.: ИПМ АН СССР, 1990.

режиму колебаний тела и имеют вид [4]

$$q_n = \epsilon^2 \omega_n^{-2} (Q_n(y_s, 0, 0) - 2\epsilon b Q_n^{\cdot}(y_s, 0, 0)) \tag{1.3}$$

где дифференцирование по времени проводится в силу уравнений $y_s^{\cdot} = f_s(y_j, 0, 0)$. После подстановки (1.3) в конечномерную систему (1.1) и отбрасывания членов $O(\epsilon^4)$ система уравнений, описывающая движение связанного с телом трехгранника, становится замкнутой и удобной для исследования (уравнения квазистатических движений).

В ряде работ [5–9][2] исследовалась устойчивость решений уравнений квазистатических движений. Оставался открытым вопрос о соотношении полученных выводов об устойчивости со свойствами решений исходной системы (1.1), (1.2).

Ниже будет показано, что вывод об асимптотической устойчивости и неустойчивости, сделанный по линеаризованным уравнениям квазистатических движений, справедлив для полной нелинейной системы.

2. Теоремы об устойчивости по первому приближению в банаховом пространстве. Приведем обобщение некоторых известных [10, 11] теорем об устойчивости.

В банаховом пространстве E рассмотрим автономное дифференциальное уравнение вида

$$x^{\cdot} = Ax + F(x) \tag{2.1}$$

где A – замкнутый линейный оператор, а функция F удовлетворяет неравенству

$$\|F(x)\| \leq N \|x\|^{1+p}, \quad p > 0, \quad N > 0 \tag{2.2}$$

в области $\|x\| \leq \rho$.

Рассмотрим устойчивость (по Ляпунову) нулевого решения уравнения (2.1). Предполагается, что решения обладают свойствами существования, единственности и продолжимости на бесконечный интервал времени.

Обозначим через $\Sigma(A)$ спектр, через $R(\xi, A) = (A - \xi)^{-1}$ – резольвенту оператора A. Пусть 1) A – замкнутый линейный оператор с плотной в E областью определения; 2) полубесконечный интервал $\xi > \beta$ принадлежит резольвентному множеству оператора A и

$$\|R(\mu + i\nu, A)\| \leq B(\mu - \beta)^{-1}, \ \mu - \beta, \ B = \text{const}$$

При выполнении условий 1), 2) оператор A порождает квазиограниченную полугруппу [12]. Множество всех операторов, удовлетворяющих условиям 1) и 2) обозначим $\Omega(B, \beta)$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $A \in \Omega(B, \beta)$ при $\beta < 0$ и выполнено условие (2.2). Тогда нулевое решение уравнения (2.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Действительно, из условий теоремы следует, что решения уравнения первого приближения

$$x^{\cdot} = Ax$$

удовлетворяют условию $\|x\| \leq Be^{\beta t}\|x(0)\|$ и для доказательства можно следовать известным рассуждениям ([10], с. 51).

Рассмотрим случай, когда $\beta > 0$ и $\Sigma(A)$ содержит точки, лежащие в правой полуплоскости.

Теорема 2. Если 1) $\Sigma(A)$ содержит точки, лежащие в правой полуплоскости; 2) $A \in \Omega(B, \beta)$ $(\beta > 0)$ и выполнено условие (2.2), то нулевое решение уравнения (2.1) неустойчиво.

Это утверждение обобщает известный результат ([11], с. 410, теорема 2.3)

---

[2] См. также: *Климов Д.М., Маркеев А.П., Холостова О.В.* К динамике упруговязкого кольца в гравитационном поле. Препринт № 406. М.: ИПМ АН СССР, 1989. *Карпов И.И., Климов Д.М., Маркеев А.П.* Аналитический вывод на ЭВМ уравнений движения упругого тела в гравитационном поле. Препринт № 411. М.: ИПМ АН СССР, 1989.

для ограниченного оператора A. Операторы, удовлетворяющие условиям теоремы 2, обладают свойствами, которые использовались при доказательстве теоремы 2.3 [11].

В дальнейшем понадобится также

Теорема 3. [12]. Пусть $A \in \Omega(B, \beta)$ и C – ограниченный линейный оператор. Тогда $A + C \in \Omega(B, \beta + B \| C \|)$.

3. Исследование устойчивости. Преобразуем систему уравнений (1.1), (1.2). Сделаем замену переменных [3] $q_n = \epsilon^2 q_n^*$, $\dot{q}_n = \epsilon p_n$ (звездочку в дальнейшем опускаем) и введем обозначения

$$y = (y_1, \ldots, y_k),\ p = (p_1, p_2, \ldots),\ q = (q_1, q_2, \ldots)$$

$$C = \operatorname{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots\},\ B = 2bC.$$

Система уравнений (1.1), (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} &y^{\cdot} = f(y, \epsilon^2 q, \epsilon p) \\ &p^{\cdot} = -\epsilon^{-1} Bp - \epsilon^{-1} Cq + \epsilon^{-1} Q(y, \epsilon p, \epsilon^2 q),\ q^{\cdot} = \epsilon^{-1} p \end{aligned} \tag{3.1}$$

Предположим, что система (3.1) допускает стационарное решение

$$y = y^0,\ p = 0,\ q = q^0 \tag{3.2}$$

в окрестности которого правые части системы (3.1) дважды непрерывно дифференцируемы.

Будем исследовать устойчивость решения (3.2). Выпишем уравнения в вариациях, оставив для возмущений переменных y, p, q те же обозначения (y, p, q соответственно):

$$\begin{aligned} &y^{\cdot} = Ty + \epsilon Kp + \epsilon^2 Lq \\ &p^{\cdot} = (-\epsilon^{-1} B + B_1) p + (-\epsilon^{-1} C + \epsilon C_1) q + \epsilon^{-1} My,\ q^{\cdot} = \epsilon^{-1} p \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь T – конечномерный оператор (матрица $k \times k$), характеризующий движение абсолютно твердого тела с конфигурацией, соответствующей $q = q^0$, в окрестности (3.2). Если при $q = 0$, $q^{\cdot} = 0$ исходная система (1.1) гамильтонова, то матрица T имеет собственные значения либо все с нулевыми вещественными частями, либо с положительными и с отрицательными одновременно. Ограниченные операторы K, L, M характеризуют взаимосвязь между поступательно-вращательным движением тела и процессом деформирования. B_1, C_1 – ограниченные операторы, которые возникают при линеаризации системы (3.1) в окрестности (3.4).

Систему (3.3) можно рассматривать как уравнение первого приближения уравнения (2.1) в банаховом пространстве последовательностей E:

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3,\ y \in E_1,\ p \in E_2,\ q \in E_3$$

Запишем (3.3) в матричной форме

$$x^{\cdot} = Ax,\ x = (y, p, q)^T$$

$$A = \begin{Vmatrix} T & \epsilon K & \epsilon^2 L \\ \epsilon^{-1} M & -\epsilon^{-1} B + B_1 & -\epsilon^{-1} C + \epsilon C_1 \\ 0 & \epsilon^{-1} I & 0 \end{Vmatrix},\quad I = \operatorname{diag}\{1, 1, \ldots\} \tag{3.4}$$

Поведение решений в окрестности (3.2) определяется свойствами оператора A. Преобразуем (3.4) к виду, удобному для применения теорем из разд. 2.

Сделаем замену переменных $x \to x_1 = (y, \eta, \xi)^T$ по формулам

$$p = \eta + \sum_{l=0}^{4} \epsilon^l \Lambda_l y,\quad q = \xi + \sum_{l=0}^{4} \epsilon^l \Gamma_l y \tag{3.5}$$

где операторы $\Lambda_i : E_1 \to E_2$, $\Gamma_i : E_1 \to E_3 (i = 0, \ldots, 4)$ выбираем таким образом, чтобы в уравнениях для $\eta^{\cdot}$ и $\xi^{\cdot}$ члены, зависящие от y, имели порядок ϵ^4.

Подставляя (3.5) в третье уравнение (3.3) и приравнивая нулю коэффициенты при $\epsilon^i y$ $(i = 1, \ldots, 3)$, получаем выражения для операторов Λ_i

$$\begin{aligned}
&\Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_1 = \Gamma_0 T, \quad \Lambda_2 = \Gamma_1 T \\
&\Lambda_3 = \Gamma_2 T + \Gamma_0 K \Lambda_1 + \Gamma_0 L \Gamma_0 \\
&\Lambda_4 = \Gamma_3 T + \Gamma_0 K \Lambda_2 + \Gamma_1 K \Lambda_1 + \Gamma_0 L \Gamma_1 + \Gamma_1 L \Gamma_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Аналогичным образом, подставляя (3.5) во второе уравнение (3.3), находим

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = C^{-1} M, \quad \Gamma_1 = - C^{-1} B C^{-1} M T \\
&\Gamma_2 = C^{-1} (B_1 \Lambda_1 + C_1 \Gamma_0 - B \Lambda_2 - \Lambda_1 T) \\
&\Gamma_3 = C^{-1} (B_1 \Lambda_2 + C_1 \Gamma_1 - B \Lambda_3 - \Lambda_2 T) \\
&\Gamma_4 = C^{-1} (B_1 \Lambda_3 + C_1 \Gamma_2 - B \Lambda_4 - \Lambda_3 T - \Lambda_1 K \Lambda_1)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Операторы Λ_i, Γ_i $(i = 0, \ldots, 4)$ однозначно определяются соотношениями (3.6), (3.7) и ограничены, так как ограничены C^{-1} и $C^{-1}B$. Можно показать, что преобразование $x \to x_1$ является изоморфизмом и, следовательно, свойства устойчивости сохраняются.

Новые переменные удовлетворяют уравнениям

$$y^{\cdot} = (T + \epsilon^2 (K\Lambda_1 + L\Gamma_0) + \epsilon^3 (K\Lambda_2 + L\Gamma_1)) y + \epsilon K \eta + \epsilon^2 L \xi + \epsilon^4 \Phi x_1 \tag{3.8}$$

$$\eta^{\cdot} = (-\epsilon^{-1} B + B_1 + \sum_{i=0}^{2} \epsilon^{i+1} \Lambda_i K) \eta + (-\epsilon^{-1} C + \epsilon C_1 + \sum_{i=0}^{1} \epsilon^{i+2} \Lambda_i L) \xi + \epsilon^4 \theta x_1$$

$$\xi^{\cdot} = \epsilon^{-1} \eta - \sum_{i=0}^{2} \epsilon^{i+1} \Gamma_i K \eta - \sum_{i=0}^{1} \epsilon^{i+2} \Gamma_i L \xi + \epsilon^4 \Psi x_1$$

где Φ, θ, Ψ – ограниченные операторы, выражающиеся через Γ_i, Λ_i, K, L, ϵ.

Матричную форму оператора A_1 системы (3.8) запишем в виде

$$x_1^{\cdot} = A_1 x_1, \quad A_1 = A_1^0 + \epsilon^4 A_1^1$$

$$A_1^0 = \begin{Vmatrix} \widetilde{T} & \epsilon K & \epsilon^2 L \\ 0 & & \\ & \epsilon^{-1} R_1 + R_2 & \\ 0 & & \end{Vmatrix}, \qquad R_1 = \begin{Vmatrix} -B & -C \\ I & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A_1^1 = \Phi + \theta + \Psi, \quad \widetilde{T} = T + \epsilon^2 (K\Lambda_1 + L\Gamma_0) + \epsilon^3 (K\Lambda_2 + L\Gamma_1)$$

где через R_2 обозначены входящие в правые части второго и третьего уравнения системы (3.8) члены, имеющие порядок не ниже ϵ^0 и не выше ϵ^3.

Сделаем еще одну линейную замену переменных $x_1 \to x_2$ таким образом, чтобы оператор системы в новых переменных $x_2^{\cdot} = A_2 x_2$ имел вид

$$A_2 = A_2^0 + \epsilon^4 A_2^1$$

$$A_2^0 = \begin{Vmatrix} \widetilde{T} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} R_1 + R_2 \end{Vmatrix}, \quad \| A_2^1 \| = \| A_1^1 \| \tag{3.9}$$

Для счетных систем дифференциальных уравнений такие замены рассматривались [10]. Устойчивость остается инвариантной по отношению к этим заменам.

Таким образом, задача об устойчивости решения (3.2) системы (3.1) сведена к исследованию свойств оператора A_2 (3.9), который представляется в виде суммы замкнутого оператора A_2^0 и ограниченного $\epsilon^4 A_2^1$. Оператор $\epsilon^4 A_2^1$ будем рассматривать как возмущение.

Оператор A_2^0 представляется в виде прямой суммы двух операторов, действующих во взаимно дополнительных подпространствах — E_1 и $E_2 \oplus E_3$: конечномерного оператора $\tilde{T}$ и замкнутого оператора $\epsilon^{-1}R_1 + R_2$. Матрица $\tilde{T} \in \Omega(1, \beta)$ в E_1 (β — наибольшая вещественная часть собственных значений $\tilde{T}$). Оператор $\epsilon^{-1}R_1$ характеризует свободные затухающие колебания демпфируемой системы. Можно показать, что $\epsilon^{-1}R_1 \in \Omega(1, -1/(2\epsilon))$. Согласно теореме 3 $\epsilon^{-1}R_1 + R_2 \in \Omega(1, -1/(2\epsilon) + \| R_2 \|)$ в $E_2 \oplus E_3$ ($\| R_2 \| = O(1)$). Следовательно, $A_2^0 \in \Omega(1, \beta_1)$ где $\beta_1 = \max\{\beta, -1/(2\epsilon) + \| R_2 \|\} = \beta$.

Рассмотрим случай, когда матрица T имеет собственные значения только с нулевыми вещественными частями.

Если все собственные значения матрицы $\tilde{T}$ имеют отрицательные вещественные части, то $\beta < 0$ и оператор A_2^0 удовлетворяет условиям теоремы 1.

Наибольшая вещественная часть собственных значений имеет вид $-\epsilon^3\lambda^-_{\max}$ • ($\lambda^-_{\max} > 0$), так как внутренним упругим силам в выражении для $\tilde{T}$ отвечают члены $O(\epsilon^2)$, а диссипативным силам — слагаемые $O(\epsilon^3)$. По теореме 3, если

$$\epsilon < \lambda^-_{\max} \| A_2^1 \|^{-1} \tag{3.10}$$

то оператор A_2 также удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, решение (3.2) равномерно асимптотически устойчиво.

Предположим, что оператор $\tilde{T}$ имеет собственные значения с положительными вещественными частями.

Обозначим через $\epsilon^3\lambda_1^+, \epsilon^3\lambda_2^+, \ldots, \epsilon^3\lambda_l^+$ ($\lambda_i^+ > 0$; $\lambda_i^+ \leqslant \lambda_j^+$ при $i < j$) положительные вещественные части корней характеристического уравнения матрицы $\tilde{T}$. Пусть $\rho = \max_i \{ (\lambda_{i+1}^+ - \lambda_i^+) \} > 0$. При помощи теорем о разбиении спектра [12] и теоремы 3 можно показать, что при

$$\epsilon < ½ \| A_2^1 \|^{-1} \max\{\lambda_1^+, \rho\} \tag{3.11}$$

оператор A_2 удовлетворяет условиям теоремы 2 и невозмущенное движение неустойчиво.

В случае, когда матрица T имеет собственные значения с положительными вещественными частями, $\tilde{T}$ имеет собственные значения $O(1)$ и неустойчивость показывается аналогично.

Таким образом, вывод об устойчивости решения (3.2) системы (3.1) при достаточно малом ϵ (3.10), (3.11) совпадает с выводом об устойчивости конечномерной системы

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = \tilde{T}y \tag{3.12}$$

если матрица $\tilde{T}$ удовлетворяет критерию асимптотической устойчивости или неустойчивости по первому приближению.

Оказывается, что (3.12) совпадает с уравнениями квазистатических движений в окрестности (3.2).

Заметим, что уравнение (3.12) может быть получено подстановкой в первое уравнение системы (3.3) выражений

$$\begin{aligned} p &= \epsilon\Lambda_1 y + \epsilon^2\Lambda_2 y \\ q &= \Gamma_0 y + \epsilon\Gamma_1 y \end{aligned} \tag{3.13}$$

Учитывая сделанную ранее замену $q = \epsilon^2 q^*$, $q^{\boldsymbol{\cdot}} = \epsilon p$ и соотношения (3.6), (3.7), выражения (3.13) перепишем в виде

$$q = \epsilon^2 C^{-1}(My - \epsilon BC^{-1}(My)^{\boldsymbol{\cdot}}), \quad p = q^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{3.14}$$

где дифференцирование по времени ведется в силу уравнения $y^{\boldsymbol{\cdot}} = Ty$. Сравнивая (3.13) с выражением (2.14) работы [2], приходим к выводу, что (3.14) представляет собой линеаризованное выражение асимптотических разложений обобщенных координат, соответствующих квазистатическому режиму колебаний.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4. Если в окрестности невозмущенного движения линеаризованные уравнения квазистатических движений отвечают критерию асимптотической устойчивости (неустойчивости), то при достаточно малом ϵ (3.10), (3.11) невозмущенное движение асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Замечание. Вместо точного частного решения (3.2) часто используется приближенное решение уравнений (1.1), (1.2)

$$y=\tilde{y}^0,\quad q_n=\tilde{q}_n^0=\epsilon^2\omega_n^{-2}Q_n(\tilde{y}^0,0,0),\quad \dot{q}_n=0 \tag{3.15}$$

Как правило, решение (3.15) связано с (3.2) соотношениями

$$y^0=\tilde{y}^0,\quad q_n^0=\tilde{q}_n^0+O(\epsilon^4) \tag{3.16}$$

Случай (3.15), (3.16) встречается, например, при исследовании относительного движения вязкоупругого тела в центральном ньютоновском поле сил. Если функции f_s и Q_n дважды непрерывно дифференцируемы и выполнено соотношение (3.15), имеем

$$T=T_0+O(\epsilon^4),\quad L=L_0+O(\epsilon^2),\quad K=K_0+O(\epsilon^2)$$

$$M=M_0+O(\epsilon^2)$$

$$T_0=\frac{\partial f}{\partial y}(y^0,\tilde{q}^0,0),\quad L_0=\frac{\partial f}{\partial q}(y^0,0,0)$$

$$K_0=\frac{\partial f}{\partial p}(y^0,0,0),\quad M_0=\frac{\partial Q}{\partial y}(y^0,0,0)$$

Использование в (3.12) вместо операторов T, K, L, M соответственно T_0, K_0, L_0, M_0 не приводит к потере точности, с которой были получены уравнения (3.11) и равенства (3.13). Можно показать, что уравнения, полученные подстановкой (1.3) в (1.1) и линеаризацией в окрестности решения (3.14), будут совпадать с уравнением (3.11), в котором оператор выражен через T_0, K_0, L_0, M_0.

Ход доказательства теоремы 4 в этом случае претерпит незначительные изменения (изменится величина $\| A_2^1 \|$).

Заметим также, что условия типа $\lambda_{\max}^- > 0$ и $\lambda_1^+ > 0$ определяют в области изменения параметров задачи подобласти асимптотической устойчивости или неустойчивости. При значениях параметров, для которых $\lambda_{\max}^- = O(\epsilon)$, $\lambda_1^+ = O(\epsilon)$, условия (3.10), (3.11) могут нарушаться, и теорема 4 неприменима.

Случай, когда уравнения квазистатических движений отвечают какому-либо критическому случаю теории устойчивости в настоящей работе не рассматривается.

Тем самым, за исключением указанных случаев, получили обоснование результаты работ [5–9] (см. также работы, указанные в сноске 2).

4. Об устойчивости относительного равновесия вязкоупругого нерастяжимого кольца на круговой орбите. Рассмотрим движение вязкоупругого нерастяжимого кольца в центральном ньютоновском поле сил. Будем полагать, что движение центра масс кольца не зависит от движения относительно центра масс и орбита центра масс круговая ($\omega_0 = 2\pi T^{-1}$, T – период обращения центра масс по орбите). Некоторые аспекты движения такой системы рассмотрены ранее (см. первую работу, цитированную в сноске 2). Приведем необходимые обозначения и уравнения движения: $Ox_1x_2x_3$ – связанная с кольцом "средняя" система координат (O – центр масс кольца, x_3 – его ось симметрии), $OX_1X_2X_3$ – орбитальная система координат. Ось X_3 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс относительно притягивающего центра, а оси X_2 и X_1 – соответственно по бинормали к орбите и по ее трансверсали в сторону движения центра масс. Орты осей X_1, X_2 и X_3 обозначим соответственно через $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – их проекции на оси x_i).

Смещение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ точки кольца ($\mathbf{r}$ – ее радиус-вектор в недеформированном состоянии) при плоских изгибных колебаниях записывается в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\sum_{n=2}^{\infty}(q_n^{(1)}\mathbf{U}_n^{(1)}(r)+q_n^{(2)}\mathbf{U}_n^{(2)}(r))$$

где $\mathbf{U}_n^{(1)}$, $\mathbf{U}_n^{(2)}$ ($n=2, 3, \ldots,$) – ортонормированная система собственных форм колебаний.

Уравнения, описывающие движение трехгранника $Ox_1x_2x_3$, запишем в виде

$$\mathbf{K}^{\cdot} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{K} = 3\boldsymbol{\gamma} \times J\boldsymbol{\gamma}$$

$$\mathbf{K} = J\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{K}_*, \quad \mathbf{K}_* = \sum_{n=2}^{\infty} (q_n^{(1)\cdot} q_n^{(2)} - q_n^{(1)} q_n^{(2)\cdot})\, \mathbf{e}_3 \tag{4.1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)^T, \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$$

где $\tilde{\omega}_i$ – проекция абсолютной угловой скорости трехгранника $Ox_1x_2x_3$ на ось x_i, псмноженная на ω_0^{-1}. Точкой в (4.1) и далее обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, J – тензор инерции кольца для точки в системе $Ox_1x_2x_3$

$$J = J_0 + J_1 + J_2, \quad J_0 = \mathrm{diag}\{A, A, C\} \tag{4.2}$$

$$J_1 = 2q_2^{(1)} \begin{Vmatrix} H_2 & 0 & 0 \\ 0 & -H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + 2q_2^{(2)} \begin{Vmatrix} 0 & -H_2 & 0 \\ -H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$J_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (q_n^{(1)2} + q_n^{(2)2}) \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} + 2(q_n^{(1)} q_{n+2}^{(2)} + q_n^{(2)} q_{n+2}^{(1)}) \times \right.$$

$$\left. \times \begin{Vmatrix} 0 & L_n & 0 \\ L_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + 2(q_n^{(1)} q_{n+2}^{(1)} - q_n^{(2)} q_{n+2}^{(2)}) \begin{Vmatrix} -L_n & 0 & 0 \\ 0 & L_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right\}$$

$$H_2 = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{10}}, \quad L_n = \frac{(n-1)(n+3)}{4\sqrt{(n^2+1)((n+2)^2+1)}}$$

где a – радиус недеформированного кольца, m – масса, A и C – экваториальный и осевой моменты инерции соответственно. В случае тонкого кольца $C = 2A$. Отношение $\alpha = C/A$ в дальнейшем для общности будем считать произвольным $(0 < \alpha < 2)$.

Выпишем уравнения, описывающие изменение со временем обобщенных координат $q_n^{(1)}$, $q_n^{(2)}$:

$$q_n^{(1)\cdot\cdot} + 2\epsilon^{-1} b\omega_0 \omega_n^2 q_n^{(1)\cdot} + \epsilon^{-2}\omega_n^2 q_n^{(1)} = Q_n^{(1)}(\tilde{\omega}, \gamma) + 2q_n^{(2)\cdot}\tilde{\omega}_3 + q_n^{(2)}\tilde{\omega}_3^{\cdot} + \tfrac{1}{2} q_n^{(1)}(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 +$$

$$+ 2\tilde{\omega}_3^2 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - 2) + (q_{n+2}^{(1)} L_n + q_{n-2}^{(1)} L_{n-2})(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + 3\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) +$$

$$+ 2(q_{n+2}^{(2)} L_n + q_{n-2}^{(2)} L_{n-2})(\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 - 3\gamma_1\gamma_2)$$

$$q_n^{(2)\cdot\cdot} + 2\epsilon^{-1} b\omega_0 \omega_n^2 q_n^{(2)\cdot} + \epsilon^{-2}\omega_n^2 q_n^{(2)} = Q_n(\tilde{\omega}, \gamma) - 2q_n^{(1)\cdot}\tilde{\omega}_3 - q_n^{(1)}\tilde{\omega}_3^{\cdot} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} q_n^2(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + 2\tilde{\omega}_3^2 + 3\gamma_1^2 + 3\gamma_2^2 - 2) + (q_{n+2}^{(2)} L_n + q_{n-2}^{(2)} L_{n-2})(\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\omega}_1^2 +$$

$$+ \gamma_1^2 - \gamma_2^2) + 2(q_{n+2}^{(1)} L_n + q_{n-2}^{(1)} L_{n-2})(\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 - 3\gamma_1\gamma_2) \tag{4.3}$$

$$Q_2^{(1)} = H_2(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + 3\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2), \quad Q_n^{(1)} = 0, \quad n = 3, 4, \ldots$$

$$Q_2^{(2)} = H_2(-2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + 6\gamma_1\gamma_2), \quad Q_n^{(2)} = 0, \quad n = 3, 4, \ldots$$

В уравнениях (4.3) при $n = 2, 3$ надо формально положить $q_{n-2}^{(1)}, q_{n-2}^{(2)}$ равныминулю. Величина b характеризует диссипативные свойства материала; $\epsilon^{-1}\omega_n = \omega_0^{-1}\Omega_n$, Ω_n – собственные частоты плоских изгибных колебаний кольца, ϵ – малый параметр, вводимый обычным образом [2, 4].

Система (4.1), (4.2) замыкается кинематическими уравнениями Пуассона

$$\boldsymbol{\alpha}^{\cdot} = \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\beta}^{\cdot} = \boldsymbol{\beta} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} = \boldsymbol{\gamma} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\alpha} \tag{4.4}$$

Уравнения (4.1), (4.2), (4.4) допускают точное частное решение

$$\tilde{\omega} = (0,1,0)^T, \quad \gamma = (0,0,1)^T, \quad \alpha = (1,0,0)^T$$
$$q_n^{(1)\cdot} = 0, \quad q_n^{(2)\cdot} = 0, \quad q_n^{(2)} = 0, \quad n = 2,3,\ldots \tag{4.5}$$

Решение (4.5) удовлетворяет уравнениям (4.1), (4.4) при любых значениях величин $q_n^{(1)}$ и соответствует относительному равновесию кольца в орбитальной системе координат, когда его плоскость ортогональна радиусу-вектору центра масс относительно притягивающего центра.

Стационарные значения обобщенных координат $q_n^{(1)}$ определяются из соотношений

$$(\epsilon^{-2}\omega_2^2 + \tfrac{1}{2})\, q_2^{(1)} + L_2 q_4^{(1)} = -H_2$$
$$L_{2k-2}\, q_{2k-2}^{(1)} + (\epsilon^{-2}\omega_{2k}^2 + \tfrac{1}{2})\, q_{2k}^{(1)} + L_{2k}\, q_{2k+2}^{(1)} = 0 \tag{4.6}$$
$$q_{2k-1}^{(1)} = 0, \quad k = 3,4,\ldots$$

Решение бесконечной системы (4.6) представим в виде ряда

$$\tilde{q} = \epsilon^2\tilde{q}_1 + \epsilon^4\tilde{q}_2 + \epsilon^6\tilde{q}_3 + \ldots, \quad \tilde{q} = (q_2^{(1)}, q_4^{(1)}, \ldots)^T \tag{4.7}$$
$$\tilde{q}_1 = (-H_2\omega_2^{-2}, 0, 0, \ldots)^T, \quad \tilde{q}_l = \tilde{C}^{-1}\tilde{C}_1\tilde{q}_{l-1}$$

$$\tilde{C} = \mathrm{diag}\{\omega_2^2, \omega_4^2, \omega_6^2, \ldots\}, \quad \tilde{C}_1 = \left\| \begin{matrix} \tfrac{1}{2} & L_2 & 0 & \ldots \\ L_2 & \tfrac{1}{2} & L_4 & \ldots \\ 0 & L_4 & \tfrac{1}{2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

Так как оператор $\tilde{C}^{-1}\tilde{C}_1$ компактный, ряд (4.7) сходится абсолютно при $\epsilon^2 \|\tilde{C}^{-1}\tilde{C}_1\| < 1$. Таким образом, выполнено условие (3.15) и согласно замечанию из разд. 3 можно использовать приближенное решение системы (4.6)

$$q_2^{(1)} = -\epsilon^2\omega_2^{-2}H_2, \text{ остальные } q_n^{(i)} = 0, \quad i = 1,2; \quad n = 2,3,4,\ldots \tag{4.8}$$

Исследуем устойчивость частного решения (4.5), (4.7). Устойчивость двух других относительно равновесий (когда плоскость кольца лежит в плоскости орбиты и когда она ортогональна вектору скорости радиуса-вектора центра масс исследовалась ранее (см. первую работу, цитированную в сноске 2)).

Положим

$$\tilde{\omega}_1 = y_1, \quad \tilde{\omega}_2 = 1 + y_2, \quad \tilde{\omega}_3 = y_3 \tag{4.9}$$
$$\gamma_1 = y_4, \quad \gamma_2 = y_5, \quad \gamma_3 = 1$$
$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = y_6, \quad \alpha_3 = -y_4$$

В (4.9) учтено, что векторы α, β, γ ортонормированы и среди величин α_l, β_l, γ_l ($l = 1, 2, 3$) только три независимых.

Опуская промежуточные выкладки, получаем линеаризованные в окрестности решения (4.5), (4.9) уравнения квазистатических движений (подробно процедуру получения таких уравнений см., например, в [5])

$$(1 - \epsilon^2\kappa)\dot{y}_1 = -\epsilon^3\Delta(1-\alpha)y_1 + ((1-\alpha) + \epsilon^2\kappa(2\alpha - 1))y_3 +$$
$$+ (-3(1-\alpha) - 3\epsilon^2\kappa(2\alpha-1))y_5 - \epsilon^3\Delta(1-\alpha)y_6 \tag{4.10}$$
$$(1 + \epsilon^2\kappa)\dot{y}_2 = -\epsilon^3\Delta(1-\alpha)y_2 + (3(1-\alpha) - 3\epsilon^2\kappa(2\alpha-1))y_4$$
$$\alpha\dot{y}_3 = -1/3\,\epsilon^3\Delta(1-\alpha)y_3 + \epsilon^3\Delta(1-\alpha)y_5$$
$$\dot{y}_4 = -y_2, \quad \dot{y}_5 = y_1 + y_6, \quad \dot{y}_6 = -y_3 - y_5$$
$$\kappa = 2H_2^2/(A\omega_2^2), \quad \Delta = 12\,b\omega_0\kappa$$

Корни характеристического уравнения системы (4.10) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3(1-\alpha)} + O(\epsilon^2)$$

$$\lambda_3 = O(\epsilon^4),\quad \lambda_4 = \epsilon^3\,\frac{4\Delta(1-\alpha)}{3\alpha(3\alpha-4)} + O(\epsilon^4)$$

$$\lambda_{5,6} = \epsilon^3\,\frac{4\Delta(1-\alpha)^2}{\alpha(3\alpha-4)} \pm i\,(\sqrt{3\alpha-4} + O(\epsilon^2))$$

При $0 < \alpha < 1$ один из корней λ_1 или λ_2 положителен, при $1 < \alpha < 4/3$ имеем $\lambda_4 > 0$, а при $4/3 < \alpha < 2$ действительные части корней λ_5 и λ_6 больше нуля. Следовательно, по теореме 4 при любых значениях α из интервала от нуля до двух (за исключением малых окрестностей точек $\alpha = 1$ и $\alpha = 4/3$) относительное равновесие кольца в орбитальной системе координат, когда его плоскость ортогональна радиусу-вектору центра масс, неустойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973, 272 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
3. *Черноусько Ф.Л., Шамаев А.С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 33–42.
4. *Маркеев А.П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. № 2. С. 163–175.
5. *Маркеев А.П.* Об одном частном случае движения динамически симметричного упруговязкого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле // Космич. исследования. 1990. Т. 28. № 5. С. 643–654.
6. *Маркеев А.П., Холостова О.В.* О плоских резонансных движениях и регулярных прецессиях космического аппарата с деформируемыми элементами // Космич. исследования. 1991. Т. 29. № 3. С. 328–339.
7. *Холостова О.В.* О движении твердого тела с упруговязкой мембраной в гравитационном поле // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 3–13.
8. *Холостова О.В.* Об устойчивости одного частного движения твердого тела с упруговязкой мембраной на круговой орбите. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 29–33.
9. *Вильке В.Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 395–402.
10. *Персидский К.П.* Избранные труды. Т. 2. Бесконечные системы дифференциальных уравнений: Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. Алма-Ата: Наука, 1976. 247 с.
11. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1992