

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. О.Д. Прякина, М.Р. Фрейгейт

О МЕТОДЕ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ МАССИВНОГО ШТАМПА НА МНОГОСЛОЙНОМ ОСНОВАНИИ

Предлагается метод решения плоской нестационарной контактной задачи для многослойной среды, основанный на сочетании аналитических методов (метода фиктивного поглощения, метода собственных вектор-функций для определения функции влияния среды в интегральных преобразованиях Фурье) и численного обращения преобразования Лапласа. Преимуществом предлагаемого подхода является возможность исследования систем с произвольным числом слоев. Построенное решение позволяет детально исследовать динамику штампа, а также проследить за изменением характера нестационарного процесса в среде.

Численный анализ проводится для полосового штампа, контактирующего без трения с пакетом из трех и более слоев, жестко сцепленных с недеформируемым основанием. На штамп действует вертикальная нагрузка. Дается анализ смещений штампа и точек среды в зависимости от времени при различных соотношениях упругих и геометрических параметров задачи.

1. Постановка задачи и схема ее решения. Рассматривается задача о динамическом взаимодействии со слоистой полуограниченной средой жесткого полосового штампа массы M и ширины $2a$. На штамп действует произвольно изменяющаяся во времени t нагрузка $P(t)$. Среда занимает область $-H \leq z \leq 0$, $-\infty \leq x, y \leq \infty$ и представляет собой пакет из N , жестко соединенных между собой слоев толщины $H = 2(h_1 + \dots + h_N)$ (h_i – полутолщина, μ_i – параметр Ламе, ν_i – коэффициент Пуассона, ρ_i – плотность i -го слоя). Нижняя граница пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием. В начальный момент времени система находится в покое.

В плоской постановке перемещения упругой среды $u(x, z, t) = \{u_1, u_2\}$, вызываемые произвольной нагрузкой $q(x, t) = \{q_1, q_2\}$, заданной в некоторой области $|x| \leq a$, $z = 0$, представимы в виде свертки [1] в преобразованиях Лапласа по времени t

$$u(x, z, p) = \int_{-a}^a k(x - \xi, z, p) q(\xi, p) d\xi \quad (1.1)$$

$$k(x, z, p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, z, p) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.2)$$

где p – параметр преобразования Лапласа, α – параметр преобразования Фурье.

Уравнения (1.1), (1.2) строятся методом интегральных преобразований [1] из дифференциальных уравнений Ламе, описывающих движение точек среды, и

преобразуются к виду

$$U(\alpha, z, p) = K(\alpha, z, p)Q(\alpha, p) \quad (1.3)$$

где подынтегральная матрица-функция $K(\alpha, z, p) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^2$ определяется типом среды и для слоистых сред имеет тот же вид, что и в задачах об установившихся колебаниях при замене частоты колебаний ω на $i p$, где i – мнимая единица. Свойства функции $K(\alpha, z, p)$ известны [1]; $U(\alpha, z, p)$, $Q(\alpha, p)$ – трансформанты Фурье и Лапласа функций u и q соответственно.

Соотношения (1.1)–(1.3) являются основными при изучении взаимодействия поверхностных объектов с упругой средой и распространения волн от поверхностных источников. Одно из важнейших мест в этой задаче занимает построение матрицы-функции $K(\alpha, z, p)$ для многослойной среды.

При заданных на поверхности среды смешанных граничных условиях

$$\begin{aligned} u(x, 0, p) &= w(p), & |x| \leq a, & \quad z = 0 \\ q(x, p) &= 0, & |x| > a, & \quad z = 0 \end{aligned}$$

получим из (1.1) интегральное уравнение контактной задачи в преобразованиях Лапласа. Неизвестные контактные напряжения в области контакта $|x| \leq a$, $z = 0$ определяются из уравнения Фредгольма первого рода

$$w(p) = \int_{-a}^a k(x - \xi, 0, p)q(\xi, p)d\xi \quad (1.4)$$

Если динамическое воздействие на среду передается через массивный штамп, то к уравнению (1.4) следует добавить дифференциальные уравнения движения штампа.

Приведем общую схему решения задачи, когда на массивный штамп действует вертикальная нагрузка $P(t) = \{0, P\}$ и контакт штампа со средой осуществляется без трения. В этом случае имеем одно уравнение движения штампа, которое в трансформантах Лапласа имеет вид

$$Mp^2w = P(p) - Q(p), \quad Q(p) = \int_a^a q(x, p)dx, \quad (1.5)$$

где $Q(p)$ – реакция основания, связанная с функционалом $Q(\alpha, p)$ соотношением $Q(p) \equiv Q(0, p)$.

1°. Строим матрицу-функцию $K(\alpha, z, \omega)$ для многослойной среды и заменой $\omega = ip$ получаем $K(\alpha, z, p)$. В случае введения вязкости в среду делаем формальную замену $\omega = ip e^{-i\zeta}$, ζ – параметр вязкости среды (коэффициент потерь на внутреннее трение в материале основания, при этом упругие постоянные в уравнениях Ламе – комплексные величины вида $\lambda_i e^{2i\zeta}$, $\mu_i e^{2i\zeta}$, $0 \leq 2\zeta \leq 1$ [2]).

2°. Методом фиктивного поглощения определяем неизвестные контактные напряжения $q_0(x, p)$, реакцию основания $Q_0(p)$ и функционал $Q_0(\alpha, p)$ из интегрального уравнения (1.4) при единичном вертикальном смещении штампа $w = \{0, 1\}$, которое принимает вид

$$\int_{-a}^a k(x - \xi, p)q_0(\xi, p)d\xi = 1 \quad (1.6)$$

$$k(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, p)e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad K(\alpha, p) = K_{22}(\alpha, 0, p) \quad (1.7)$$

3°. Из уравнения движения (1.5) при учете линейной постановки задачи определяем смещение штампа $w = \{0, w\}$

$$w(p) = P(p)(Mp^2 + Q_0(p))^{-1} \quad (1.8)$$

4°. Перемещения точек среды в трансформантах Фурье–Лапласа при $|x| > \alpha$, $-H \leq z \leq 0$ определяем по формуле (1.3), где

$$Q(\alpha, p) = w(p)Q_0(\alpha, p) \quad (1.9)$$

5°. Применяя к (1.8), (1.3), (1.9) обратные преобразования, получим искомые функции $W(t)$, $u(x, z, t)$, характеризующие перемещение массивного штампа и смещения в среде.

2. Построение матрицы-функции $K(\alpha, z, \omega)$ для пакета из N слоев. Рассмотрим упругий слой толщины $2h$, $-h \leq z \leq h$ под действием гармонической нагрузки $T e^{-i\omega t}$, $R e^{-i\omega t}$, приложенной на его верхней и нижней гранях соответственно. Решение для слоя строится методом собственных вектор-функций [3] и в трехмерной постановке имеет вид

$$u(x, y, z) = \frac{e^{-i\omega t}}{16\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} a(z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.1)$$

$$u(x, y, z) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

Запишем решение задачи в трансформантах Фурье с параметрами α, β ($Q^\pm = \{Q_1^\pm, Q_2^\pm, Q_3^\pm\}$ – вектор нагрузок)

$$a(z) = [A_h^+(z)Q^+ + A_h^-(z)Q^-] \mu^{-1}$$

$$Q_1^\pm = i\lambda^{-2} [(t_1 \mp r_1)\alpha + (t_2 \mp r_2)\beta]$$

$$Q_2^\pm = i\lambda^{-2} [(t_1 \mp r_1)\beta - (t_2 \mp r_2)\alpha], \quad Q_3^\pm = t_3 \pm r_3$$

$$t = \int \int_{-\infty}^{\infty} T e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy, \quad r = \int \int_{-\infty}^{\infty} R e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

Элементы матрицы A_h^\pm имеют вид:

$$A_{11}^+ = i\alpha(\Delta^+)^{-1} \sigma_2 (\lambda^2 \operatorname{ch}(z\sigma_1) \operatorname{ch}(h\sigma_2) - \gamma \operatorname{ch}(h\sigma_1) \operatorname{ch}(z\sigma_2))$$

$$A_{12}^+ = -i\beta 2 \operatorname{ch}(z\sigma_2) (\sigma_2 \operatorname{sh}(h\sigma_2))^{-1} \quad (2.2)$$

$$A_{13}^+ = -i\alpha(\Delta^+)^{-1} (\gamma \operatorname{ch}(z\sigma_1) \operatorname{sh}(h\sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(h\sigma_1) \operatorname{ch}(z\sigma_2))$$

$$A_{21}^+ = \beta / \alpha A_{11}^+, \quad A_{22}^+ = -\alpha / \beta A_{12}^+, \quad A_{23}^+ = \beta / \alpha A_{13}^+$$

$$A_{31}^+ = \lambda^2 (\Delta^+)^{-1} (\gamma \operatorname{ch}(h\sigma_1) \operatorname{sh}(z\sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(z\sigma_1) \operatorname{ch}(h\sigma_2))$$

$$A_{32}^+ = 0$$

$$A_{33}^+ = \sigma_1 (\Delta^+)^{-1} (\gamma \operatorname{sh}(z\sigma_1) \operatorname{sh}(h\sigma_2) - \lambda^2 \operatorname{sh}(h\sigma_1) \operatorname{sh}(z\sigma_2))$$

$$\Delta^+ = \gamma^2 \operatorname{ch}(h\sigma_1) \operatorname{sh}(h\sigma_2) - \lambda^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(h\sigma_1) \operatorname{ch}(h\sigma_2)$$

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \gamma = \lambda^2 - 1/2\theta_2^2, \quad \sigma_i^2 = \lambda^2 - \theta_i^2$$

$$\theta_1^2 = \varepsilon\theta_2^2, \quad \theta_2^2 = \rho\omega^2 / \mu, \quad \varepsilon = (1 - 2\nu) / (2 - 2\nu)$$

Матрица $A_h^-(z)$ и Δ находятся циклической заменой в $A_h^+(z)$, Δ^+ sh на ch; μ – параметр Ламе, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность слоя, ω – частота колебаний.

Введем две матрицы специального вида

$$C^\pm = \begin{vmatrix} \pm i\alpha\lambda^2 & \pm i\beta\lambda^2 & 0 \\ \pm i\beta\lambda^2 & \pm i\alpha\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

тогда $Q^\pm = C^\pm t \pm C^\mp r$, и решение для слоя запишется так:

$$a(z) = (A(z)t + B(z)r)\mu^{-1} \quad (2.3)$$

$$A(z) = [A_h^+(z) + A_h^-(z)]C^+, \quad B(z) = [A_h^+(z) - A_h^-(z)]C^- \quad (2.4)$$

В случае среды, представляющей собой пакет из N слоев, жестко соединенных между собой, толщины $H = 2(h_1 + \dots + h_N)$ (h_i – полутолщина i -слоя) и с жестко заземленной нижней гранью используем полученное выше решение (2.1), (2.3) для слоя.

Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$z_k = z + 2(h_1 + \dots + h_{k-1}) + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Проведем формальное разделение слоев. Тогда смещения точек k -слоя будут определяться выражением

$$a_k(z_k) = (A(z_k)t_{k-1} + B(z_k)t_k)\mu_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

где t_k – усилия, характеризующие взаимодействие между слоями, t_0 – усилия на верхней грани.

Отметим, что при вычислении элементов матриц $A(z_k)$, $B(z_k)$ в (2.5), определяемых по (2.2), (2.4), следует полагать $h = h_k$, $\mu = \mu_k$, $\rho = \rho_k$, $\nu = \nu_k$.

Выпишем условия стыковки слоев

$$a_k(-h_k) = a_{k+1}(h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.6)$$

и условие жесткой заделки

$$a_N(-h_N) = 0 \quad (2.7)$$

Из (2.6) имеем рекуррентное соотношение

$$A(-h_k)t_{k-1} + [B(-h_k) - g_k A(h_{k+1})]t_k = g_k B(h_{k+1})t_{k+1} \quad (2.8)$$

$$g_k = \mu_k / \mu_{k+1}$$

Из (2.7) определяем

$$t_N = -B^{-1}(-h_N)A(-h_N)t_{N-1} \quad (2.9)$$

Используя рекуррентное соотношение (2.8) и (2.9), выражаем усилия t_k через поверхностную нагрузку t_0 :

$$t_k = (-1)^k \prod_{i=k}^1 F_i^{-1} A(-h_i) t_0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$F_N = B(-h_N), \quad F_k = B(-h_k) - g_k A(h_{k+1}) + g_k B(h_{k+1}) F_{k+1}^{-1} A(-h_{k+1}),$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1$$

В результате перемещения точек многослойной среды будут определяться выражением

$$a(z) = K(\alpha, \beta, z, \omega) t_0$$

$$K(\alpha, \beta, z, \omega) = (-1)^{k-1} (A(z_k) - B(z_k) F_k^{-1} A(-h_k)) * \prod_{i=k-1}^1 F_i^{-1} A(-h_i) \mu_k^{-1}, \quad (2.10)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

В частности, для слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, из (2.10) имеем

$$a(z) = (A(z+h_1) - B(z+h_1) B^{-1}(-h_1) A(-h_1)) t_0 \mu_1^{-1}$$

Для пакета из двух слоев получаем перемещения:

в верхнем слое

$$a(z) = (A(z+h_1) - B(z+h_1) F_1^{-1} A(-h_1)) t_0 \mu_1^{-1}$$

в нижнем слое

$$a(z) = -(A(z_2) - B(z_2) B^{-1}(-h_2) A(-h_2)) F_1^{-1} A(-h_1) t_0 \mu_2^{-1}$$

$$z_2 = z + 2h_1 + h_2$$

Здесь

$$F_1 = B(-h_1) - g_1 A(h_2) + g_1 B(h_2) B^{-1}(-h_2) A(-h_2)$$

Установлено, что при $\lambda \rightarrow \infty$ в асимптотическое поведение матрицы K на поверхности среды при $z = 0$ совпадает с аналогичным поведением K для слоя и имеет вид

$$K(\alpha, \beta, 0, \omega) \approx A(h_1) = \begin{vmatrix} \alpha^2 M + \beta^2 S & \alpha\beta(M-S) & -i\alpha L \\ \alpha\beta(M-S) & \beta^2 M + \alpha^2 S & -i\beta L \\ i\alpha L & i\beta L & R \end{vmatrix}$$

Функции M, S, L, R зависят от частоты ω , параметра $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ и при $\lambda \rightarrow \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$M \approx 4(1 - \nu_1) |\lambda|^{-3}, \quad S \approx 4 |\lambda|^{-3}$$

$$L \approx (4\nu_1 - 2) \lambda^{-2}, \quad R \approx 4(1 - \nu_1) |\lambda|^{-1}$$

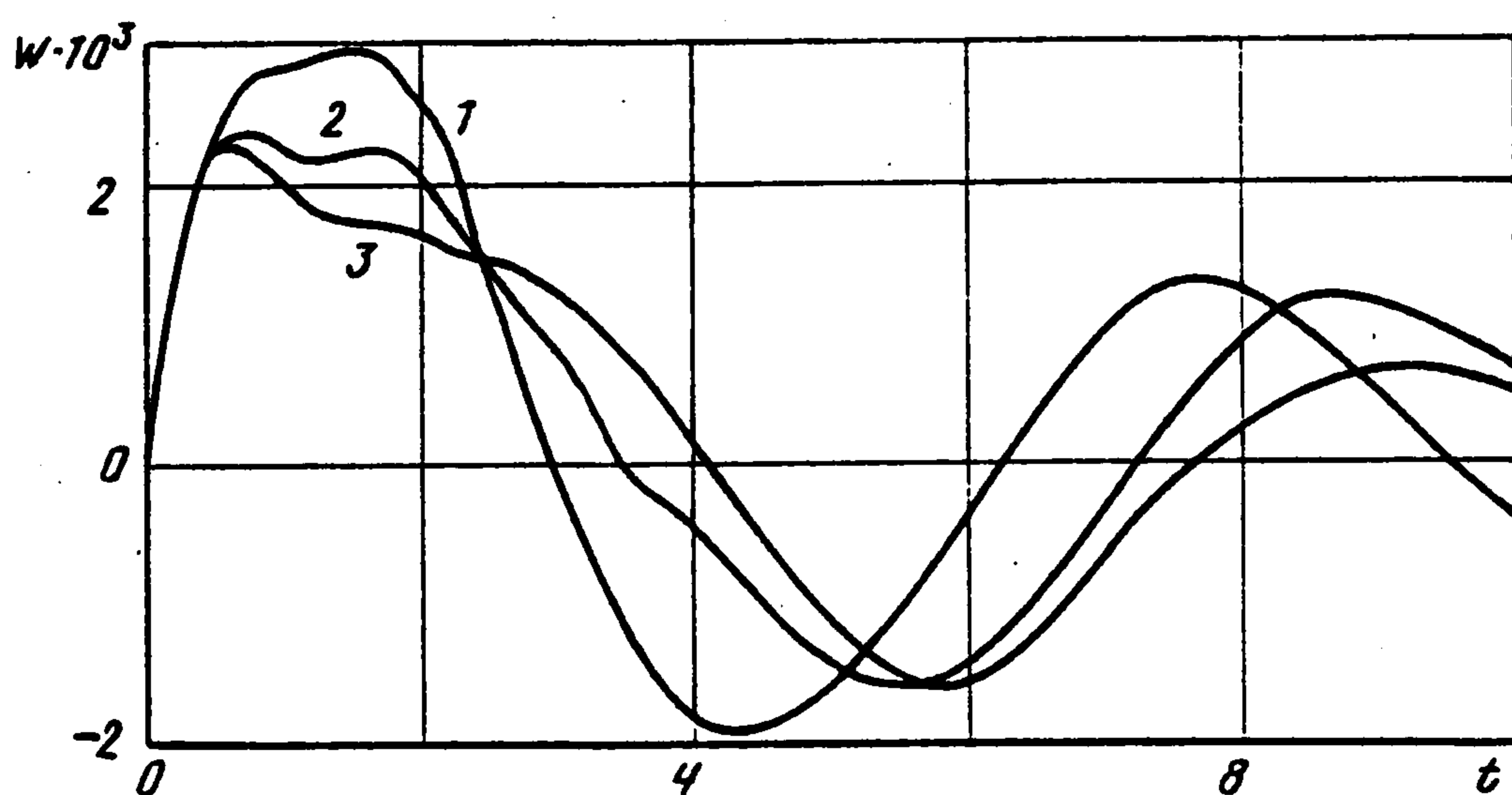
В случае плоской подстановки параметр $\beta = 0$ ($\lambda \equiv \alpha$) и подынтегральная функция ядра (1.2) $K(\alpha, z, p) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^2$ получается вычеркиванием из матрицы

$K(\alpha, 0, z, \omega) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^3$ второго столбца и второй строки и заменой $\omega = ip$. При

этом,

$$K(\alpha, 0, p) \approx \begin{vmatrix} c|\alpha|^{-1} & -ib\alpha^{-1} \\ ib\alpha^{-1} & c|\alpha|^{-1} \end{vmatrix}, \quad \alpha \rightarrow \infty$$

$$c = 4(1 - \nu_1), \quad b = 4\nu_1 - 2$$



Фиг. 1

Предлагаемый подход в определении матрицы-символа $K(\alpha, z, p)$ в отличие от других методов [4] позволяет избежать трудности при численной реализации задачи, обусловленные наличием растущих экспоненциальных составляющих в фундаментальных решениях соответствующих систем дифференциальных уравнений и приводящих к плохой обусловленности линейных алгебраических систем, возникающих при удовлетворении граничных условий.

3. Решение контактной задачи. Пусть $T_0\{0, q_0(x, p)\}$ – решение интегрального уравнения (1.6), (1.7) с единичной правой частью ($Kq_0 = 1$). Тогда контактные напряжения в области взаимодействия штампа с многослойной средой $q(x, p) = w(p) q_0(x, p)$. Решение $q_0(x, p)$ строилось методом фиктивного поглощения [5, 6], который позволяет аналитически выделить особенность контактных давлений на границе штампа. При этом интеграл Фурье $Q_0(\alpha, p)$ от $q_0(x, p)$ берется в квадратах. Вид функций $q_0(x, p)$ для фиксированных значений ω ($\omega = ip$) известен [6].

Функция $Q_0(\alpha, p)$, построенная методом фиктивного поглощения, имеет достаточно простой вид (B – параметр аппроксимации, $B \gg 1$ [6])

$$Q_0(\alpha, p) = K^{-1}(\alpha, p)(\alpha^2 + B^2)^{-1/2} \times \left\{ f_2(\alpha) + f_2(-\alpha) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_k(p) [f_1(\alpha, x_k) + f_1(\alpha, -x_k)] \right\} \quad (3.1)$$

Коэффициенты $C_k(p)$ определяются из следующей линейной алгебраической системы уравнений ($k, l = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{k=1}^n C_k(p) [f_1(\psi_l, x_k) + f_1(\psi_l, -x_k)] = 2[f_2(\psi_l) + f_2(-\psi_l)]$$

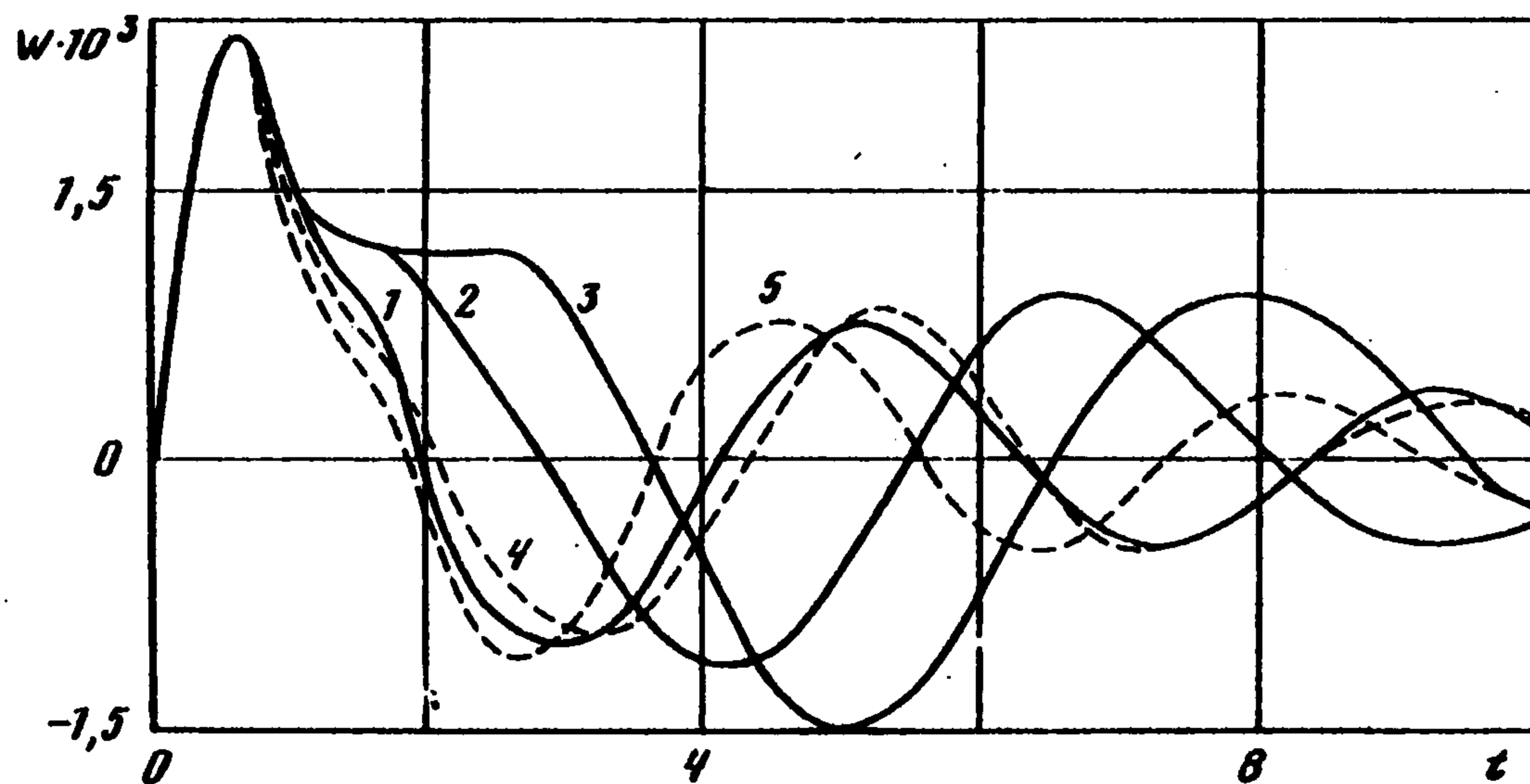
$$f_1(\alpha, x) = (B + i\alpha)^{1/2} e^{i\alpha x} F(\alpha, x) + (B - i\alpha)^{1/2} e^{-i\alpha x} F(-\alpha, -x)$$

$$f_2(\alpha) = (i\alpha)^{-1} e^{i\alpha a} ((B + i\alpha)B)^{1/2} \operatorname{erf}[2a(B + i\alpha)]^{1/2}$$

$$F(\alpha, x) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} H(\alpha, p) e^{i\varphi_j} (a - x)(B - i\varphi_j)^{-1/2} (\varphi_j + \alpha)^{-1}$$

$$H(\alpha, p) = c^{-1} K(\alpha, p)(\alpha^2 + B^2)^{1/2}$$

Здесь x_k – точки, делящие отрезок $(0, a)$ на n равных частей, φ_j, ψ_k – полюсы и нули функции $H(\alpha, p)$, расположенные в верхней полуплоскости α .



Фиг. 2

4. Смещения штампа во времени. После подстановки выражений (1.9), (3.1) при $\alpha = 0$ в уравнение (1.5) имеет (1.8). Для получения окончательного решения необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа

$$W(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} w(p) e^{pt} dp, \quad \xi > 0$$

Из физических условий задачи следует, что подынтегральная функция не имеет корней в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и интеграл по прямой, параллельной мнимой оси, можно заменить интегралом по мнимой оси. Затем заменой $p = -i\omega$ интеграл обращения Лапласа сводится к интегралу Фурье

$$W(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} w(i\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} w(i\omega) \sin \omega t d\omega \quad (4.1)$$

Для вычисления реакции основания $Q(t)$ и нормальных напряжений в области контакта $q(x, t)$ необходимо в (4.1) заменить подынтегральную функцию $w(p)$ на $w(p)Q_0(p)$ и $w(p)q_0(x, p)$ соответственно.

Ниже для вычисления интегралов типа (4.1) применяется метод Файлона [7], преимущество которого заключается в быстром обеспечении высокой точности вычисления интегралов от осциллирующих функций.

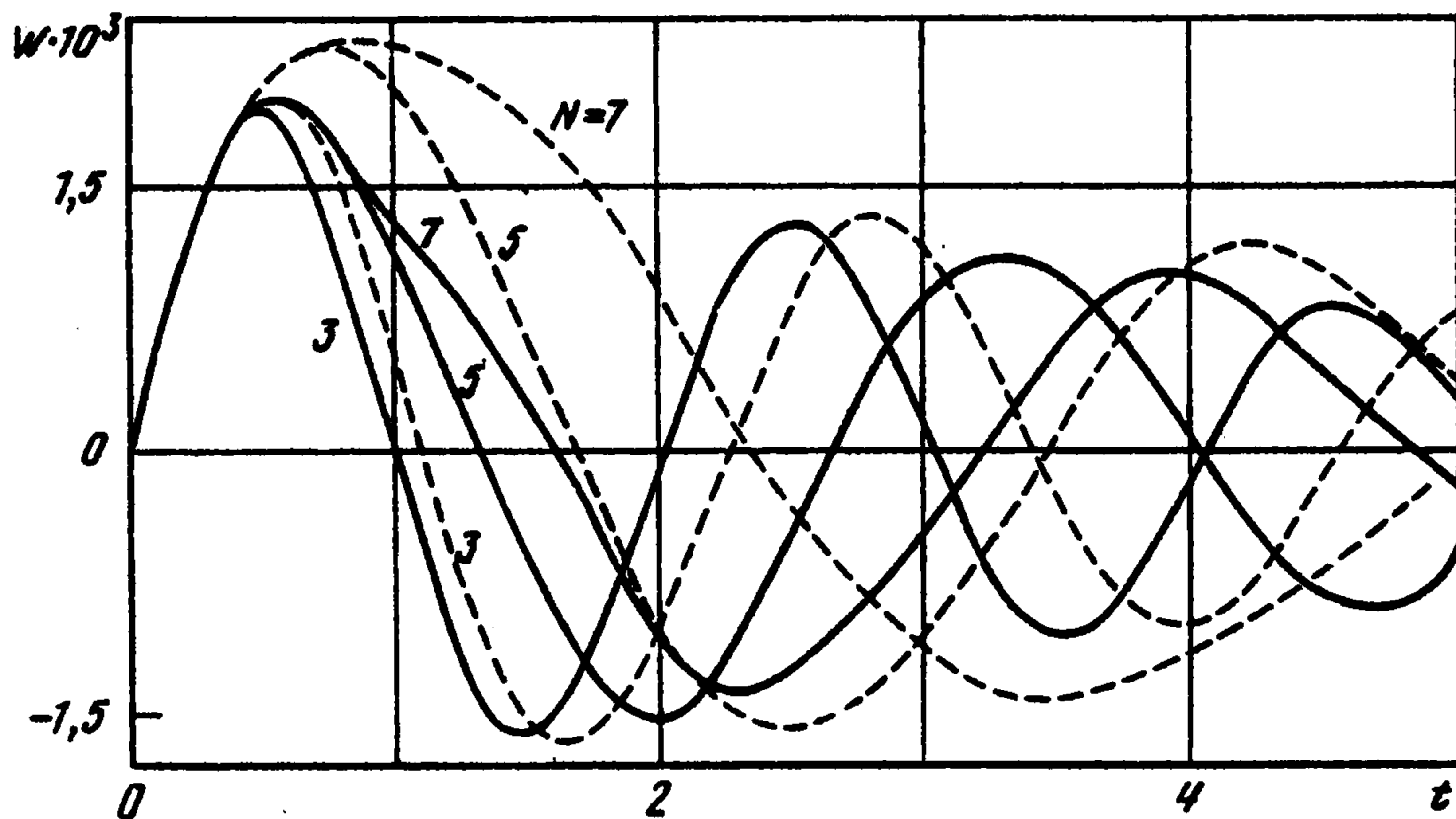
5. Смещения точек среды. Перемещения точек среды в трансформантах Фурье-Лапласа при $|x| > \alpha$, $-H \leq z \leq 0$ определяются по формуле (1.3) при учете (1.9). Применяв обратное преобразование Фурье, имеем

$$u_j(x, z, p) = \frac{w(p)}{\pi} \int_0^{\infty} K_{j2}(\alpha, z, p) Q_0(\alpha, p) \cos(\alpha x) d\alpha, \quad j = 1, 2$$

Искомые перемещения точек среды $u_j(x, z, t)$ получим по формуле (4.1), в которой следует заменить $w(p)$ на $u_j(x, z, p)$.

6. Численный анализ. Численный анализ задачи проводился для полосового штампа, контактирующего без трения с пакетом из трех и более слоев, жестко сцепленных с недеформируемым основанием. Поведение системы исследовалось в зависимости от геометрических и упругих параметров слоев. Варьировались их толщины, жесткости, плотности и вязкость среды. Проведено сравнение поведения штампа на трех, пяти и семислойной среде.

На фиг. 1 представлены смещения штампа единичной массы, контактирующего без трения с трехслойной средой при следующих значениях параметров: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,25$,



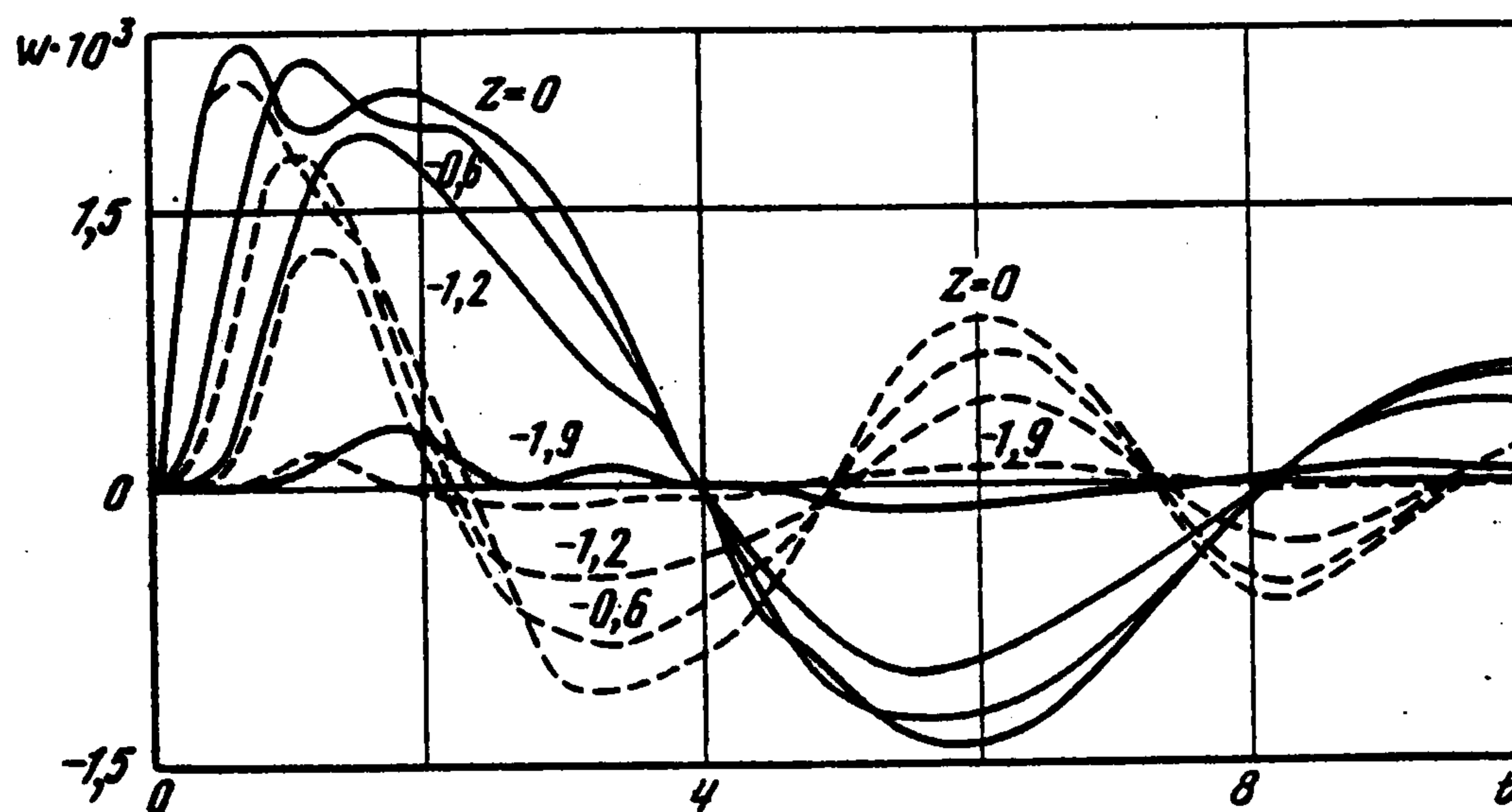
Фиг. 3

$\mu_3 = 0,5$. На штамп действует импульсная нагрузка $P(t) = H(t) - H(t - 0,01)$. Кривые 1–3 соответствуют изменению толщины верхнего слоя $2h_1 = (0,4; 0,8; 1,2)$ при фиксированных значениях второго $2h_2 = 0,6$ и третьего слоя $2h_3 = 0,4$. С увеличением толщины верхнего слоя, контактирующего с более мягким вторым слоем, наблюдается увеличение времени прихода волны, отраженной от границы раздела первой – второй слой. Эта волна приходит в фазе, вызывая увеличение смещений штампа. В связи с увеличением общей толщины пакета слоев, увеличивается и период собственных колебаний системы после снятия нагрузки.

На фиг. 2 приведены смещения штампа при изменяющейся толщине и жесткости третьего, нижнего слоя при фиксированных значениях упругих и геометрических параметрах первого и второго слоя $(\mu_1; 2h_1) = (1; 0,4)$, $(\mu_2; 2h_2) = (2; 0,6)$. Сплошные линии соответствуют изменяющейся толщине $2h_3 = 0,4; 0,8; 1,2$ (кривые 1–3) при $\mu_3 = 0,5$, штриховые – изменяющейся величине $\mu_3 = 0,5; 1; 1,5$ (кривые 2, 4, 5) при $2h_3 = 0,8$. Видно, что смещения штампа при изменяющейся толщине нижнего слоя совпадают, пока не вернется волна, отраженная от жесткого основания в случае самого тонкого слоя. С увеличением толщины нижнего слоя, более мягкого, чем второй ($\mu_3 < \mu_1 < \mu_2$), ярче выражен возврат волны в фазе от раздела второй – третий слой. Волна, отраженная от границы первый – второй слой, вызывает уменьшение смещений штампа. Это связано с тем, что соотношение $\mu_1/\mu_2 = 0,5$ в отличие от фиг. 1, где $\mu_1/\mu_2 = 4$. В случае увеличения жесткости нижнего слоя (штриховые линии) при его фиксированной толщине уменьшается период собственных колебаний системы и штамп раньше проходит положение равновесия.

На фиг. 3 приведены зависимости $W(t)$ для пакета из трех, пяти- и семислойной среды при фиксированных значениях толщины каждого слоя $2h_i = 0,2$ и ступенчато изменяющейся жесткости. Сплошные линии соответствуют $\mu_i = 1 + (i - 1)0,1$, штриховые – $\mu_i = 1 - (i - 1)0,1$. Следует отметить, что уменьшение жесткости с глубиной ведет к увеличению периода колебаний системы, и наоборот. Добавление слоев также приводит к увеличению периода колебаний.

На фиг. 4 представлены смещения штампа $z = 0$ и точек среды под ним на глубинах $z = -0,6, -1,2, -1,9$. Рассматривался пакет из двух равных по толщине слоев $2h_1 = 2h_2 = 1$ и с отношением жесткостей $\mu_1/\mu_2 = 4$. Видно, что используемая модель хорошо отражает физическую картину процесса распространения волн в среде как во время действия нагрузки, так и после ее снятия. Следует отметить, что с глубиной амплитуда колебаний уменьшается и все точки среды колеблются в фазе. С ростом глубины увеличивается время задержки (прихода волны), до которой среда находится в покое.



Фиг. 4

Штриховые линии соответствуют случаю слоя толщины $H = 2h_1 = 2$ и $\mu = \mu_1 = 1$ при $z = 0; -0,6; -1,2; -1,9$.

На фигурах все величины приведены в безразмерном виде. При этом перемещения отнесены к полуширине штампа α , нагрузка – к жесткости верхнего слоя μ_1 , время – к $(\rho_1 / \mu_1)^{1/2} \alpha$.

Во всех рассмотренных примерах остальные безразмерные параметры имеют значения $\rho_i = 1$, $\nu_i = 0,3$. Нагрузка $P(t) = H(t) - H(t - 0,01)$, коэффициент трения в среде $\zeta = 0,2$, масса штампа $M = 1$.

Авторы благодарят И.И. Воровича за обсуждение результатов и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1978. 319 с.
2. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
3. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
4. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
5. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
6. Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
7. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 221 с.