

УДК 539.3 : 534.1

© 1993 г. Г.А. Шаталов

ЧАСТОТНАЯ ДИСПЕРСИЯ УПРУГИХ ВОЛН В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ КОМПОЗИТАХ

Предлагается вариант нелокальной теории неупорядоченных композитов (в широком смысле — случайно-неоднородных сред), который строится в терминах эффективных характеристик. Последние являются функциями волнового вектора и частоты, что позволяет описать эффекты пространственной и частотной дисперсии при распространении волн. Исследуется распространение упругих волн при учете только частотной дисперсии, поскольку этому вопросу уделялось мало внимания. Результаты получены в приближении сильной дисперсии, отвечающем длинноволновому, но высокочастотному приближению.

При распространении упругих волн в композитах имеет место пространственная и частотная (временная) дисперсия. Если теории первого вопроса посвящена довольно обширная литература ([1–6] и др.), то второй вопрос исследован недостаточно [7]. В цитированных работах рассматривались среды со слабой пространственной дисперсией, подчиняющиеся одному из вариантов моментных теорий упругости [8, 9], хотя в работе [5], учитывающей нелокальные свойства микронеоднородной среды, никаких ограничений на длины волн не накладывалось.

Представляет интерес построение последовательно нелокальной теории неупорядоченных композитов, содержащей локальную (нулевое приближение) и моментные теории (первое приближение) и позволяющую в рамках единого формализма рассмотреть оба вида дисперсии волн. Ниже учитывается лишь частотная дисперсия. Вопрос о пространственной дисперсии может быть также рассмотрен в рамках предлагаемого формализма.

1. Постановка задачи. Рассматривается двухфазный композитный материал на основе матрицы, в которой случайным образом распределены включения второй фазы приблизительно равноосной формы. Сопряжение между фазами считается идеальным, а сами фазы изотропными. Эффективные характеристики композита, описывающие его динамическое упругое поведение, подлежат определению.

Предположим, что в длинноволновом приближении композит как макроскопически и статистически однородный материал подчиняется нелокальной теории упругости. В нелокальной теории произвольная характеристика a^* представляет собой интегральный оператор по пространственным и временным переменным. Ядро этого оператора является разностным, а его фурье-образ можно представить степенным рядом по волновому вектору k и частоте ω . Для изотропной среды в разложении (везде далее по повторяющимся индексам суммируем)

$$a^*(k; \omega) = a_0 + a_{2ij} k_i k_j + a_2' \omega^2 + \dots \quad (1.1)$$

нулевое приближение a_0 определяет эффективную характеристику локальной теории, а последующие члены определяют константы моментных теорий и описывают эффекты пространственной и частотной дисперсии. В (1.1) полагается, что k и ω — независимые переменные. Если в процессе вычислений окажется, что

эффективные характеристики композита постоянны, то композит как макроскопически однородная среда описывается локальной теорией упругости; если же фурье-образы эффективных характеристик имеют вид разложения (1.1), то композит подчиняется нелокальной теории.

Ниже будет определяться функция Грина композитной среды для динамической упругой задачи. Известно [10], что фурье-образы функций Грина для локальной и нелокальной теории идентичны, только в первом случае они выражаются через постоянные a_0 , а во втором — через функции $a^*(k; \omega)$. Это позволяет сформулировать алгоритм вычисления эффективных характеристик, общий для теорий обоого типа.

Он состоит в следующем. Разыскивается функция Грина динамической упругой задачи $G(k; \omega)$ для композитной среды. Осуществляются процедуры усреднения и перехода к длинноволновому пределу. Полученная функция Грина $\langle G(k; \omega) \rangle$ описывает макроскопически и статистически однородный материал. Его функция Грина $G^*(k; \omega)$ известна и выражается через эффективные характеристики $a^*(k; \omega)$. Тогда уравнение

$$\langle G(k; \omega) \rangle = G^*(k; \omega) \quad (1.2)$$

позволяет определить $a^*(k; \omega)$.

2. Функция Грина композитной среды. Фазовая геометрия среды описывается случайной функцией $\Theta(x)$, равной единице, если радиус-вектор x попадает внутрь включения, и нулю — в противном случае. Для произвольной константы композита имеем

$$a(x) = a_1(1 - \Theta(x)) + a_2 \Theta(x) = \langle a \rangle + \Delta a \Delta \Theta(x) \\ \langle a \rangle = a_1(1 - c) + a_2 c; \quad \Delta a = a_2 - a_1 \quad (2.1)$$

$$c = \langle \Theta(x) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \Theta(x) dV; \quad \Delta \Theta(x) = \Theta(x) - c$$

Индексы 1 и 2 описывают матрицу и включения соответственно, c — объемная доля включений, V — объем образца, символ Δ используется только как оператор разности.

Уравнение движения композитной среды в смещениях u имеет вид

$$(\Gamma_{0ij} + W_{ij}) u_j = 0 \\ \Gamma_{0ij} = -\langle \rho \rangle \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle c_{ijm} \rangle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} \quad (2.2) \\ W_{ij} = -\Delta \rho \Delta \Theta(x) \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta c_{ijm} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta \Theta(x) \frac{\partial}{\partial x_m}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, ρ — плотность, c_{ijm} — тензор модулей упругости, равный для изотропной среды

$$c_{ijm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{jm} + \mu (\delta_{ij} \delta_{im} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.3)$$

где λ, μ — постоянные Ламе.

Функция Грина $G_{ij}(x, x'; t)$ уравнения (2.2) определится из соотношения

$$(\Gamma_{0ij} + W_{ij}) G_{jl}(x, x'; t) = -\delta_{il} \delta(x - x') \delta(t) \quad (2.4)$$

О граничных условиях к уравнению (2.4) будет сказано ниже.

Переход от координатно-временного представления $(x; t)$ к частотно-волновому $(k; \omega)$ осуществим по формулам

$$f(k; \omega) = \int_V \int f(x; t) \exp[-i(kx - \omega t)] dV dt \quad (2.5)$$

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{V} \sum_k f(k; \omega) \exp[i(kx - \omega t)] d\omega$$

поскольку будут рассматриваться среды на основе периодической структуры. Уравнение (2.4) приводит к следующему интегральному уравнению для функции Грина:

$$G(k, k'; \omega) = V G_0(k; \omega) \delta_{kk'} + \frac{1}{V} \sum_{k_1} G_0(k; \omega) W(k, k_1; \omega) G(k_1, k'; \omega) \quad (2.6)$$

Здесь $V G_0(k; \omega) \delta_{kk'}$ — функция Грина динамической задачи теории упругости для однородной среды, характеризующейся физическими константами $\langle a \rangle$, определяемыми по правилу смесей (второе соотношение (2.1)). Выражение для $G_0(k; \omega)$ получается из уравнения

$$G_{0ij}(k; \omega) G_{0jl}(k; \omega) = -\delta_{il} \quad (2.7)$$

При этом

$$\begin{aligned} G_{0ij}(k; \omega) &= (\langle \mu \rangle k^2 - \langle \rho \rangle \omega^2) \delta_{ij} + \langle \lambda + \mu \rangle k_i k_j \\ G_{0ij}(k; \omega) &= (\langle \mu \rangle k^2 - \langle \rho \rangle \omega^2)^{-1} (\delta_{ij} - \Pi(k; \omega) n_i n_j) \\ \Pi(k; \omega) &= \frac{\langle \lambda + \mu \rangle k^2}{\langle \lambda + 2\mu \rangle k^2 - \langle \rho \rangle \omega^2}, \quad n_i = \frac{k_i}{k} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тензор

$$\begin{aligned} W_{ij}(k, k'; \omega) &= (\Delta \rho \omega^2 \delta_{ij} - \Delta c_{ijlm} k_l k'_m) \Delta \Theta(k - k') = \\ &= W'_{ij}(k, k'; \omega) \Delta \Theta(k - k') \end{aligned} \quad (2.9)$$

можно назвать тензором возмущения, поскольку он содержит разности констант Δa и информацию о форме и взаимном расположении включений, заключенную в $\Delta \Theta(k - k')$.

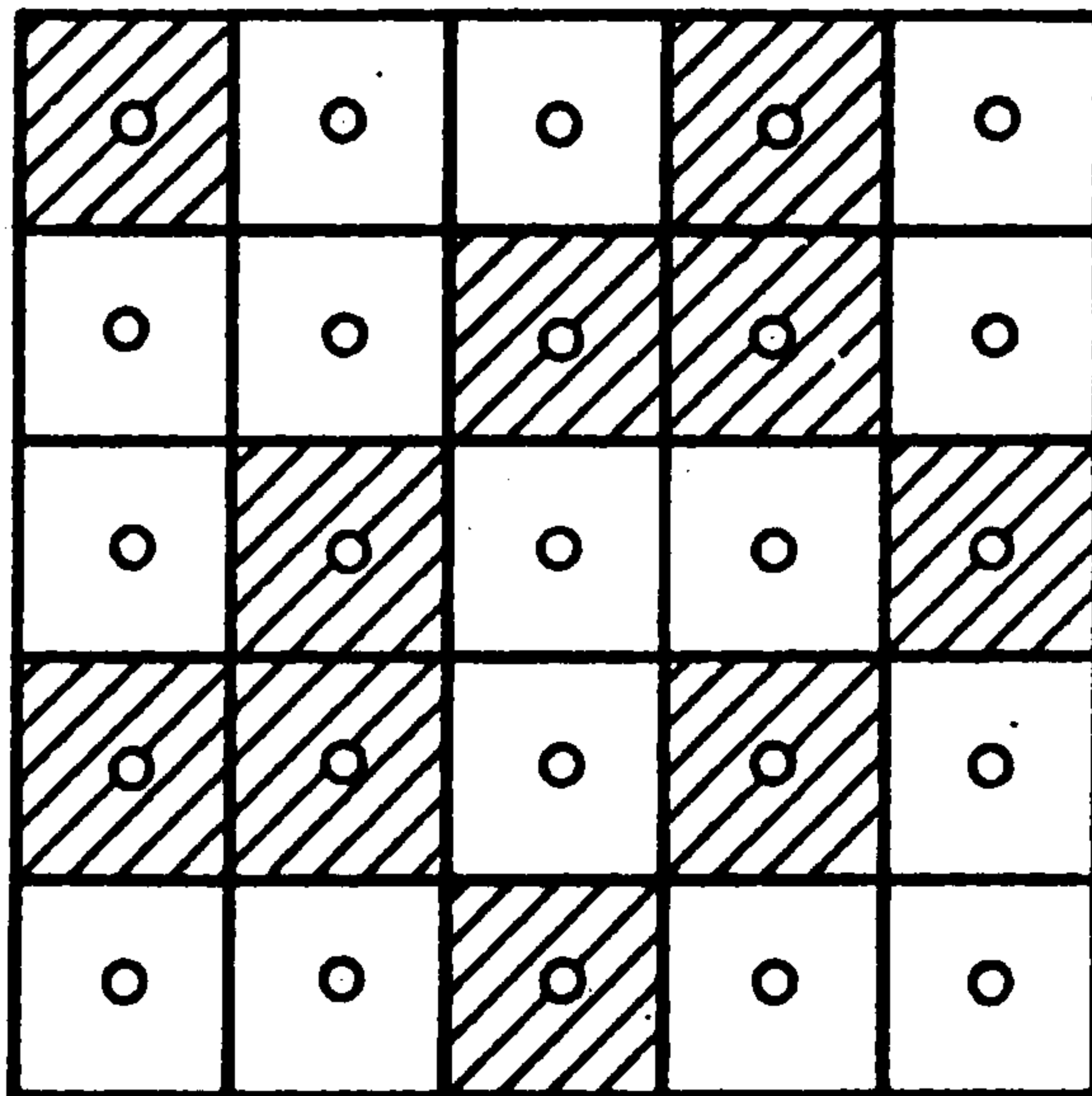
Уравнение (2.6) называют уравнением типа Дайсона, а его решение, полученное итерациями, имеет вид

$$\begin{aligned} G(k, k'; \omega) &= V G_0(k; \omega) \delta_{kk'} + G_0(k; \omega) W(k, k'; \omega) G_0(k'; \omega) + \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{k_1} G_0(k; \omega) W(k, k_1; \omega) G_0(k_1, \omega) W(k_1, k'; \omega) G_0(k'; \omega) + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Модель композитного материала. Усреднение функции Грина. До сих пор рассмотрение велось в рамках локальной теории упругости. Нелокальность появляется в теории на стадии усреднения ряда (2.10) [11].

Последовательная нелокальная теория должна содержать характерные масштабные параметры длины, малые со сравнением с характерными размерами тела [10]. С другой стороны, в теории допускается рассмотрение длин волн, соизмеримых с масштабным параметром, которым может быть характерный размер включения. Расстояния, меньшие масштабного параметра, из рассмотрения исключаются. Таким образом, теория должна быть, с одной стороны, континуальной, а с другой стороны, иметь "решеточный" характер. Построить подобную теорию можно на основе понятия квазиконтинуума [10].

Модель композитного материала, где реализована идея квазиконтинуума, строится следующим образом. Пусть R_0 – средний размер включения. Пусть имеется N кубов объемом $v_0 = R_0^3$, причем n кубов сделаны из материала включения, а остальные $N-n$ кубов – из материала матрицы. Подобно тому как кристалл строится из элементарных ячеек, построим композитную среду из заштрихованных и незаштрихованных кубов, располагая их случайным образом. В результате получится одна из реализаций стохастической среды на периодической решетке, которую поясняет изображенная на фиг. 1 двумерная пространственная



Фиг. 1

решетка из квадратов (заштрихованные квадраты представляют включения, а незаштрихованные матрицу). Узлы решетки, отмеченные светлыми точками, находятся из соотношения

$$\mathbf{R} = m_i \mathbf{R}_{0i} \quad (3.1)$$

где m_i – целые числа, а \mathbf{R}_{0i} – вектор вдоль декартовой оси i , имеющий длину R_0 .

Смысл идеи квазиконтинуума заключается в установлении взаимнооднозначного соответствия между функциями дискретного аргумента и некоторым классом непрерывных функций. Это соответствие осуществимо [10], если непрерывные функции можно представить как суперпозицию длинных волн, характеризующихся волновыми векторами \mathbf{k} , лежащими в интервале

$$-\pi/R_0 \leq k_i \leq \pi/R_0 \quad (3.2)$$

В физике кристаллов область (3.2) называется первой зоной Бриллюэна обратной решетки кристалла. Сохраним это название в дальнейшем, полагая, что это не приведет к недоразумениям. Очевидно, использование волн из интервала (3.2) означает исключение из рассмотрения коротких волн с длинами $\lambda < 2R_0$.

Еще одно обстоятельство требует пояснения. В макромасштабе композит является статистически однородным. Последнее означает, что моменты разного порядка случайных полей композита не зависят от абсолютных значений координат, но зависят от их разности. Например, $\langle a(x_1)a(x_2) \rangle = f(x_1 - x_2)$. Для образца конечных размеров это условие нарушается в узком пограничном слое. Чтобы избежать влияния узкого поверхностного слоя, примем так называемые циклические граничные условия [12]. При этих условиях переход от $(x; t)$ -пред-

ставления к $(\mathbf{k}; \omega)$ -представлению и обратно осуществляется по формулам (2.5), при этом вектор \mathbf{k} лежит в области (3.2).

Усреднение ряда (2.10) проводится на решетке (3.1). Введем случайные числа $\eta(\mathbf{R}_\alpha)$, равные единице, если центр тяжести включения расположен в узле решетки \mathbf{R}_α , и нулю в противном случае. Тогда, описывая форму изолированного включения, находящегося в \mathbf{R}_α , детерминированной функцией $\Theta_0(\mathbf{x}-\mathbf{R}_\alpha)$, найдем

$$\Delta \Theta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \Theta_0(\mathbf{x}-\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\Delta \Theta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \sum_{\alpha=1}^N \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \Theta_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \exp[-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \mathbf{R}_\alpha] \quad (3.3)$$

$$\Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) = \eta(\mathbf{R}_\alpha) - \langle \eta(\mathbf{R}_\alpha) \rangle$$

До сих пор теория строилась как с учетом пространственной, так и частотной дисперсии. Отметим, что пространственная дисперсия может быть обусловлена либо микроструктурой среды (физическая нелокальность), либо конечным размером неоднородности (геометрическая нелокальность) [10]. На этом этапе исключим пространственную дисперсию, связанную с конечным размером включения, для чего, считая включения "точечными", положим

$$\Theta(\mathbf{x}-\mathbf{R}_\alpha) = v_0 \delta(\mathbf{x}-\mathbf{R}_\alpha); \quad \Theta_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}'=0) = v_0$$

Усредним (2.10) по ансамблю систем, каждая из которых представляет собой одну из реализаций стохастической среды на решетке (3.1), подобную изображенной на фиг. 1. Все системы ансамбля равновероятны. Тогда

$$\langle \eta(\mathbf{R}_\alpha) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \eta(\mathbf{R}_\alpha) = \frac{n}{N} = \frac{n v_0}{N v_0} = c$$

Как видно из структуры ряда (2.10), усреднению подвергаются произведения типа $\Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \Delta \eta(\mathbf{R}_\beta) \dots \Delta \eta(\mathbf{R}_\gamma)$. Нулевой член ряда этих чисел не содержит. Первый член ряда после усреднения исчезает, ибо $\langle \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \rangle = 0$. При определении $\langle \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \Delta \eta(\mathbf{R}_\beta) \rangle$ во втором члене нужно учесть, совпадают ли между собой \mathbf{R}_α и \mathbf{R}_β или нет. Если нет, то в силу статистической независимости

$$\langle \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \Delta \eta(\mathbf{R}_\beta) \rangle (1-\delta_{\alpha\beta}) = \langle \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \rangle \langle \Delta \eta(\mathbf{R}_\beta) \rangle (1-\delta_{\alpha\beta}) = 0$$

Велика, то

$$\langle \Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha) \Delta \eta(\mathbf{R}_\beta) \rangle \delta_{\alpha\beta} = \langle (\Delta \eta(\mathbf{R}_\alpha))^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\eta(\mathbf{R}_\alpha) - c)^2 = c(1-c)$$

При усреднении n -го члена ряда приходится принимать во внимание все случаи разбиения множества из n точек на всевозможные подмножества. В пределах каждого подмножества, состоящего из m точек, все аргументы \mathbf{R}_{α_i} ($i = 1, 2, \dots, m$) совпадают. Соответствующие вычисления, позволяющие провести аккуратное удержание всех членов ряда (2.10) с учетом того, что каждый из них при усреднении распадается на некоторое число членов, можно осуществить на основе диаграммной техники [13].

Анализ показывает, что некоторый класс диаграмм, характеризующихся пересечением корреляционных линий, описывается аналитическими выражениями,

содержащими многочлены по степеням волнового вектора k даже в пределе "точечных" включений. Тогда эти диаграммы описывают вклад пространственной дисперсии, обусловленной микроструктурой среды. Исключая эти диаграммы из рассмотрения, воспользуемся результатами суммирования бесконечной подпоследовательности всех диаграмм без пересечения корреляционных линий [13]. Отвечающая этой подпоследовательности функция Грина имеет вид $V \langle G(k; \omega) \rangle \delta_{kk'}$, где $\langle G(k; \omega) \rangle$ — решение алгебраического уравнения

$$\langle G(k; \omega) \rangle = G_0(k; \omega) + G_0(k; \omega) R(k; \omega) \langle G(k; \omega) \rangle$$

$$R(k; \omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n W_n(k, k; \omega) \quad (3.4)$$

$$W_n(k, k_n; \omega) = \left(\frac{v_0}{V}\right)^{n-1} \sum_{k_1 \dots k_{n-1}} W'(k, k_1; \omega) G_0(k_1; \omega) W'(k_1, k_2; \omega) \dots$$

$$\dots G_0(k_{n-1}; \omega) W'(k_{n-1}, k_n; \omega)$$

причем тензор $W'(k, k'; \omega)$ определяется формулой (2.9). Величины χ_n представляют собой кумулянты n -го порядка случайной величины, принимающей два значения: $1-c$ с вероятностью c и $-c$ с вероятностью $1-c$. Кумулянты χ_n таковы [14]:

$$\chi_n = \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^{s-1}}{s} C_{2s-2}^{s-1} C_{n-2}^{2s-2} c^s (1-c)^s (1-2c)^{n-2s} \quad (3.5)$$

и имеют производящую функцию

$$\chi(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n t^n = -\frac{1}{2} (1 - \psi t - (1 - 2\psi t + t^2)^{1/2}), \quad \psi = 1 - 2c \quad (3.6)$$

4. Определение эффективных характеристик. Используя (1.2) и то обстоятельство, что для однородной среды функции $G_0(k; \omega)$ и $\Gamma_0(k; \omega)$ связаны уравнением (2.7), перепишем уравнение (3.4) в виде

$$\Gamma^*(k; \omega) = \Gamma_0(k; \omega) + R(k; \omega) \quad (4.1)$$

Функция $\Gamma_0(k; \omega)$ определяется первым уравнением (2.8), а $\Gamma^*(k; \omega)$ тем же уравнением, в котором, однако, вместо определяемых по правилу смесей характеристик $\langle a \rangle$ стоят $a^*(k; \omega)$. Таким образом, задача сводится к вычислению тензора $R(k; \omega)$.

Тензоры W_n удовлетворяют рекуррентному уравнению с начальным условием

$$W_{n+1}(k, k_{n+1}; \omega) = \frac{v_0}{V} \sum_{k_n} W_n(k, k_n; \omega) G_0(k_n; \omega) W'(k_n, k_{n+1}; \omega) \quad (4.2)$$

$$W_1(k, k_1; \omega) = W'(k, k_1; \omega) \quad (4.3)$$

Обозначая

$$C_{ijklm} = -\Delta c_{ijklm} = 3KV_{ijklm} + 2MD_{ijklm} \quad (4.4)$$

$$K = -\Delta \lambda - \frac{2}{3} \Delta \mu, \quad M = -\Delta \mu$$

где V_{ijklm} и D_{ijklm} — объемная и девиаторная составляющие единичного тензора чет-

вертого ранга соответственно, запишем (2.9) в виде

$$W'_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega) = P \omega^2 \delta_{ij} + C_{ijlm} k_l k'_m, \quad P = -\Delta \rho \quad (4.5)$$

Предположим, что

$$W_{ij}^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_n; \omega) = P_n \omega^2 \delta_{ij} + C_{ijlm}^{(n)} k_l k_{n,m} \quad (4.6)$$

$$C_{ijlm}^{(n)} = 3 K_n V_{ijlm} + 2 M_n D_{ijlm} \quad (4.7)$$

и докажем это представление по индукции. Очевидно, что при $n = 1$ формулы верны и $P_1 = P$, $K_1 = K$, $M_1 = M$. Подставим в (4.2) выражения (4.5), (4.6) и второе соотношение (2.8) и заменим сумму в (4.2) интегралом по правилу [12]

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \dots \rightarrow \int \dots \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}$$

где интегрирование ведется по первой зоне Бриллюэна (3.2), имеющей объем $(2\pi)^3/v_0$. Это интегрирование заменим интегрированием по сфере равновеликого объема $4\pi\tau_0^3/3$ (модель квазиконтинуума Дебая, применимая для изотропных сред [10]). Возникающие при этом интегралы существуют в смысле главного значения. Интегрируя, придем к формулам (4.6), (4.7) при замене n на $n+1$, причем

$$P_{n+1} = \alpha P_n, \quad \alpha = (P/\langle \rho \rangle) (2B(\langle z_t \rangle) + B(\langle z_l \rangle))$$

$$K_{n+1} = \beta K_n, \quad \beta = (K/\langle \lambda + 2\mu \rangle) (1 + 3B(\langle z_l \rangle))$$

$$M_{n+1} = \gamma M_n, \quad \gamma = \frac{2M}{5\langle \mu \rangle} \left(\frac{\langle 3\lambda + 8\mu \rangle}{\langle \lambda + 2\mu \rangle} + 3B(\langle z_t \rangle) + \frac{2\langle \mu \rangle}{\langle \lambda + 2\mu \rangle} B(\langle z_l \rangle) \right) \quad (4.8)$$

$$B(z) = z^2 \left(1 + \frac{1}{2} z \ln \frac{1-z}{1+z} \right)$$

$$\langle z_t \rangle = \frac{\omega}{\tau_0} \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\langle \mu \rangle} \right)^{1/2}, \quad \langle z_l \rangle = \frac{\omega}{\tau_0} \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\langle \lambda + 2\mu \rangle} \right)^{1/2}, \quad \tau_0 = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{2\pi}{R_0}$$

Равенства (4.8) дают рекуррентные соотношения для входящих в (4.6), (4.7) величин, причем

$$P_n = P \alpha^{n-1}, \quad K_n = K \beta^{n-1}, \quad M_n = M \gamma^{n-1} \quad (4.9)$$

Вычисляя функцию $W_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}_n; \omega)$ из (3.4) при помощи (4.6), (3.5) и (3.6), найдем

$$R_{ij}(\mathbf{k}; \omega) = (Mk^2 \chi(\gamma)/\gamma + P \omega^2 \chi(\alpha)/\alpha) \delta_{ij} + (K \chi(\beta)/\beta + 1/3 M \chi(\gamma)/\gamma) k_i k_j \quad (4.10)$$

Наконец, при помощи (4.1), (4.10) и (2.8) получим систему для определения эффективных характеристик

$$\mu^* = \langle \mu \rangle - M \chi(\gamma)/\gamma$$

$$\lambda^* + \mu^* = \langle \lambda + \mu \rangle - K \chi(\beta)/\beta - 1/3 M \chi(\gamma)/\gamma \quad (4.11)$$

$$\rho^* = \langle \rho \rangle + P \chi(\alpha)/\alpha$$

Эффективные характеристики определяются [13] из систем типа (4.11) при помощи итерационной процедуры, которая будет использована ниже при численном решении. Сначала в выражения типа $\chi(a)/a$ подставляют средние характеристики $\langle a \rangle$ и вычисляют характеристики первого приближения. Затем их снова подставляют в $\chi(a)/a$ вместо $\langle a \rangle$ и получают характеристики вто-

рого приближения. Затем процесс повторяется. На каком-то, вообще говоря, бесконечном шаге выходные характеристики перестают отличаться от входных. Они и принимаются за истинные значения эффективных характеристик. При этих условиях система (4.11) имеет вид

$$1 + 3 B(z_i^*) = (K^* + \frac{4}{3} \mu^*) \left(\frac{c}{K^* - K_1} + \frac{1-c}{K^* - K_2} \right)$$

$$1 + 3 B(z_i^*) + \frac{2 \mu^*}{3 K^* + 4 \mu^*} (1 + 3 B(z_i^*)) = \frac{5}{2} \mu^* \left(\frac{c}{\mu^* - \mu_1} + \frac{1-c}{\mu^* - \mu_2} \right) \quad (4.12)$$

$$2 B(z_i^*) + B(z_i^*) = -\rho^* \left(\frac{c}{\rho^* - \rho_1} + \frac{1-c}{\rho^* - \rho_2} \right)$$

(K — объемный модуль упругости).

5. Обсуждение результатов. Фигурирующие в системе (4.12) функции $B(z^*)$ зависят только от частоты. Последнее означает, что эффективные характеристики $a^*(k; \omega)$, полученные как решение уравнений (4.12), являются функциями частоты и описывают частотную дисперсию при распространении упругих волн в композите.

Частотная дисперсия возникает в среде при наличии внутренних процессов, время протекания которых сравнимо с периодом изменения внешнего поля. В области этих частот отклик системы на изменение внешнего поля запаздывает во времени, а поле в среде в данный момент начинает зависеть от приложенного поля в предшествующие моменты времени. Из выражения для $\langle z \rangle$ в (4.8) видно, что величины z_i^* и z_i^* имеют вид $z^* = \omega t_0$, где $t_0 \simeq R_0 / (\mu^* / \rho^*)^{1/2}$ или $t_0 \simeq R_0 / ((\lambda^* + 2 \mu^*) / \rho^*)^{1/2}$ представляют собой времена, за которые упругие волны проходят расстояние R_0 .

Возникает вопрос о механизме появления нелокальных инерционных характеристик. Одним из источников нелокальности может служить [10] известная в гидродинамике концепция "присоединенных масс" [15].

Положив в (4.12) $\omega = 0$, найдем систему для статических эффективных характеристик

$$(K_0 - K_1)(K_0 - K_2) = (K_0 + \frac{4}{3} \mu_0) (K_0 - \langle K \rangle)$$

$$(K_0 + 2 \mu_0) (\mu_0 - \mu_1) (\mu_0 - \mu_2) = \frac{5}{2} \mu_0 (K_0 + \frac{4}{3} \mu_0) (\mu_0 - \langle \mu \rangle)$$

$$\rho_0 = \langle \rho \rangle \quad (5.1)$$

Уравнения (5.1) идентичны уравнениям метода самосогласования [16].

В пределе слабой дисперсии, когда

$$a^*(k; \omega) = a_0 + a_2' \omega^2$$

из (4.12) и (5.1) найдем

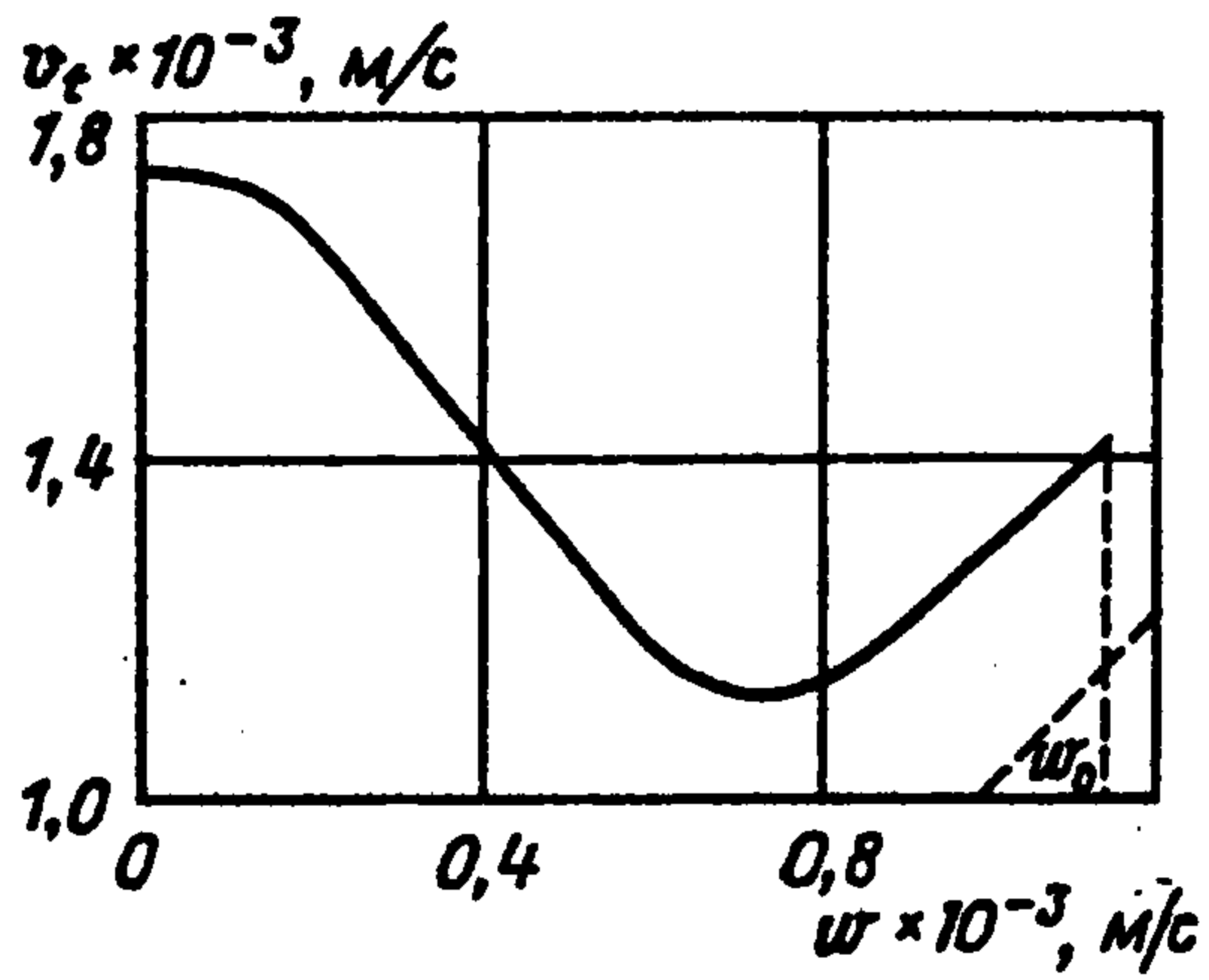
$$3 \rho_0 / \tau_0^2 = K_2' (1 - c A_1^2 - (1-c) A_2^2) + \frac{4}{3} \mu_2'$$

$$3 \rho_0 / \tau_0^2 = \frac{2}{3} (c B_1^2 + (1-c) B_2^2) K_2' + (1 - \frac{5}{2} c C_1^2 - \frac{5}{2} (1-c) C_2^2) \mu_2' \quad (5.2)$$

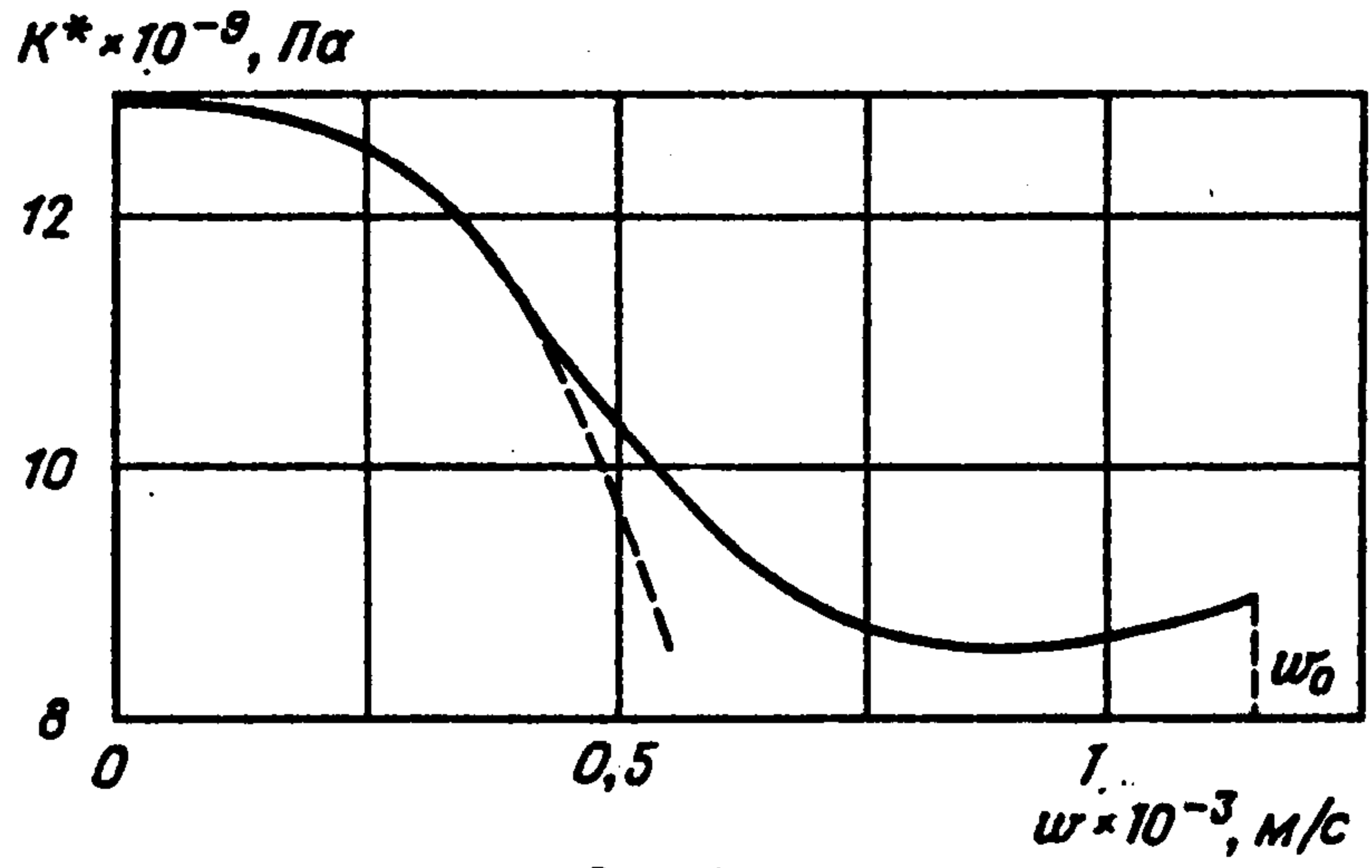
$$\rho_2' = \frac{c(1-c)(\rho_2 - \rho_1)^2}{\tau_0^2} \frac{2 K_0 + \frac{11}{3} \mu_0}{\mu_0 (K_0 + \frac{4}{3} \mu_0)}$$

$$A_q = \frac{K_0 + \frac{4}{3} \mu_0}{K_0 - K_q}, \quad B_q = \frac{\mu_0}{K_0 - K_q}, \quad C_q = \frac{\mu_0}{\mu_0 - \mu_q}, \quad q = 1, 2$$

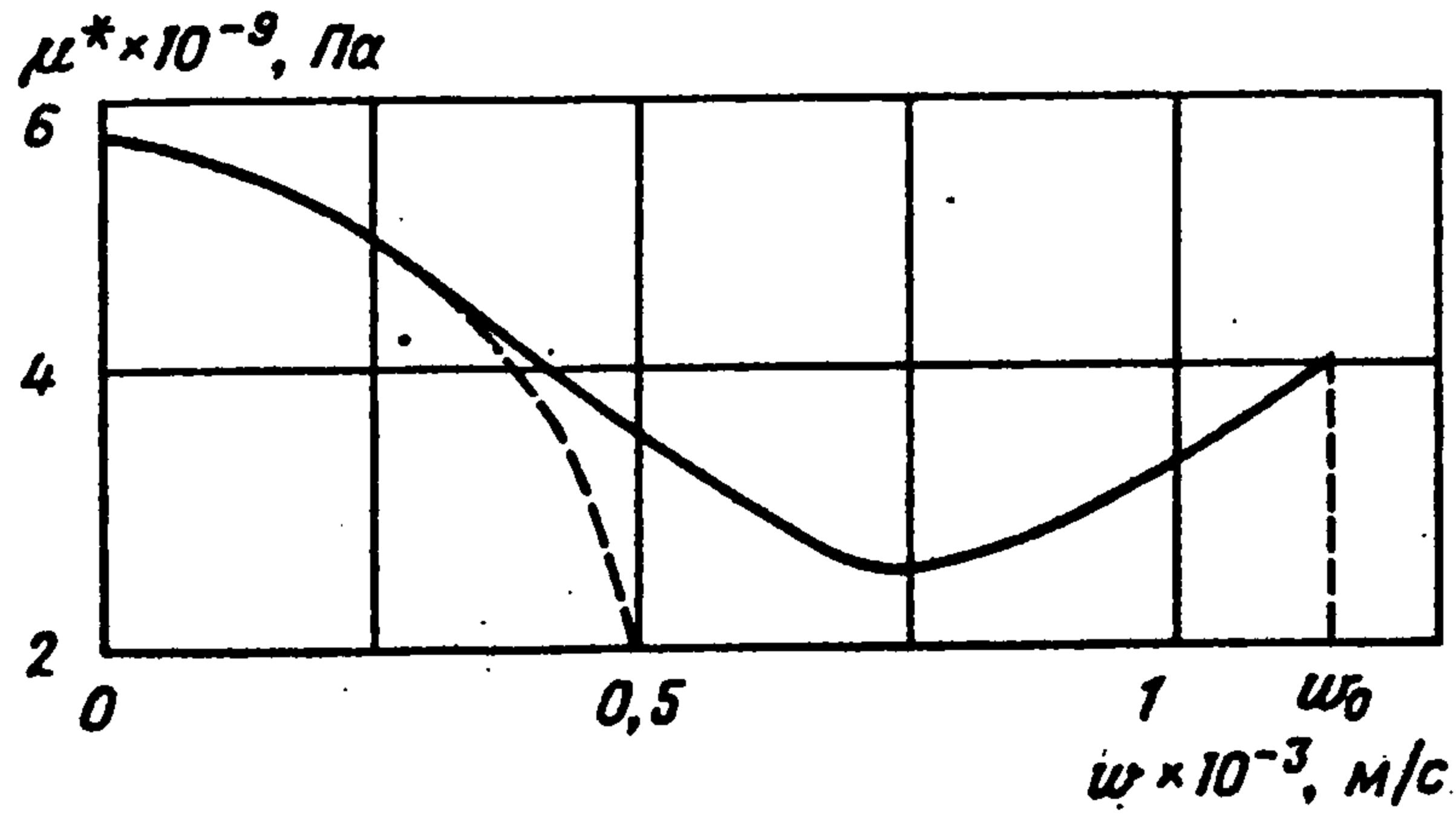
Для численного решения лучше воспользоваться системой (4.11) и итерационной процедурой, описанной выше. В качестве исходных использовались постоянные для стеклоэпоксид-



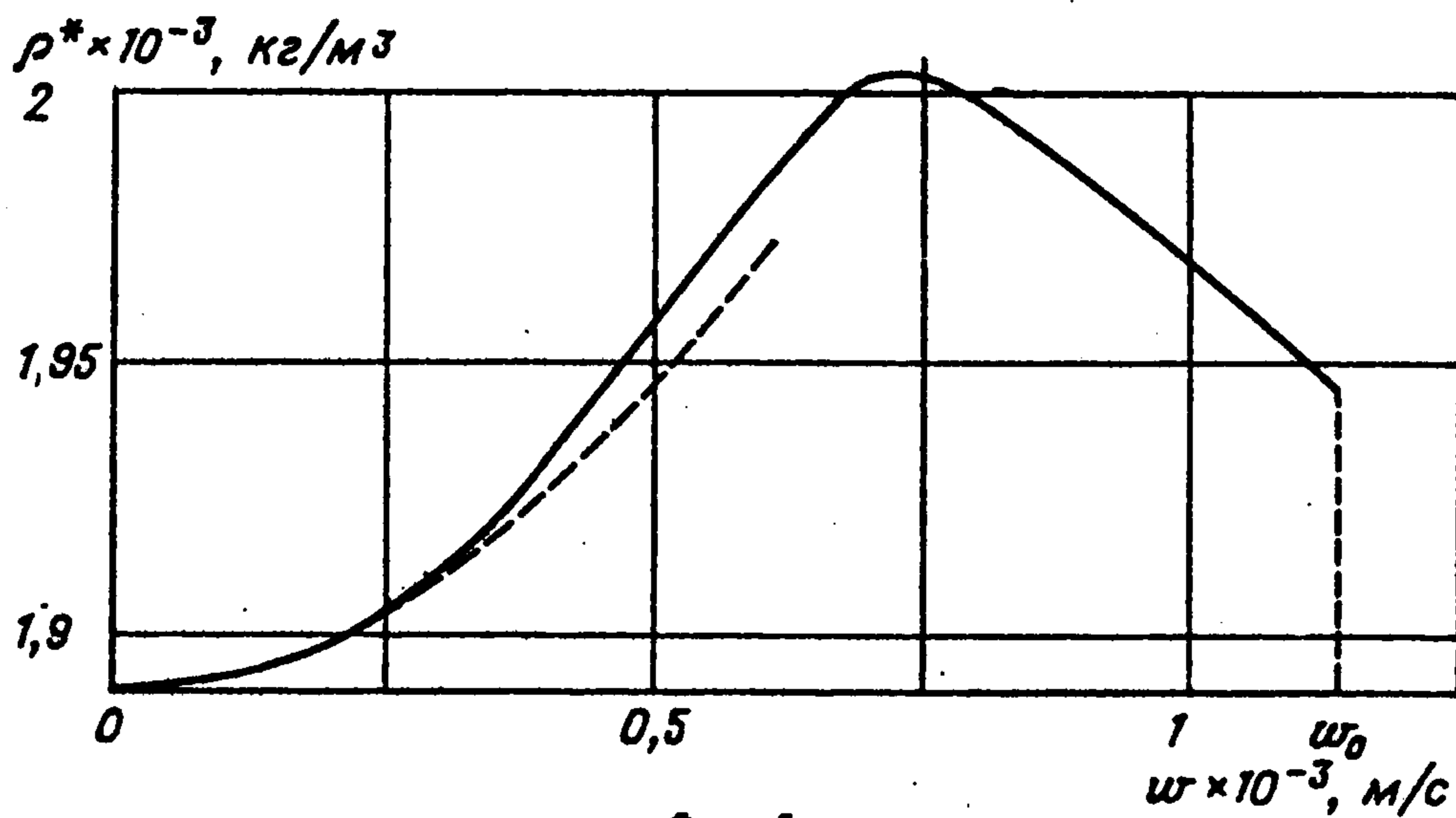
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ного материала: $K_1 = 4,17 \cdot 10^9$ Па, $\mu_1 = 0,9 \cdot 10^9$ Па, $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³; $K_2 = 73,5 \cdot 10^9$ Па, $\mu_2 = 29,4 \cdot 10^9$ Па, $\rho_2 = 2,58 \cdot 10^3$ кг/м³.

При численном решении итерационный процесс прекращался, когда относительная разница между входом и выходом становилась меньше 0,1%. Если за 10^3 итераций требуемая точность не достигалась, то полагали, что решения нет. Результаты расчета представлены на фиг. 2–5 для $c = 0,5$. Аналогичные в качественном отношении результаты имеют место и для других значений c .

Фиг. 2 показывает зависимость скорости распространения поперечных упругих волн $v_t = (\mu^*/\rho^*)^{1/2}$ от параметра $w = \omega/\tau_0 = (4\pi/3)^{1/3} \nu R_0$, где ν – частота волны. Используя условие $\lambda > 2R_0$, можно показать, что $z_f < \frac{1}{2}(4\pi/3)^{1/3} \approx 0,806$, $z_l < 0,806$, т.е. при одинаковых масштабах вдоль координатных осей зависимость $v_t = v_t(w)$ должна лежать выше биссектрисы координатного угла, что и демонстрирует фиг. 2. То же справедливо и для продольных волн.

Фиг. 3–5 представляют зависимости динамических эффективных модулей упругости K^* и μ^* и эффективной плотности ρ^* от параметра w . Штриховые линии отвечают случаю слабой дисперсии. Отметим наличие граничного значения $w_0 = 1148$ м/с, выше которого решения не найдено. Для грубодисперсных сред (τ_0 велико) значительная дисперсия волн

обнаруживается в области более низких частот, чем для мелкодисперсных сред. Наконец, численный анализ показал, что представленные на фиг. 2–5 зависимости можно описать полиномами от ω^2 вплоть до $\omega^{1.0}$ или $\omega^{1.2}$. Последнее означает, что результаты получены в приближении сильной дисперсии.

Результаты расчета, изображенные на фиг. 2–5, могут быть подвергнуты экспериментальной проверке. При этом нужно помнить, что в результаты эксперимента одновременно вносят вклад пространственная и частотная дисперсии, а также дисперсия, обусловленная вязкоупругими эффектами. Поэтому следует сначала оценить относительную долю каждого из этих вкладов в каждом конкретном случае. Что касается сравнения с известными теоретическими результатами, то в пределе слабой дисперсии, в котором выполнено большинство работ, имеет место качественное согласие. Например, зависимость фазовой скорости продольных волн от частоты для релеевского рассеяния волн на системе хаотически расположенных включений имеет такой же характер [17], как и в рассматриваемом случае. Так же ведут себя при низких частотах аналогичные зависимости для регулярного пластинчатого композита, для которого решение может быть получено точно.

В пределе слабой дисперсии можно найти уравнение нелокальной теории упругости, которому в макромасштабе подчиняется композит. Это уравнение в смещениях имеет вид

$$\rho_2' \partial^4 u / \partial t^4 + I \partial^2 u / \partial t^2 - \mu_0 \nabla^2 u - (\lambda_0 + \mu_0) \text{grad div } u = q$$

$$I = \rho_0 - (\mu_2' \nabla^2 + (\lambda_2' + \mu_2') \text{grad div}) \quad (5.3)$$

(q — плотность внешних сил, а I — оператор инерционных свойств среды).

Предложенные модель композитной среды и алгоритм расчета эффективных характеристик можно использовать для полей произвольной физической природы.

Автор благодарит Ю.И. Карковского за обсуждения и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахенбах Дж.Д. Колебания и волны в направленно армированных композитах. // Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. Т. 2. С. 354–400.
2. Чигарев А.В. Вычисление динамического тензора Грина статистически неоднородной упругой среды. // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 916–922.
3. Канаун С.К., Левин В.М. О построении эффективного волнового оператора для среды с изолированными неоднородностями. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 67–76.
4. Канаун С.К., Левин В.М. Эффективный волновой оператор для среды, армированной короткими осесимметричными волокнами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 121–130.
5. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Теория распространения упругих волн в неоднородных средах. // Механика композит. материалов. 1989. № 5. С. 821–832.
6. Буряченко В.А., Партон В.Э. Эффективный оператор Гельмгольца матричных композитов. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 55–63.
7. McCoy J.J. On the dynamics response of disordered composites. // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1973. V. 40. N 2. P. 511–517; перев. Прикл. мех. 1972. Т. 40. № 2. С. 197–205.
8. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. // Arch. Ration. Mech. Analysis. 1964. V. 16. N 1. P. 51–78; перев. Механика. 1964. № 4 (86). С. 129–160.
9. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. // Arch. Ration. Mech. Analysis. 1964. V. 17. N 2. P. 85–112.
10. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
11. Люмакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с.
12. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1966. 416 с.
13. Шаталов Г.А. Эффективные характеристики изотропных композитов как задача многих тел. // Механика композит. материалов. 1985. № 1. С. 43–52.
14. Шаталов Г.А., Карковский Ю.И., Чебан В.Г. К определению кумулянтных функций высших порядков в механике случайно-неоднородных сред. // Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1983. № 2. С. 15–21.
15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
16. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. N 4. P. 213–222.
17. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.