

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. А.Г. Куликовский, Е.И. Свешгикова

ВОЛНЫ РИМАНА В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ МАЛОЙ АНИЗОТРОПИИ

Рассматриваются волны Римана в произвольной упругой среде, обладающей в плоскости фронта волны малой анизотропией произвольного вида. Изменения величин в волне не предполагаются малыми. Главное внимание уделяется ситуациям, когда наличие малой анизотропии приводит к качественным изменениям взаимных зависимостей величин в волнах и определяет их опрокидывание.

1. Рассмотрим плоские одномерные волны, распространяющиеся в упругой среде. Деформацию и скорость среды будем считать функциями времени t и координаты x лагранжевой декартовой прямоугольной системы координат $x_1, x_2, x_3 = x$, связанной с некоторым начальным состоянием.

Для описания деформаций в одномерном процессе будем использовать компоненты тензора градиентов перемещений $\partial w_i / \partial x_k$, $i, k = 1, 2, 3$ (w_i – вектор перемещений), причем в плоской волне изменяются только $\partial w_i / \partial x \equiv u_i(x, t)$, а остальные компоненты не меняются, $\partial w_i / \partial x_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2$. Система уравнений в лагранжевых переменных для рассматриваемого процесса имеет вид [1]

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Здесь ρ_0 – плотность в начальном состоянии $\Phi(u_i, S)$ – упругий потенциал среды (внутренняя энергия, приходящаяся на единицу лагранжевого объема), S – энтропия единицы массы. Ниже всюду предполагается, что среда однородна и Φ не зависит непосредственно от лагранжевой переменной x .

Для системы (1.1) будем изучать волны Римана (простые волны), т.е. решения вида $u_i = u_i(\varphi(x, t))$, $v_i = v_i(\varphi(x, t))$, $S = \text{const}$, где $\varphi(x, t)$ – некоторая заранее неизвестная функция. Это переводит (1.1) в систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\Phi_{ij} - \rho_0 c^2 \delta_{ij}) \frac{du_i}{d\varphi} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Система (1.2) имеет нетривиальные решения, если $\det \|\Phi_{ij} - \rho_0 c^2 \delta_{ij}\| = 0$, т.е., если $\rho_0 c^2 = \lambda$ – собственные значения симметричной матрицы $\|\Phi_{ij}\|$, которые предполагаются положительными, что необходимо для устойчивости среды. Три собственных значения λ_k определяют характеристические скорости c_k , а собст-

венные векторы $du_i/d\phi$ дают в каждой точке пространства u_i направления, касательные к трем взаимно ортогональным семействам интегральных кривых системы (1.2) для простых волн.

Поскольку $c_k(u_i)$ представляет скорость распространения "фазы" волны, то изменение $\lambda = \rho_0 c^2$ вдоль интегральной кривой определяет изменение формы профиля волны со временем. В точках экстремума λ на интегральной кривой меняется направление изменения деформации профиля волны со временем (его укрупнение сменяется на выполаживание или наоборот). Увеличение крутизны профиля может привести к "опрокидыванию" волны и образованию разрыва.

Задачей данной работы является исследование интегральных кривых системы (1.2) и изменения характеристических скоростей $c_k(u_i)$ вдоль них, в том числе отыскание точек экстремума λ_k . Форма интегральных кривых волн Римана и величины λ_k зависят от вида функции $\Phi(u_k)$, т.е. от свойств среды. Зависимость от энтропии в дальнейшем не указывается, так как в волнах Римана $S = \text{const}$. Если упругая среда изотропна, то компоненты u_1, u_2 , характеризующие деформации сдвига в плоскости фронта волны, входят в упругий потенциал только в виде комбинации $r^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Последнее свойство может иметь место и для некоторых анизотропных сред, которые ведут себя изотропным образом по отношению к сдвигам в плоскости волны, характеризующимся вектором $\Gamma\{u_1, u_2\}$, лежащим в плоскости фронта. Это свойство назовем волновой изотропией. Цель работы – изучение волн в случае малых отклонений от волновой изотропии.

Отметим сначала некоторые общие свойства интегральных кривых волн Римана и поведения характеристических скоростей на них для случая волновой изотропии $\Phi = F(r^2, u_3)$. Так как в пространстве $u_1 u_2 u_3$ функция $F(r^2, u_3)$ симметрична относительно любой из плоскостей, проходящей через ось u_3 , то на этой плоскости оказываются равными нулю нечетные производные по нормали к такой плоскости. Очевидно, что поведение собственных значений и собственных векторов достаточно рассмотреть, например, в точках плоскости $u_1 u_3$. Так как согласно предыдущему $F_{12} = F_{32} = 0$ (здесь и далее принято обозначение $F_{ij} = \partial^2 F / \partial u_i \partial u_j$), то два собственных вектора матрицы F_{ij} лежат в плоскости $u_1 u_3$, а третий нормален к ней. Это означает, что два семейства интегральных кривых представляют собой кривые, лежащие в плоскостях, проходящих через ось u_3 , и соответствуют плоскополяризованным волнам, а третье семейство интегральных кривых представляет собой окружности с центрами на оси u_3 , лежащие в плоскостях $u_3 = \text{const}$.

Из упомянутой симметрии следует также, что $\lambda = \text{const}$ на интегральной кривой последнего семейства, т.е. что соответствующая волна при распространении не изменяет своей формы. Используя терминологию магнитной гидродинамики, будем называть эту волну вращательной волной. Исследование простых волн в случаях волновой изотропии с функциями F некоторых специальных типов проведено в [1–3].

При наличии малой волновой анизотропии упругий потенциал $\Phi(u_i)$ будем представлять в виде изотропной части и малого добавка

$$\Phi = F(r^2, u_3) + gp(u_i) \quad (1.3)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует основной изотропной части ее внутренней энергии. Второе слагаемое характеризует малое отличие среды от

волновой изотропии, причем $g \geq 0$ – малая величина, а $p(u_i)$ – в общем случае – функция произвольного вида. Добавление анизотропии мало изменит поведение интегральных кривых всюду, кроме малых окрестностей тех точек, в которых совпадают два собственных значения матрицы F_{ij} . Одной из таких точек в пространстве u_i всегда является начало координат, где при $g = 0$ совпадают характеристические скорости двух поперечных волн. В зависимости от вида функции F могут появиться и другие точки, обладающие указанным свойством, и даже целые поверхности.

Кроме того, в присутствии анизотропии, даже малой, интегральные кривые квазивращательных волн перестают быть окружностями и, что более важно, соответствующие им характеристические скорости c_θ вдоль них уже не будут постоянными. На интегральных кривых квазивращательных волн будут найдены точки экстремума c_θ . Для этих волн деформация их профиля целиком обусловлена анизотропией ($g \neq 0$), даже если она мала.

2. Исследование нелинейных волн малой интенсивности (вблизи начала координат в пространстве u_i) показало [4, 5], что большее разнообразие и качественно новое поведение вносит анизотропия в поведение квазипоперечных волн. Поэтому можно ожидать, что главные эффекты присутствия анизотропии проявят себя уже на модели несжимаемой упругой среды, где продольная компонента деформации отсутствует ($u_3 = 0$) и соответственно отсутствуют квазипродольные волны. Отсутствие компоненты u_3 позволяет вести дальнейшее исследование на фазовой плоскости $u_1 u_2$.

Упругий потенциал (1.3) для рассматриваемой среды имеет вид

$$\Phi = F(r^2) + gp(u_1, u_2), \quad r^2 = u_1^2 + u_2^2$$

При отсутствии анизотропии ($g = 0$) интегральные кривые на плоскости $u_1 u_2$ представляют два ортогональных семейства: лучей (плоскополяризованные волны) и окружностей (вращательные волны). Их характеристические скорости (собственные значения матрицы F_{ij}) определяются формулами

$$\lambda_r^0 = \frac{d^2 F}{dr^2} = f', \quad \lambda_\theta^0 = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{f}{r}$$

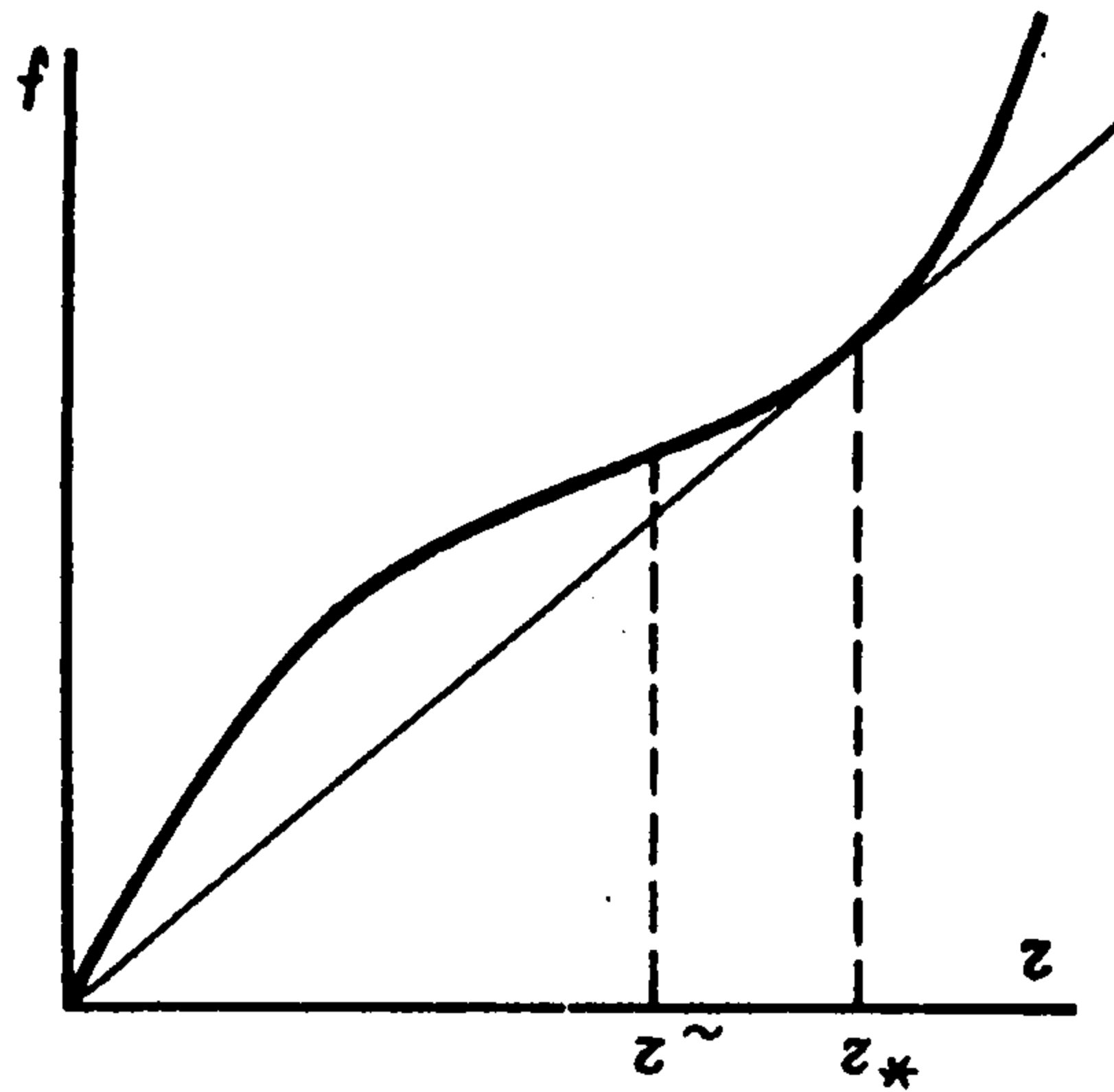
Здесь и далее принято обозначение $dF/dr = f(r)$, r и θ – полярные координаты на плоскости $u_1 u_2$. Функция $f(r)$ представляет зависимость модуля касательного напряжения

$$\sigma_\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \sqrt{(\partial F / \partial u_1)^2 + (\partial F / \partial u_2)^2} = f(r)$$

от модуля сдвиговых деформаций $\epsilon_\tau = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} = r$. Функция $F(r^2)$ – четная функция r , поэтому $f(r)$ – нечетная. Будем полагать, что в окрестности $r = 0$ она разлагается в ряд $f(r) = f'(0)r + \frac{1}{6}f'''(0)r^3 + \dots$

Как уже было сказано, малая анизотропия может привести к качественному изменению поля интегральных кривых в окрестности точек, где совпадают собственные числа матрицы F_{ij} , т.е. точек, где $d^0(r) \equiv \frac{1}{2}(f/r - f') = 0$. Уравнение $d^0 = 0$ всегда имеет решение $r = 0$. Кроме того, у него могут быть и другие решения. Они соответствуют точкам, в которых луч, проведенный из начала координат, касается графика $f(r)$.

Рассмотрим для определенности вид зависимости $f(r)$, изображенный на фиг. 1,



Фиг. 1

когда $f'''(0) < 0$ и имеется один ненулевой корень $r = r_*$ у функции $d^0(r)$, причем будем считать, что $f''(r_*) > 0$. Отметим, что при $r = r^{\sim} < r_*$ на графике функции $f(r)$ имеется точка перегиба, где $f''(r^{\sim}) = 0$. Будем полагать, что других точек перегиба у кривой $f(r)$ нет. В точке r^{\sim} величина $\lambda_r^0 = f'(r)$ имеет минимум. Знак $f''(r)$ характеризует направление выпуклости графика $\sigma_r(\epsilon_r)$. Вид зависимости $f(r)$, подобный изображенному на фиг. 1, встречается у материалов, допускающих большие упругие деформации, а также при активном нагружении многих металлов в области пластичности.

Не потребует больших усложнений рассмотрение волн в материалах с противоположным изменением направления выпуклости или с двумя и большим числом корней у функции $d^0(r)$.

По величинам характеристических скоростей λ_α ($\alpha = 1, 2$) будем различать волны медленные $\lambda = \lambda_1$ и быстрые $\lambda = \lambda_2$, $\lambda_2 > \lambda_1$. Очевидно, при выбранном на фиг. 1 виде функции $f(r)$ при $r < r_*$ радиальные волны являются медленными ($\lambda_r^0 = \lambda_1$), вращательные – быстрыми ($\lambda_\theta^0 = \lambda_2$), при $r > r_*$ наоборот.

Для исследования интегральных кривых и характеристических скоростей при $g \neq 0$ на фазовой плоскости $u_1 u_2$ введем вспомогательную систему координат y_α . Это декартова система с началом координат в заданной точке r, θ , у которой оси направлены по радиусу-вектору и нормали к нему. В этих переменных матрица $\Phi_{\alpha\beta} = \partial^2 \Phi / \partial y_\alpha \partial y_\beta$ имеет вид: $\Phi_{11} = f' + g p_{11}$, $\Phi_{12} = g p_{12}$, $\Phi_{22} = f/r + g p_{22}$, где $p_{\alpha\beta} = \partial^2 p / \partial y_\alpha \partial y_\beta$. Корни характеристического уравнения $|\Phi_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta}| = 0$ дают собственные значения

$$\lambda_{1,2} = f' + d + g p_{11} \mp \sqrt{d^2 + g^2 p_{12}^2}, \quad d = d^0 + \frac{1}{2} g (p_{22} - p_{11}) \quad (2.1)$$

а из системы (1.2) находим собственные векторы

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{d \mp \sqrt{d^2 + g^2 p_{12}^2}}{g p_{12}} \quad (2.2)$$

Направления собственных векторов не определены в точках, где $\lambda_1 = \lambda_2$. Это особые точки, в которых, согласно (2.1), одновременно выполняются два уравнения

$$d(r, \theta) = 0, \quad p_{12} = 0 \quad (2.3)$$

Очевидно, особые точки расположены в областях, где $d^0(r)$ имеет порядок величины, равный g . Это выполнено, в частности, около начала координат.

При исследовании интегральных кривых в окрестности начала координат было показано [4], что имеется пара симметрично расположенных относительно начала координат особых точек, на расстоянии порядка \sqrt{g} от начала координат. Другие особые точки находятся вблизи критической окружности $r = r_*$, где $d^0(r) = -\frac{1}{2}f_*''(r - r_*) + \dots$. Их положение определяется пересечением линии $p_{12} = 0$ с линией

$$r_{**}(\theta) = r_* + g(p_{22} - p_{11}) / f_*'' \quad (2.4)$$

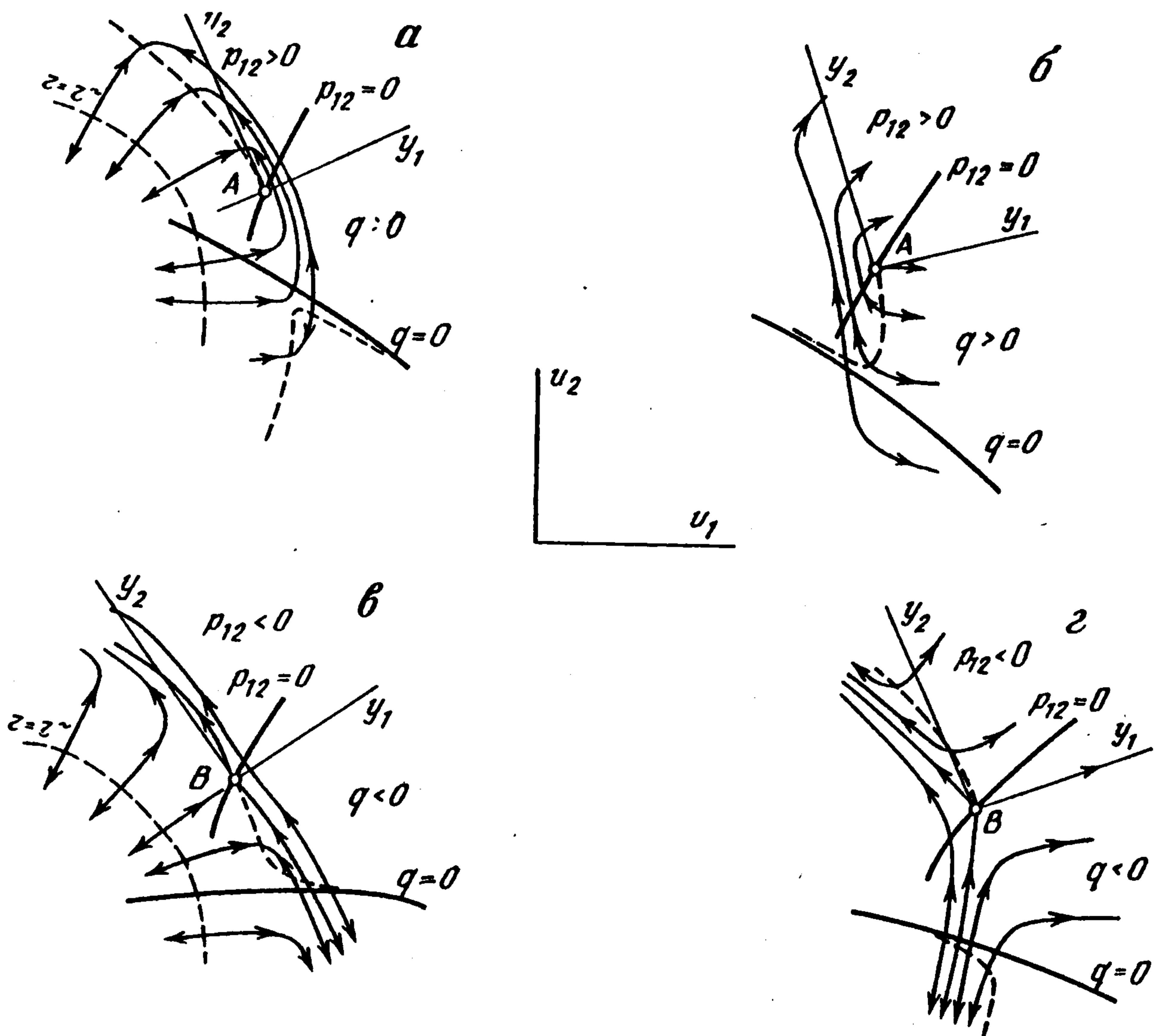
которая, очевидно, близка к критической окружности.

Собственный вектор медленных волн, соответствующих λ_1 (верхний знак в формулах (2.1) и (2.2)), вдали от критической окружности, т.е. при $|d^0| \gg g$, для $r < r_*$ имеет направление, близкое к радиусу-вектору, так как там $dy_2/dy_1 \sim g$ ($\lambda_1 = \lambda_r$ – квазирадиальная волна); при $r > r_*$ для тех же медленных волн $dy_2/dy_1 \sim \sim g^{-1}$ и собственный вектор этого семейства близок направлению оси y_2 , ортогональному радиусу-вектору ($\lambda_1 = \lambda_\theta$ – квазивращательная волна). Таким образом, происходит поворот интегральных кривых медленных волн на угол $\pi/2$, причем этот процесс концентрируется в узком слое $\sim g$ около критической окружности.

Интегральные кривые быстрых волн в каждой точке ортогональны собственным векторам описанного семейства медленных волн и, следовательно, при $g \ll \ll |d^0|$ в области $r < r_*$ являются квазивращательными ($\lambda_2 = \lambda_\theta$), а при $r > r_*$ квазирадиальными ($\lambda_2 = \lambda_r$) и также меняют направление на угол $\pi/2$ в узкой зоне около критической окружности.

Направление поворота линий того и другого семейства определяется функцией dy_2/dy_1 , заданной формулой (2.2). В выражении (2.2) числитель всегда отрицателен для семейства медленных волн и положителен для быстрых. Поэтому при $p_{12} > 0$ интегральные кривые медленных волн в упомянутой узкой зоне при увеличении r поворачивают направо, а при $p_{12} < 0$ – налево с соответствующим изменением направления интегральных кривых быстрых волн. Интегральные кривые медленных волн всюду при $r < r_{**}$ и быстрых волн при $r > r_{**}$ пересекают линии $p_{12} = 0$ вдоль радиуса-вектора ($dy_2/dy_1 = 0$); для медленных волн при $r > r_{**}$ и быстрых при $r < r_{**}$ интегральные линии пересекают $p_{12} = 0$ перпендикулярно радиусу.

Для изучения поведения интегральных кривых вблизи особых точек использовано разложение с точностью до линейных членов функций (2.3), входящих в уравнение (2.2). Для отыскания собственных направлений получилось уравнение третьей степени, которое может иметь одно или три действительные решения в зависимости от знака функции $\partial p_{12}/\partial \theta$. Если в особой точке $\partial p_{12}/\partial \theta > 0$, имеется только одно собственное направление, близкое к радиусу-вектору (под углом $\alpha \approx \approx g \partial p_{12}/\partial r$ к нему), вдоль которого идет квазирадиальная интегральная кривая медленных волн при $r < r_{**}$ и ее продолжает при $r > r_{**}$ интегральная кривая быстрых волн. Если же в особой точке $\partial p_{12}/\partial \theta < 0$, то кроме указанного радиального направления имеются еще два, каждое из которых идет под малым углом наклона к положительному и отрицательному направлению оси y_2 (окружности).



Фиг. 2

Поведение интегральных кривых медленных и быстрых волн изображено на фиг. 2 для случая $\partial p_{12}/\partial \theta > 0$ (а, б) и $\partial p_{12}/\partial \theta < 0$ (в, г).

Как уже было сказано, для изучения деформации профиля волны со временем следует вычислить производные от характеристических скоростей λ_α ($\alpha = 1, 2$) вдоль соответствующих им интегральных кривых. При дифференцировании $\lambda(u_\beta)$ будем пользоваться полярной системой координат r, θ . Как было показано выше, на достаточном удалении от начала координат и критической окружности интегральные кривые мало отличаются от лучей и окружностей.

Для квазирадиальных линий изменение λ будем характеризовать производной

$$\frac{d\lambda_r(r, \theta)}{dr} = \frac{\partial \lambda_r}{\partial r} + \frac{\partial \lambda_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dr}$$

где $d\theta/dr = r^{-1} dy_2/dy_1$ определяется уравнением интегральной кривой (2.2). С ошибкой порядка g^2 имеем

$$\frac{d\lambda_r}{dr} = \frac{\partial \lambda_r}{\partial r} = f''(r) + g \frac{\partial p_{11}}{\partial r} \quad (2.5)$$

Так как согласно сделанному предположению f'' может обратиться в нуль только в точке $r = \tilde{r} < r_*$, то только у медленных квазирадиальных волн на каждой интегральной кривой имеется точка экстремума λ_1 , лежащая на линии, близкой к окружности $r = \tilde{r}$ внутри критической окружности.

Для квазивращательных волн изменение λ будем характеризовать производной

$$\frac{d\lambda_\theta(r, \theta)}{d\theta} = \frac{\partial \lambda_\theta}{\partial r} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial \lambda_\theta}{\partial \theta}$$

Учитывая, что в рассматриваемой области $|d^0| \gg g$, при вычислении производных слагаемыми, содержащими множитель g в более высоких степенях, можно пренебречь, получим

$$\frac{d\lambda_\theta}{d\theta} = gq(r, \theta), \quad q(r, \theta) = \frac{\partial p_{22}}{\partial \theta} - \frac{p_{12}}{r} \quad (2.6)$$

Таким образом, точки экстремума λ_θ при $r - r_* \gg g$ лежат на линии $q(r, \theta) = 0$ как для быстрых волн (внутри критической окружности $r = r_*$) так и для медленных волн (вне ее).

Из равенств (2.5) и (2.6) с учетом $f''(r_*) > 0$ и того, что при пересечении интегральной кривой окрестности критической окружности, направление ее поворота определяется знаком p_{12} , можно сделать следующие выводы. Если на некотором отрезке критической окружности знаки q и p_{12} противоположны, то в результате пересечения интегральными кривыми медленных волн (идущих при $r < r_* - O(g)$ почти по радиусу, а при $r > r_* + O(g)$ почти по окружности) в окрестности критической окружности не происходит изменения знака производной от λ_1 , взятой вдоль интегральной кривой. В этом же случае для быстрых волн происходит изменение знака производной от λ_2 . Если знаки q и p_{12} совпадают, то знак производной от λ меняется для медленных волн и не меняется для быстрых. Изменение знака производной означает, что внутри окрестности критической окружности на интегральной кривой имеется один (или нечетное число) экстремум λ . Сохранение знака производной означает, что экстремумов нет (или их четное число). Более детальное исследование поведения λ_α вблизи критической окружности показывает, что возможности, указанные в скобках, не осуществляются.

Действительно, уравнение линии экстремумов λ_α можно представить в виде

$$\frac{d\lambda_\alpha}{dl} \equiv \frac{1}{2} g p_{12} \left[\frac{qd}{p_{12}} + 2f'' + gA_1 \pm \frac{(qd/p_{12} - 2f'' + gA)d + g^2 B}{\sqrt{d^2 + g^2 p_{12}^2}} \right] = 0$$

$$A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p_{22} - p_{11}}{2} \right) + \frac{\partial p_{12}}{\partial \theta}, \quad A_1 = A + \frac{\partial p_{11}}{\partial r} \quad (2.7)$$

$$B = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{p_{11} + p_{22}}{2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial r}$$

Здесь dl – некоторый параметр, отсчитываемый вдоль интегральной кривой, причем в окрестности критической окружности $dl \neq 0$ для любого не равного нулю элемента интегральной кривой. Введенная ранее величина $d(r, \theta) = d^0 + \frac{1}{2} g(p_{22} - p_{11})$ на линии экстремумов определяется из уравнения (2.7) и характеризует расстояние по радиусу от линии экстремума λ (2.7) до линии $d = 0$, внутри которой $d > 0$, снаружи $d < 0$.

При $|d^0| \gg g$ левая часть уравнения (2.7) переходит в упрощенные формы (2.5) и (2.6). В исследуемой узкой зоне, где d мало, можно ввести вспомогательную растянутую переменную $z = d/(gp_{12})$, для которой $z \gg 1$, $gz \ll 1$. Используя приближенное выражение для корня квадратного в уравнении (2.7) и пренебрегая рядом слагаемых в соответствии с последними неравенствами, получим решение уравнения (2.7) в области, где d мало: $d = gp_{12}(-f''/(gq))^{1/3}$. Очевидно, действительный корень всегда есть и только один. Для быстрых волн (знак плюс в формуле (2.7)) это решение действует в

области $d > 0$, т.е. при $p_{12}q < 0$, для медленных волн (знак минус) в области $d < 0$, т.е. при $p_{12}q > 0$.

На фиг. 2 линии экстремумов (2.7) нанесены штрихами, стрелками указаны направления роста λ_α .

3. Очевидно, количество и расположение особых точек и линий экстремумов λ_α существенно зависит от вида функции $p(u_1, u_2)$. При исследовании интегральных кривых при $g \neq 0$ в малой окрестности точки $r = 0$ [4, 5] использовалось разложение в ряды по u_1, u_2 . Оказалось, что, если разложение функции $p(u_\alpha)$ содержит квадратичные члены, то при малых u_1, u_2 эта функция может быть взята в виде $p = u_2^2 - u_1^2$. Примем эту же конкретную функцию $p(u_\alpha)$ и для волн конечной интенсивности. Это дает возможность представить более наглядно поведение интегральных кривых на всей плоскости u_1, u_2 .

Итак, пусть несжимаемая среда имеет упругий потенциал $\Phi = F(r^2) + \frac{1}{2}g(u_2^2 - u_1^2)$, где $dF/dr = f(r)$ – функция, изображенная на фиг. 1. Это означает, что в уравнениях (2.1), (2.2) и (2.3) следует положить $p_{12} = \sin 2\theta$, $\frac{1}{2}(p_{22} - p_{11}) = \cos 2\theta$, $p_{11} + p_{22} = 0$. Интегральные кривые оказываются симметричными относительно осей координат.

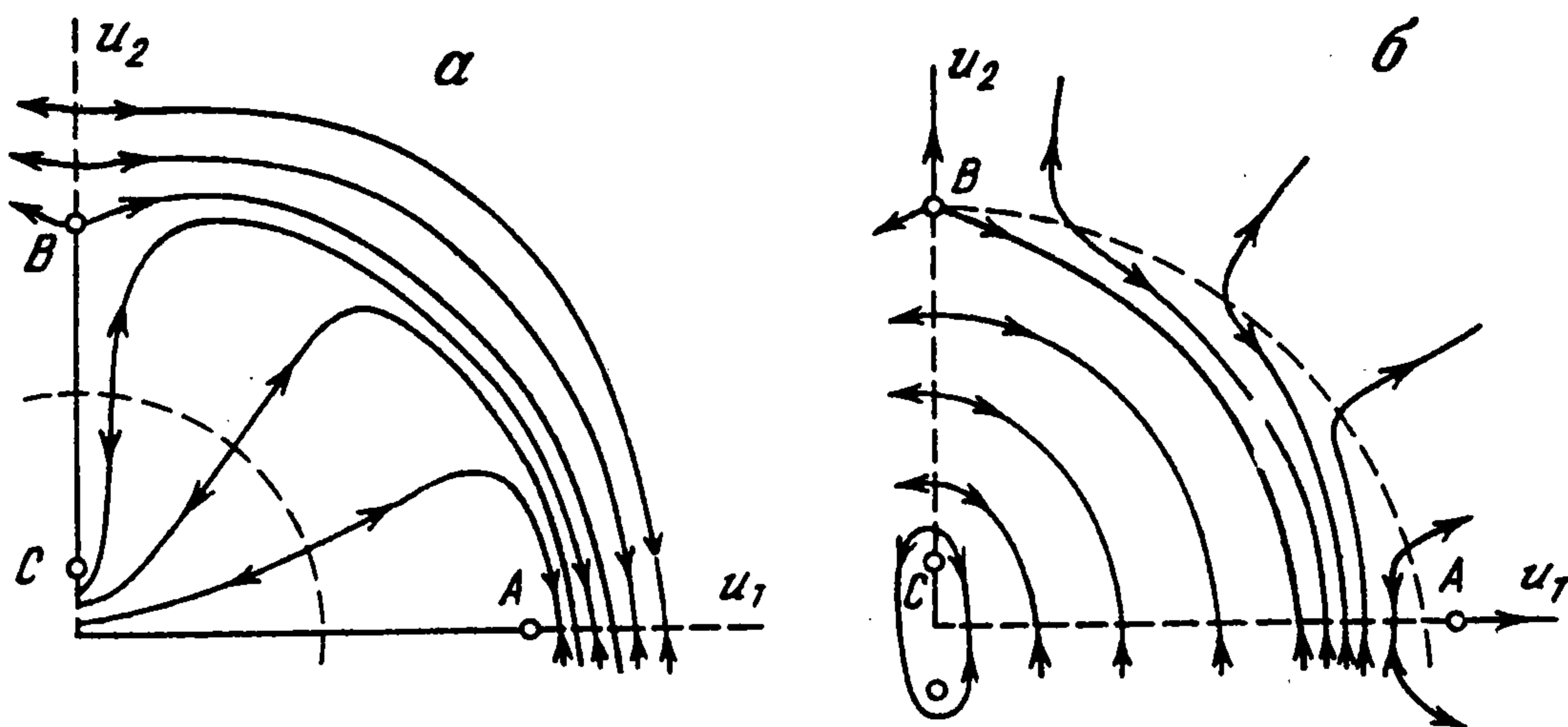
Особые точки обоих семейств интегральных кривых совпадают и лежат на осях координат ($p_{12} = \sin 2\theta = 0$) там, где $d^0(r) + g \cos 2\theta = 0$ (см. равенства (2.3)). Это дает три пары точек: на оси u_2 точки C , в которых $u_1^C = 0$, $u_2^C = \pm(-2g/f_0'')^{1/2}$, и точки B , где $u_1^B = 0$, $u_2^B = \pm(r_* - 2g/f_*')$, и на оси u_1 точки A , где $u_1^A = \pm(r_* + 2g/f_*')$, $u_2^A = 0$. Интегральные кривые в окрестности точки C изучены [4]. Исследование интегральных кривых в окрестности точки B показывает, что через нее проходят три интегральные кривые каждого семейства – луч вдоль оси u_2 и две линии, направление которых составляет малые углы $\pm\alpha = \pm(2g/r_*f_*')^{1/2}$ с осью u_1 . Через точку A проходит одна интегральная кривая – луч вдоль оси u_1 . Поведение интегральных кривых в окрестности точек A и B с точностью до поворота совпадает с изображенным на фиг. 2.

Интегральные кривые пересекают критическую окружность $r = r_*$ в направлениях, параллельных осям координат u_α . Вблизи окружности $r = r_*$ линии обоих семейств поворачиваются на угол $\pi/2$ в направлении, определяемом знаком $p_{12} / (\partial p_{12} / \partial \theta) = \operatorname{tg} 2\theta$. Интегральные линии медленных и быстрых простых волн изображены на фиг. 3 сплошными линиями.

Изменение собственных значений λ вдоль соответствующих интегральных кривых определяется производной

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{1}{2} g \sin 2\theta \left[f'' - \frac{6d^0}{r} \mp \frac{(f'' + 6d^0/r)(d^0 + g \cos 2\theta)}{[(d^0 + g \cos 2\theta)^2 + g^2 \sin^2 2\theta]^{1/2}} \right] \quad (3.1)$$

Здесь, как и ранее, $d^0 = d^0(r) = \frac{1}{2}(f/r - f')$. Из-за симметрии достаточно рассмотреть $d\lambda/dl$ только в первой четверти, а направление отсчета l вдоль



Фиг. 3

интегральной кривой выбрано в сторону увеличения r . Очевидно $d\lambda/dl$ меняет знак на осях координат, где $\sin 2\theta = 0$ (что соответствует равенству $q = -3 \sin 2\theta/r = 0$). Кроме того, для медленных волн экстремумы λ_1 составляют линию, близкую к окружности $r = r^-$ ($f''(r^-) = 0$). Линия экстремумов λ_1 изображена на фиг. 3, а штриховой линией.

Совпадение линий $p_{12} = 0$ и $q = 0$ вносит в эту задачу определенную симметрию и некоторую вырожденность. В частности, q и p_{12} всегда имеют разные знаки, поэтому согласно разд. 2 дополнительная точка экстремума λ в окрестности критической окружности имеется только для быстрых волн. Эта часть линии экстремумов λ представляет собой симметричный относительно осей координат овал, близкий к критической окружности и целиком лежащий внутри нее. Он проходит через особую точку B и точку $u_1 = r_*$, $u_2 = 0$. Вся линия экстремумов λ_2 состоит из этого овала и тех участков осей координат, которые пересекаются интегральными кривыми быстрых волн. На фиг. 3, б она изображена штриховой линией; стрелками на интегральных кривых указано направление роста λ_α .

4. Рассмотрим теперь поведение характеристических скоростей и интегральных кривых волн Римана в сжимаемой среде с малой анизотропией, для которой справедливо равенство (1.3). Оси декартовой локальной системы координат u_i направим по касательным к координатным линиям цилиндрической системы с осью z вдоль u_3 . В такой системе $F_{12} = F_{32} = 0$, $F_{22} = F_1/r$, $F_1 = \partial F / \partial r$. Здесь и далее индексом 1 обозначено дифференцирование по $r = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2}$, индексом 3 — дифференцирование по $z = u_3$, а индексом 2 — дифференцирование по касательной к окружности радиуса r .

В области, где все собственные значения матрицы F_{ij} различаются на конечную величину, интегральные кривые при $g \neq 0$ близки к соответствующим интегральным кривым, получающимся при $g = 0$. В разд. 1 было показано, что при $g = 0$ одно из семейств интегральных кривых в пространстве u_i представлено окружностями в плоскостях $u_3 = \text{const}$ (вращательные волны), их характеристическая скорость задается собственным значением $\lambda_\theta^0 = F_1/r$. Два другие семейства волн являются плоскополяризованными с интегральными кривыми в плоскостях, проходящих через ось u_3 и имеют собственные значения $\lambda_{r,z}^0 = \frac{1}{2} \{ F_{11} + F_{33} \pm [(F_{11} - F_{33})^2 + 4F_{13}^2]^{1/2} \}$.

Условие совпадения собственных значений двух плоскополяризованных волн требует одновременного выполнения двух равенств $F_{11} = F_{33}$, $F_{13} = 0$, которые в

общем случае могут выполняться только в отдельных точках этой плоскости. Этим точкам, если они не лежат на оси u_3 , соответствуют окружности в пространстве u_i .

Чтобы проследить в общем случае сжимаемой среды те свойства волн, которые наблюдались в несжимаемом материале, будем считать, что и в сжимаемой среде при $g = 0$ в рассматриваемой области в некоторых состояниях возможно совпадение двух собственных значений, одно из которых соответствует вращательной волне $\lambda = \lambda_\theta^0$, другое – той из плоскополяризованных волн, которая при малых u_α переходит в поперечную волну $\lambda = \lambda_r^0$. В силу того, что собственные значения матрицы F_{ij} , соответствующие вращательной и плоскополяризованным волнам, определяются из независимых уравнений, требование их совпадения приводит в отличие от предыдущего случая к одному уравнению, определяющему кривую на плоскости $u_1 u_3$ или поверхность вращения в пространстве u_i . Ее уравнение имеет вид

$$D^0 \equiv (F_{11} - F_1 / r)(F_{33} - F_1 / r) - F_{13}^2 = 0$$

Эта поверхность вращения с осью u_3 играет для рассматриваемой сжимаемой среды ту же роль, что и критическая окружность $r = r_*$ в разд. 2, 3 в случае несжимаемой среды, а функция $D^0(r, u_3)$ аналогична использованной там функции $d^0(r)$.

Рассмотрим поверхность Σ^0 , полученную вращением около оси u_3 некоторой интегральной кривой "первого" семейства, соответствующего λ_r^0 .

Эту поверхность можно считать состоящей из кривых первого семейства, каждая из которых лежит в плоскости, проходящей через ось u_3 . На этой же поверхности лежат интегральные кривые "второго" семейства λ_θ^0 – окружности $r = \text{const}$. В точке $u_1 = 0, u_2 = 0$ эта поверхность Σ^0 касается плоскости $u_3 = \text{const}$ и при малых u_1, u_2 соответствует квазипоперечным волнам. Проекция обоих семейств интегральных кривых на плоскость $u_3 = \text{const}$ совпадают с интегральными линиями для несжимаемой среды – лучами и окружностями. Собственный вектор третьего семейства λ_z^0 вследствие симметрии матрицы F_{ij} направлен по нормали к собственным векторам других семейств и, следовательно, по нормали к Σ^0 .

Таким образом, при $g = 0$ каждая из поверхностей Σ^0 состоит из интегральных кривых первого и второго семейств и играет ту же роль, что и плоскость $u_3 = 0$ в случае несжимаемой среды. Разница заключается только в том, что поверхностей Σ^0 много и они заполняют все пространство u_i .

При малом $g \neq 0$ интегральные кривые первого и второго семейств остаются близкими к соответствующим поверхностям Σ^0 , а качественное поведение их проекций на поверхность Σ^0 совпадает с поведением интегральных кривых на плоскости $u_3 = 0$ в случае несжимаемой среды.

Первое из этих утверждений вытекает из того, что интегральные кривые ортогональны в каждой точке собственному вектору третьего семейства, который при малых $g \neq 0$ мало отличается от нормали к поверхности Σ^0 . Всюду вдали от поверхности $D^0 = 0$ и от оси u_3 интегральные кривые рассматриваемых двух семейств мало отклоняются от интегральных кривых при $g = 0$.

Поведение интегральных кривых при малых u_1 и u_2 , которое соответствует квазиперечным волнам, совпадает [4] с поведением интегральных кривых при малых u_1, u_2 в случае несжимаемой среды (разд. 2, 3). В окрестности поверхности $D^0 = 0$, на которой $\lambda_r^0 = \lambda_\theta^0$, интегральные кривые обоих семейств, оставаясь каждая вблизи своей поверхности Σ^0 , претерпевает качественные изменения своего поведения. Поверхность $D^0 = 0$ представляет собой поверхность вращения, а ее пересечение с поверхностью Σ^0 – окружность – аналог критической окружности $r = r_*$ в случае несжимаемой среды.

В окрестности поверхности $D^0 = 0$ собственные значения рассматриваемых семейств можно представить формулой

$$\lambda_{1,2} = \Phi_{22} + \frac{1}{2} \{ D \mp [D^2 + 4g^2(p_{12}G - p_{23}\Phi_{13})^2]^{1/2} \} / G$$

$$D = (\Phi_{11} - \Phi_{22})G - \Phi_{13}^2, \quad G = \Phi_{33} - F_1 / r$$

Равенство $\lambda_1 = \lambda_2$, определяющее положение особых точек, приводит, как и в случае несжимаемой среды, к двум соотношениям

$$D(r, \theta, u_3) = 0, \quad p_{12}G - p_{23}\Phi_{13} = 0 \quad (4.1)$$

Видно, что особые точки составляют линию, расположенную вблизи поверхности $D^0 = 0$. На каждой из поверхностей Σ^0 лежат отдельные точки, представляющие пересечение линии (4.1) с этой поверхностью. Поведение интегральных кривых в окрестности особых точек качественно не отличается от случая несжимаемой среды.

Если пересечь узкую зону, где D^0 порядка g , не проходя при этом через особую точку, то на всем пути λ_1 остается отличным от λ_2 . Однако λ_1 с одной стороны этой узкой зоны соответствует квазиплоскополяризованным волнам, а с другой – квазивращательным. Это означает, что интегральные кривые, соответствующие λ_1 , поворачиваются в этой зоне на 90° , как и в случае несжимаемой среды. Интегральные кривые, соответствующие λ_2 , ортогональны первым и также разворачиваются на 90° .

Производные от λ вдоль соответствующих им интегральных кривых для квазиплоскополяризованных волн конечны и близки к их значениям при $g = 0$. Для квазивращательных волн эта производная мала и полностью определяется анизотропией среды

$$\frac{d\lambda_\theta}{d\theta} = g \left(\frac{\partial p_{22}}{\partial \theta} - \frac{p_{12}}{r} \right) \equiv gQ(r, \theta, u_3) \quad (4.2)$$

Приравниванием нулю выражения (4.2) получаем уравнение поверхности, при пересечении которой λ_θ на своей интегральной кривой достигает экстремума. Пересечение этой поверхности Σ^0 дает кривую, аналогичную кривой $q = 0$ в случае несжимаемой среды. Подобно случаю несжимаемой среды можно показать, что в малой окрестности поверхности $D^0 = 0$ на одном из семейств интегральных кривых, соответствующих λ_1 и λ_2 , также происходит изменение знака производной от λ вдоль интегральной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
3. Ленский Э.В. Простые волны в нелинейно-упругой среде // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1983. № 3. С. 80–86.
4. Свешникова Е.И. Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642–646.
5. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 110–115.

Москва

Поступила в редакцию
15. IX. 1992