ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 3 1993

УДК 539.3

© 1993 г. И.В. Панферов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Исследуется изгиб трехслойной балки с жесткими внешними слоями. Средний слой (прокладка) имеет незначительную жесткость по сравнению с внешними слоями и рассматривается как упругое основание Винклера–Циммермана. Нижний (наиболее жесткий) изотропный слой, по предположению, работает на нагрузку как балка Бернулли–Эйлера. Граничные условия на концах балки могут быть, вообще говоря, произвольными. Рассматривается случай, когда концы нижней балки защемлены. На внешней поверхности верхнего трансверсально-изотропного слоя действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка. Концы этого слоя свободны от нагрузок. Плоско-напряженное состояние трансверсально-изотропного слоя определяется на основе уравнений теории упругости. В тригонометрических рядах получено точное решение задачи.

При общем подходе к расчету многослойных конструкций с мягкими и жесткими слоями [1, 2] жесткие слои моделируются обычно на основе гипотезы Кирхгофа–Лява, а допущение для мягких слоев, например, состоит в том, что для всех компонент вектора перемещений принимается линейный закон изменения по толщине.

Задачу будем решать в безразмерных координатах x, y, отнесенных к половине длины трехслойной балки l. Ось x направлена по длине балки, ось y – по толщине трансверсально-изотропного слоя. Концы трехслойной балки – поверхности $x = \pm 1$, а $y = 0$, $y = h$ – соответственно контактная и внешняя боковые поверхности трансверсально-изотропного слоя.

Уравнения равновесия и совместности деформаций имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{1}$$

Соотношения между напряжениями и деформациями ε_x, ε_y, $^1/_2\varepsilon_{xy}$ запишем в форме

$$E_x\varepsilon_x=\sigma_x-k\nu'\sigma_y,\quad E_x\varepsilon_y=k\sigma_y-k\nu'\sigma_x,\quad E_x\varepsilon_{xy}=\gamma\sigma_{xy} \tag{2}$$

$$k=E_x/E_y,\quad \gamma=E_x/G$$

Ось y – ось симметрии материала, E_x, E_y – модули упругости в направлениях x и y, G – модуль сдвига, ν' – коэффициент Пуассона.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси нижней балки имеет вид

$$\frac{d^2W_0}{dx^2}=\frac{12}{E_0s_0^3}\left(\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta R(\xi)d\xi d\eta-C\right) \tag{3}$$

а поперечное деформирование прокладки описывается уравнением

$$E_x(W(0,x)-W_0(x))=\lambda_0 R(x),\quad R(x)=\sigma_y(0,x) \tag{4}$$

где $W(y,x)$ и $W_0(x)$ – соответственно безразмерные прогибы (отнесенные к l) трансверсально-изотропного слоя и нижней балки.

При вычислении коэффициента λ_0 можно пользоваться соотношением

$$\lambda_0 \approx E_x s_m / E_m,\quad E_m << E_x$$

где E_0, E_m – модули упругости балки и прокладки, а s_0, s_m – соответственно толщины.

При написании формул (3), (4), очевидно, предполагалось, что нормальное напряжение $R(x)$ постоянно по толщине прокладки.

Запишем граничные условия на боковых поверхностях трансверсально-изотопного слоя $y = 0$ (контактная поверхность) и $y = h$ (внешняя поверхность) и на концах слоя $x = \pm 1$

$$y=0:\ \sigma_y=R(x),\quad y=h:\ \sigma_y=-q \tag{5}$$

$$y=0,\ y=h:\ \sigma_{xy}=0$$

$$x=\pm 1:\ \int\limits_0^h \sigma_x dy=0,\quad \int\limits_0^h \sigma_x y dy=0,\quad \int\limits_0^h \sigma_{xy} dy=0 \tag{6}$$

Последнее условие в более жесткой форме имеет вид $\sigma_{xy} = 0$. Неопределенная постоянная C в формуле (3) определяется из условий закрепления балки Бернулли–Эйлера

$$x=\pm 1:\ dW_0/dx=0,\ W_0=0. \tag{7}$$

Общий интеграл третьего уравнения (1) имеет вид

$$\sigma_x=\Phi(x)+F(x)y-\mu\sigma_y-k\int\limits_0^y\int\limits_0^\eta (\sigma_y)''_{xx} d\xi d\eta \tag{8}$$

$$\mu=\gamma-2k\nu',\quad (\sigma_y)''_{xx}=\partial^2\sigma_y/\partial x^2$$

где $\Phi(x)$, $F(x)$ – неопределенные функции.

Из (3), (4) следует (при учете $(W)''_{xx} \equiv (\varepsilon_{xy})'_x-(\varepsilon_x)'_y$)

$$\lambda_0 R''=-F-\left(\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta R d\xi d\eta - C\right)12E_x/(E_0 s_0^3) \tag{9}$$

Потребуем, чтобы первое условие (6) выполнялось при любом x (функция $\Phi(x)$, таким образом, тоже определена).

Тогда при выполнении условия $\sigma_{xy}(0,x) = 0$ условие $\sigma_{xy}(h,x) = 0$ выполняется автоматически.

При учете уравнений равновесия и условия $\sigma_{xy}(0,x) = 0$ второе граничное условие (5) принимает вид

$$\lambda R^{(4)}+\omega R=\mu L_1((\sigma_y)''_{xx})+(k/\lambda)L_2(\lambda(\sigma_y)''''_{xxxx}+\omega\sigma_y)-(k\omega/\lambda)L_2(\sigma_y)-q \tag{10}$$

$$\lambda=\lambda_0 h^3/12,\quad \omega=1+E_x h^3/(E_0 s_0^3)$$

$$L_1(\cdot)=\int\limits_0^h\int\limits_0^y(\cdot)d\xi dy-\frac{h}{2}\int\limits_0^h(\cdot)dy$$

$$L_2(\cdot)=\int_0^h\int_0^y\int_0^\xi\int_0^\eta(\cdot)d\rho d\eta d\xi dy-\frac{h}{2}\int_0^h\int_0^y\int_0^\xi(\cdot)d\eta d\xi dy$$

(L_1, L_2 – операторы по координате y).

Контактное напряжение $\sigma_y(0, x) = R(x)$ определяется из уравнения (10), точное решение которого можно найти в тригонометрических рядах. Для этого следует использовать решения уравнений (1) в рядах Фурье, удовлетворяющие только граничным условиям (5) на боковых поверхностях слоя $y = 0$, $y = h$.

Положим, что

$$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\pi nx,\quad R''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\pi nx \tag{11}$$

Заметим, что из третьего условия (6) в силу симметрии задачи следует $\int_0^1 R(x)dx=-q$, откуда получим

$$a_0=-q \tag{12}$$

Решение системы (1) при учете граничных условий (6) на поверхностях $y = 0$, $y = h$ и соотношений (11), (12) имеет вид (M – неопределенная постоянная)

$$\sigma_y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nY_n(y)\cos\pi nx+a_0$$

$$\sigma_{xy}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_nX_n(y)\sin\pi nx \tag{13}$$

$$\sigma_x=-\sum_{n=1}^{\infty}a_nZ_n(y)\cos\pi nx+M(2y-h)$$

$$Y_n(y)=C_1\operatorname{ch}(\alpha_{1,n}y)+C_2\operatorname{sh}(\alpha_{1,n}y)+C_3\operatorname{ch}(\alpha_{2,n}y)+C_4\operatorname{sh}(\alpha_{2,n}y)$$

$$X_n(y)=\kappa_1[C_1\operatorname{sh}(\alpha_{1,n}y)+C_2\operatorname{ch}(\alpha_{1,n}y)]+\kappa_2[C_3\operatorname{sh}(\alpha_{2,n}y)+C_4\operatorname{ch}(\alpha_{2,n}y)]$$

$$Z_n(y)=\kappa_1^2[C_1\operatorname{ch}(\alpha_{1,n}y)+C_2\operatorname{sh}(\alpha_{1,n}y)]+\kappa_2^2[C_3\operatorname{ch}(\alpha_{2,n}y)+C_4\operatorname{sh}(\alpha_{2,n}y)]$$

$$\kappa_{\frac{1}{2}}=\{\tfrac{1}{2}[\mu\pm(\mu^2-4k)^{1/2}]\}^{1/2},\quad \alpha_{1,n}=\pi n\kappa_1,\quad \alpha_{2,n}=\pi n\kappa_2,\quad \mu>2\sqrt{k}$$

Неопределенные постоянные $C_1,\ldots, C_4$ определяются для каждого значения n ($n \geqslant 1$) из системы уравнений

$Y_n(0) = 1,\ \ X_n(0) = 0,\ \ Y_n(h) = 0,\ \ X_n(h) = 0$

Напряжения σ_y и σ_{xy} определяются однозначно из граничных условий (5) на поверхностях $y = 0$, $y = h$. Заметим также, что условие (12) означает, что $\sigma_{xy}(y, \pm1) = 0$.

Напряжение σ_x выписано с точностью до члена $M(2y - h)$, причем $\int_0^h\sigma_x dy = 0$ при любом x.

Функция $(\sigma_y)''_{xx}$ определяется однозначно из граничных условий $(\sigma_{xy})''_{xx} = 0$ при $y = 0$, $y = h$, $(\sigma_y)''_{xx} = 0$ при $y = h$, $(\sigma_y)''_{xx} = R''(x)$ при $y = 0$ и системы уравнений (1) (эти уравнения нужно продифференцировать два раза по x).

$$(\sigma_y)''_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}b_nY_n(y)\cos\pi nx+b_0\{6h^{-3}(y^3/3-y^2h/2)+1\} \tag{14}$$

В результате получим

$$L_1((\sigma_y)''_{xx}) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n^1 b_n \cos\pi nx + l_0^1 b_0$$

$$L_2(\sigma_y) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 a_n \cos\pi nx + l_{0,0}^2 a_0 \tag{15}$$

$$L_2((\sigma_y)''_{xx}) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 b_n \cos\pi nx + l_{2,0}^2 b_0$$

где постоянные l_n^1, l_n^2 ($n \geqslant 1$), l_0^1, $l_{0,0}^2$, $l_{2,0}^2$ известны. В частности, $l_0^1 = h^2/10$, $l_{0,0}^2 = -h^4/4!$, $l_{2,0}^2 = -h^4 26/(7 \cdot 5!)$.

В уравнении (10) величины $L_1((\sigma_y)''_{xx})$ и $L_2(\sigma_y)$ представим рядами Фурье по формулам (15). Тогда общее решение уравнения (10) имеет вид

$$R(x) = D_1 \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x + D_2 \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x +$$

$$+\mu\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l_n^1 b_n [\lambda(\pi n)^4 + \omega]^{-1} \cos\pi nx + l_0^1 \frac{b_0}{\omega}\right\} - \tag{16}$$

$$-\frac{k\omega}{\lambda}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 a_n [\lambda(\pi n)^4 + \omega]^{-1} \cos\pi nx + l_{0,0}^2 \frac{a_0}{\omega}\right\} + \frac{k}{\lambda} L_2(\sigma_y) - \frac{q}{\omega}$$

где $\beta = [\omega/(4\lambda)]^{1/4}$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) = l_n^1 b_n [\lambda(\pi n)^4 + \omega]^{-1} \cos\pi nx$$

Предположим, что исходный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n^1 b_n \cos\pi nx$$

сходится. Тогда ряды, составленные из производных: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'$ и $\sum_{n=0}^{\infty} u_n''$, сходятся равномерно. Следовательно, рассматриваемый ряд можно почленно дифференцировать дважды [3]. То же справедливо и для второго ряда в формуле (16).

Имеем

$$R'' = -2\beta^2 \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x\, D_1 + 2\beta^2 \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x\, D_2 -$$

$$-\mu \sum_{n=1}^{\infty} l_n^1 b_n (\pi n)^2 [\lambda(\pi n)^4 + \omega]^{-1} \cos\pi nx + \tag{17}$$

$$+\frac{k\omega}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 a_n (\pi n)^2 [\lambda(\pi n)^4 + \omega]^{-1} \cos\pi nx + \frac{k}{\lambda} L_2((\sigma_y)''_{xx})$$

Из системы уравнений (16), (17) определяются искомые коэффициенты a_n, b_n:

$$a_n = D_1 A_{1,n} + D_2 A_{2,n}, \quad b_n = D_1 B_{1,n} + D_2 B_{2,n}, \quad n \geqslant 1$$

$$a_0 = D_1 A_{1,0} + D_2 A_{2,0} - q/\omega, \quad b_0 = D_1 B_{1,0} + D_2 B_{2,0} \tag{18}$$

где $A_{1,n}$, $B_{1,n}$ ($n \geqslant 1$) – решение указанной системы уравнений при $D_1 = 1, D_2 = 0$. Аналогично $A_{2,n}$, $B_{2,n}$ – решение при $D_1 = 0, D_2 = 1$.

x	$\sigma_y(0,x)$	$\sigma_{xy}(½h,x)\times10^{-2}$	$\sigma_x(0,x)\times10^{-4}$	$\sigma_x^*(0,x)\times10^{-4}$
0	–0,665	0	0,348	0,350
58/96	–0,680	0,299	–0,016	–0,015
62/96	–0,598	0,321	–0,068	–0,066
72/96	–0,032	0,430	–0,220	–0,219
76/96	–0,744	0,476	–0,297	–0,296
84/96	–10,20	0,051	–0,418	–0,417
88/96	–15,82	–0,731	–0,367	–0,366
92/96	–3,722	–1,443	–0,175	–0,174
1	58,66	0	0,004	0,002

Неопределенные постоянные D_1 и D_2 находятся из уравнения (12) $a_0 = -q$ и второго граничного условия (6), где величина σ_x задана формулой (8). В частности, последнее уравнение для определения D_1 и D_2 имеет вид

$$F(1)h^3/12 - \mu L_3(\sigma_y) - kL_4((\sigma_y)''_{xx}) = 0$$

$$L_3(\cdot) = \int_0^h y(\cdot)dy - ½h\int_0^h(\cdot)dy$$

$$L_4(\cdot) = \int_0^h y\int_0^y\int_0^\eta(\cdot)d\xi d\eta dy - ½h\int_0^h\int_0^y\int_0^\eta(\cdot)d\xi d\eta dy$$

(L_3, L_4 – операторы по координате y).

Постоянная C в формуле (9) для случая защемленных концов балки Бернулли–Эйлера вычисляется по формуле

$$C = \int_0^1\int_0^x\int_0^\xi R d\eta d\xi dx.$$

Итак, вычислив a_n и b_n можно определить по формулам (13) функции σ_y и σ_{xy}. Напряжение σ_x выписано с точностью до постоянного момента.

Постоянную M определим из условия

$$\int_0^h \sigma_x y dy = 0$$

Получим

$$M = 6h^{-3}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h Z_n(y)ydy\cos\pi n \tag{19}$$

Заметим, что, вообще говоря, имеем двойное представление напряжений. Например, функцию σ_x можно вычислять как по формулам (13), (19), так и по формуле (8) при учете первого соотношения (13) и формулы (14). Сравнение этих двух решений позволяет оценить количество членов N, которые следует удержать в выписанных рядах Фурье.

Определив деформации в анизотропном слое, можно найти перемещения при учете граничного условия $W_0 = 0$ при $x = \pm1$.

В таблице приведены значения напряжений в некоторых характерных точках анизотропного слоя при $h = s_0 = 0,01$, $\mu = 4,5$, $k = 4$, $E_x/E_0 = 0,5$, $\lambda_0 = 40$. Напряжения отнесены к параметру q. Напряжение σ_x вычислено по формулам (13), (19), а σ_x^* – по формуле (8). Сравнение этих двух решений позволяет оценить количество членов которых следует удержать в рядах Фурье. В данном примере $N = 400$.

Полученные числовые результаты показывают, что на концах слоя $x = \pm 1$ при уменьшении коэффициента податливости λ_0 прокладки могут возникать весьма значительные растягивающие напряжения σ_y (таблица). Касательные напряжения вблизи свободной поверхности $x = \pm 1$ также велики. Поэтому при расчете на прочность многослойных конструкций, составленных из жестких (анизотропных) и мягких слоев, имеет смысл определять касательные и нормальные напряжения в жестких слоях.

Осевые напряжения σ_x меняются по толщине по линейному закону. Это подтверждает в качественном отношении приемлемость основных допущений теории тонких оболочек, например гипотезы Кирхгофа–Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. Вып. 6. С. 3–17.
3. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Наука, 1979. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1992